

Koncepce řady učebnic matematiky pro 2. stupeň

prof. Hejný a kol.

PREAMBULE

Sada učebnic pro vzdělávací oblast **Matematika a její aplikace** pro druhý stupeň základního vzdělávání a odpovídající ročníky šestiletých a osmiletých gymnázií tvoří sedm sešitů označených písmeny A, B, C, D, E, F a G.

Sada je určena pro konstruktivistický edukační styl, jehož hlavní charakteristiky jsou:

- výrazná intelektuální i osobnostní autonomie žáků;
- těžištěm výuky je individuální i skupinové řešení úloh a bohatá komunikace mezi žáky;
- vhodně volené série gradovaných úloh vedou žáky k objevování nových zákonitostí a procesů; formulování hypotéz a jejich prověřování patří ke klíčovým aktivitám žáků;
- role učitele spočívá především v tvorbě příznivého pracovního klimatu, diferencovaném zadávání přiměřených úloh žákům a řízení třídní diskuse;
- učitel učivo nevysvětluje, svoji akustickou přítomnost na hodině omezuje na minimum;
- hlavními indikátory kvality výuky jsou:
 - a) vztah žáků k intelektuální práci obecně a matematice zvláště,
 - b) schopnost žáků vzájemně spolupracovat.

Jedním z nejnáročnějších didaktických problémů vyučování matematice vůbec je diferenciací žáků. Tradiční frontální přístup vede k tomu, že slabší žáci ztrácí víru v to, že by matematice mohli porozumět, omezují se na činnosti reproduktivní a imitační a trpí v této oblasti komplexem méněcennosti. Z národohospodářského hlediska ještě horší je, že špičkoví žáci nejsou dostatečně podporováni a tak společnost přichází o nejcennější kapitál, který má – o rozvoj talentované mládeže.

Konstruktivistický edukační styl řeší uvedený problém tím, že učí žáky volit si individuální rychlost postupu. V tomto směru je učebnice učiteli nápomocná

nabídkou mnoha gradovaných sérií úloh. Například úloha 2 v sešitu A na straně 40, která modeluje zlomky pomocí hodin, má 15 případů. Z nich si každý žák vybírá případy podle svých schopností. Třeba případy a) – d) vyřeší nejslabší žáci, případy n) a o) ti nejzdatnější. Je zřejmé, že takový způsob výuky klade na učitele značné nároky, pokud jde o orchestraci práce celé třídy. Zkušenosti ukazují, že žáci sami (a to již v prvním ročníku) si zde rychle vytváří efektivní vzorce sociálního chování.

Uvedený postup vede k tomu, že i slabší žáci „drží krok“ s třídou, byť jejich vhlad do dané problematiky je menší. Mluvíme-li například o sčítání zlomků tak ti nejslabší umí třeba sečíst $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ a ví proč je to $\frac{3}{4}$; zdatnější se dopracují k objevu vztahu $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$ a ti nejlepší jsou schopni tento vztah dokázat.

Aby bylo možné diferenciaci žáků zachovat po celou dobu čtyř let, jsou učebnice stavěny tak, že díly A, B, C, D, E a F pokrývají celé učivo předepsané RVP a díl G je v tomto smyslu nástavbou. Tento díl nabízí dostatečně náročné podněty i těm nejschopnějším žákům.

Nikde v učebnici nejsou graficky výrazné vzorečky nebo poučky, neboť tyto se obrací k dlouhodobé paměti žáka, do které se ukládají jako izolované fakty. Jako takové se pak stávají překážkou pro vznik porozumění. Učebnice vede žáka k tomu, aby důležité vztahy objevil samostatně, nebo s pomocí spolužáků a aby se tento poznatek dostával do žákova vědomí jako zážitek a byl zde propojen na další poznatky, které se objevily v procesu řešení příslušné úlohy.

Východiskem vzniku každého poznání jsou životní a následně i školské zkušenosti žáka a poznávací proces pak probíhá v řetězci zkušenosti → jejich evidence → jejich organizace → odhalení vztahu.

Toto je základní způsob kterým učebnice budují dílčí žákovy znalosti. Dílčí znalosti se pak zasítují do celků – širších mentálních schémat.

Na rozdíl od dospělého člověka, který potřebuje svoje znalosti strukturovat a dokáže se jistým problémem zabývat dlouhou dobu, má žák schopnost vstřebet a propojit mnoho různorodých podnětů a potřebu svoji činnost často měnit. Proto v učebnicích, zejména v dílech A, B, C a D, je časté střídání tematických celků. Stejný typ úloh se opakovaně vrací, ale pokaždé jsou obohaceny o některé další prvky, další myšlenky. Žák tak má dostatek času zažít a hlouběji pochopit danou myšlenku. Týká se to zejména nosných myšlenek, jako je budování představy čísla, budování představy funkční závislosti, budování geometrických představ, budování schopnosti efektivní práce s daty.

V době kalkulátorů ztrácí schopnost hbitého a spolehlivého počítání na důležitosti. Jistou počítařskou rutinu však žák potřebuje. Získává ji pomocí tzv. cílených úloh, tj. úloh, u nichž dosažení cíle vyžaduje mnohé výpočty. Důležité je, aby žák uměl účinně pracovat s kalkulátorem a aby rozuměl kalkulativním procedurám, které používá. K tomu jej vedou zejména algebrogramy.

NESTANDARDNÍ ÚLOHY

Učebnice masově využívá nestandardní didaktická prostředí, zejména: Autobus, Krokování, Součtové trojúhelníky, Součtinové čtverce, Algebrogramy, Sousedé, Šipkové grafy, Mince, Čtvercová mříž, Origami, Krychlová tělesa.

Převážná většina úloh vycházejících z těchto prostředí je nestandardní. Mnohé z nich jsou propojeny na životní zkušenost žáka a mají tedy silně aplikační charakter. V těchto úlohách je dále přítomno množství důležitých jevů jazykových i logických. Edukační síla těchto úloh bytostně závisí od způsobu, jakým je výuka vedena. Účinnými tyto úlohy jsou v případě, že žáci mají dostatečný čas k jejich řešení a k vzájemným diskuzím.

SEŠITY A+B

ARITMETIKA A ALGEBRA

Pojmy.

- přirozené číslo, **celé číslo**, nula, číslice (0, 1, ...,9)
- základní aritmetické operace (součet, rozdíl, součin, dělení se zbytkem jednomístným číslem), výpočet, výsledek, dílčí výsledek, závorka, rovnost, různost, nerovnost
- nejmenší a největší prvek
- idiomy: o n větší/menší, n -krát větší/menší
- n -ciferné číslo (zejména pro $n \leq 3$), ciferný součet čísla, propedeutika pojmu **rozvinutý zápis čísla v desítkové soustavě**
- rozklad přirozeného čísla na součet/součin
- sudé a liché číslo, **prvočíslo**, **složené číslo**, **násobek**, **dělitel**, **nejmenší společný násobek**, **největší společný dělitel**, Eratosthenovo síto
- kritéria dělitelnosti 2, 5, 10, propedeutika dělitelnosti číslem 3 a 4
- **desetinná čísla** (zejména desetiny a setiny), desetinná čárka
- kmenový zlomek, zlomky (zejména se jmenovatelem menším než 13 a jmenovateli 60, 100), čitatel, jmenovatel, zlomek v základním tvaru
- procento, **počet procent**, **základ**
- porovnávání, uspořádání vzestupné/sestupné
- **číselná osa** (v rozsahu výše zmíněných čísel)
- idiom typu „ $2/3$ z A “
- porozumění předložkám kilo, deci, centi, mili
- měřítko (propedeutika)
- **lineární rovnice**, **soustava dvou lineárních rovnic** (propedeutika)
- absolutní hodnota (propedeutika)

Vztahy.

- nula je neutrální prvek vzhledem ke sčítání, $0 \cdot n = 0$
- komutativita a asociativita sčítání i násobení
- propedeutika distributivního zákona
- tranzitivita uspořádání
- rovnost $\frac{a}{b} = a : b$
- rovnosti typu $3,20 = 3,2$
- vysvětlení paradoxu zápisu $7:3 = 2$ (zb. 1) = $9:4$

Činnosti.

- písemné, mentální i kalkulaátorem realizované základní operace
- účelné využití kalkulaátoru (např. dělení, dělení se zbytkem)

- uspořádání množiny čísel (v rozsahu výše zmíněných čísel)
- odhady (sémantické i strukturální týkající se jedné operace)
- krácení/rozšiřování zlomků (v rozsahu výše zmíněných čísel)
- porovnávání jednoduchých zlomků a desetinných čísel (v rozsahu výše zmíněných čísel)
- sčítání kmenových zlomků
- sčítání a odčítání desetinných čísel (v rozsahu výše zmíněných čísel)
- převody jednotek (délka, hmotnost, čas)
- řešení úloh o slevách a zdraženích v procentech
- různé metody řešení (slovních) úloh: pokus-omyl, dramatizace, tabulace, vizualizace, modelování

GEOMETRIE

Pojmy.

- úsečka, přímka, polopřímka
- trojúhelník (ostroúhlý, pravoúhlý, tupouhlý, rovnoramenný, rovnostranný)
- trojúhelník: střední příčka, těžnice, výška, osa strany (jako množina bodů dané vlastnosti)
- čtyřúhelník (čtverec, obdélník, kosočtverec, lichoběžník)
- kruh, kružnice, poloměr (propedeutika)
- úhel (konceptuálně i procesuálně), dvojice úhlů, velikost úhlu
- osová souměrnost (speciální případy), středová souměrnost
- délka, obvod, obsah
- krychle, kvádr, síť krychle a jiných těles
- krychlová tělesa

Vztahy.

- rovnoběžnost a kolmost přímek
- Thaletova věta (propedeutika)
- součet úhlů v trojúhelníku (propedeutika)
- vztahy o dvojicích úhlů

Činnosti.

- konstrukce ve čtvercové mříži a na čistém papíře
- měření délek, zjišťování obsahu
- měření velikostí úhlu, zjišťování velikostí úhlů
- zobrazení prostoru v rovině

ZÁVISLOSTI A PRÁCE S DATY

Pojmy.

- Vennovy diagramy
- soubor dat
- periodická posloupnost (propedeutika)

Vztahy.

- lineární závislost a její tabulace
- procesuální a konceptuální vztahy

Činnosti.

- Vennův diagram jako nástroj organizace prvků množiny
- porozumění matematizaci procesuálnímu souboru dat (např. evidence jízdy autobusu tabulkou)
- porozumění matematizaci konceptuálnímu souboru dat (např. práce se vztahy v rodokmenu)

SEŠITY C+D

ARITMETIKA A ALGEBRA

Pojmy

- římské číslice
- n -ciferné číslo, rozvinutý zápis čísla v desítkové soustavě (do řádu 10^4)
- prvočíselný rozklad
- kritéria dělitelnosti 3, 4, 9, propedeutika dělitelnosti 6, 8, 11, 12
- desetinná čísla (tisíciny až miliontiny), periodické číslo, perioda, předperioda
- zlomky (s dvoucifernými a trojcifernými jmenovateli), složený zlomek, smíšené číslo, převrácené číslo, záporný zlomek
- promile, úrok, procentová část
- číselná osa (v rozsahu výše zmíněných čísel), číslo opačné
- iracionální číslo (intuitivně)
- zaokrouhlování
- n -tá mocnina
- druhá odmocnina
- přímá a nepřímá úměrnost
- poměr, měřítko mapy
- číselný výraz
- písmeno jako: obecné číslo, proměnná, neznámá
- algebraický výraz, dvojčlen, trojčlen
- ekvivalentní úprava výrazu
- soustava dvou lineárních rovnic
- lineárních diofantických rovnic (propedeutika)
- absolutní hodnota

Vztahy.

- distributivní zákon
- $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$
- $n^{a+b} = n^a \cdot n^b$
- vztahy týkající se čtverce $S = a^2$, $a = \sqrt{S}$,
- objem krychle $V = a^3$
- trojčlenka
- $a|b$ & $a|c \Rightarrow a|(b \pm c)$
- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Činnosti.

- účelné využití kalkulátoru (např. při práci s racionálními čísly)
- zápis čísla římskými číslicemi (důraz na logiku římských zápisů)
- uspořádání množiny čísel (v rozsahu výše zmíněných čísel)

- odhady (sémantické i strukturální týkající se výrazů s více operacemi)
- zaokrouhlování
- krácení/rozšiřování zlomků (v rozsahu výše zmíněných čísel)
- sčítání a odčítání zlomků a desetinných čísel
- násobení zlomků a násobení desetinných čísel
- porovnávání zlomků a desetinných čísel (v rozsahu výše zmíněných čísel)
- dělení desetinného čísla desetinným číslem typu 7,1
- převody jednotek (obsah, objem, rychlost)
- řešení úloh o opakovaných slevách a zdraženích v procentech
- využití trojčlenky
- dělení celku v daném poměru
- využití prvočíselného rozkladu (pro nalezení nsn a NSD dvou čísel)
- využití jazyka algebry k řešení úloh
- cílené úpravy jednodušších algebraických výrazů (vytýkání, roznásobování)
- různé metody řešení (slovních) úloh: pokus-omyl, tabulace, vizualizace, využitím dělitelnosti, modelování, jazykem algebry

GEOMETRIE

Pojmy.

- trojúhelník: **osa úhlu (jako množina bodů dané vlastnosti)**, těžiště (propedeutika), kružnice opsaná a vepsaná
- čtyřúhelník (**rovnoběžník**, deltoid, nekonvexní)
- **pravidelný mnohoúhelník** (6, 8, 12), nekonvexní mnohúhelník
- **shodnost a podobnost**
- **osová souměrnost**, posunutí
- vektor (propedeutika)
- **kruh, kružnice**, poloměr, průměr, výseč
- **Thaletova kružnice (jako množina bodů dané vlastnosti)**
- Cavalieriho princip
- povrch, objem
- **hranol, jehlan** (pravidelné i nepravidelné)

Vztahy.

- **trojúhelníková nerovnost**
- součet úhlů v trojúhelníku
- **věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků**
- Thaletova věta
- **Pythagorova věta** (propedeutika)
- vlastnosti úhlopříček čtyřúhelníků

- obvod kružnice, obsah kruhu
- invarianty transformací

Činnosti.

- experimentální hledání Ludolfova čísla
- geometrická chirurgie
- konstrukce ve čtvercové mříži a na čistém papíře
- odhadování a zjišťování obsahu, objemu, povrchu

ZÁVISLOSTI A PRÁCE S DATY

Pojmy.

- množina, podmnožina, sjednocení, průnik
- pravděpodobnost
- [lineární funkce](#), její graf
- kvadratická funkce (propedeutika)
- [aritmetický průměr](#)
- kruhový a sloupcový [diagram](#)
- galerie, organizační princip galerie

Vztahy.

- kombinatorické vztahy (propedeutika)

Činnosti.

- vyjádření lineární závislosti grafem a rovnicí
- organizace souboru dat (jednoparametrické třídění, hledání organizačního principu)
- organizace souboru dat s cílem zjištění počtu jeho prvků
- analýza statistického souboru
- řešení základních kombinatorických a pravděpodobnostních úloh
- vyhledávání dat
- porovnávání souborů dat
- grafické znázorňování souboru dat
- čtení z grafů a diagramů

SEŠIT E+F

ARITMETIKA A ALGEBRA

Pojmy.

- rozvinutý zápis čísla v desítkové soustavě
- kritéria dělitelnosti 6, 8, 11, 12
- celá část čísla
- propedeutika limity
- třetí odmocnina
- mnohočlen
- lineární nerovnice
- kvadratická rovnice (propedeutika)

Vztahy.

- stav konta po n letech při $p\%$ úročení a základním vkladu C je $C \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$
- $n^{a-b} = \frac{n^a}{n^b}$
- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- délka hrany krychle $a = \sqrt[3]{V}$
- poměr typu $a:b:c$
- tranzitivita dělitelnosti

Činnosti.

- účelné využití kalkulačtoru
- uspořádání množiny čísel (v rozsahu výše zmíněných čísel)
- odhady (řádkové odhady jako propedeutika limity)
- sčítání, odčítání, násobení a dělení zlomků a desetinných čísel
- aproximace $\sqrt{2}$
- využití prvočíselného rozkladu (pro nalezení nsn a NSD více čísel)
- Euklidův algoritmus
- cílené úpravy algebraických výrazů (i dělení trojčlenu dvojčlenem)
- úprava kvadratického trojčlenu na čtverec
- různé metody řešení (slovních) úloh: pokus-omyl, tabulace, vizualizace, využitím dělitelnosti, modelování, jazykem algebry, metodou izomorfismu

GEOMETRIE

Pojmy.

- trojúhelník: těžiště, ortocentrum
- čtyřúhelník (tětivový, tečnový)
- pravidelný mnohoúhelník (5, 10)
- [Pythagorova věta](#)
- tětiva kružnice, mezikruží
- otočení, stejnolehlost
- vektor
- [válec](#), [kužel](#), [koule](#)

Vztahy.

- Pythagorova věta (důkaz)
- věta o obvodovém a středovém úhlu (propedeutika)
- charakterizace tečnového čtyřúhelníku
- vztah mezi obsahem a obvodem kruhu
- invarianty transformací

Činnosti.

- skládání a rozkládání vektorů
- geometrická chirurgie (i Cavalieriho princip)
- odhadování a zjišťování povrchu a objemu válce a kužele
- tvorba sítě rotačního válce a rotačního kužele

ZÁVISLOSTI A PRÁCE S DATY

Pojmy.

- posloupnosti aritmetická a geometrická
- periodická, rostoucí, klesající, omezená posloupnost
- funkce kosinus a sinus (propedeutika)
- vážený aritmetický průměr, [četnost znaku](#)
- kvadratická funkce, její graf
- prázdná množina
- statistický soubor

Vztahy.

- kombinatorické vztahy (propedeutika)
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Činnosti.

- posunutí grafu lineární a kvadratické funkce

- organizace souboru dat (víceparametrická třídění)
- tvorba statistického souboru, jeho evidence a jednoduchá analýza
- řešení jednoduchých kombinatorických a pravděpodobnostních úloh
- vyhledávání dat
- porovnávání souboru dat
- grafické znázorňování souboru dat
- čtení z grafů a diagramů

SEŠIT G

ARITMETIKA A ALGEBRA

Pojmy.

- desetinná část čísla
- posloupnosti (např. Fibonacciho)
- n -tá odmocnina
- zlatý řez
- soustava tří lineárních rovnic
- iracionální rovnice
- kvadratická rovnice, diskriminant

Vztahy.

- účelné využití kalkulátoru
- důkaz iracionality některých čísel \sqrt{n} .
- $n^{-a} = \frac{1}{n^a}$; $n^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$, $n^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{n}$;
- Vietovy vztahy, diskriminant

Činnost.

- řešení kvadratické rovnice
- řešení lineární diofantické rovnice
- různé metody řešení (slovních) úloh: pokus-omyl, tabulace, vizualizace, modelování, jazykem algebry, metodou izomorfismu
- řešení kombinatorických a pravděpodobnostních úloh
- aproximace iracionálního čísla

GEOMETRIE

Pojmy.

- věta o obvodovém a středovém úhlu
- kruhová úseč
- orientovaný úhel
- Gaussova křivka (propedeutika)
- izometrie
- objem a povrch koule
- pravidelné mnohostěny

Vztahy.

- věta o obvodovém a středovém úhlu (důkaz)

- charakterizace tětívového čtyřúhelníku

Činnosti.

- skládání izometrií
- tvorba sítí pravidelných mnohostěnů

ZÁVISLOSTI A PRÁCE S DATY

Pojmy.

- limita posloupnosti (propedeutika)
- geometrický průměr (dvou a tří čísel)
- funkce kosinus a sinus (pro ostrý úhel)
- funkce tangens, kotangens (propedeutika)
- permutace, kombinace, variace

Vztahy.

- nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem
- základní kombinatorické identity
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
- nekomutativita skládání funkcí

Činnosti.

- tvorba a posunutí grafu funkce
- organizace souboru dat s cílem zjištění počtu jeho prvků
- dokazování některých kombinatorických identit