

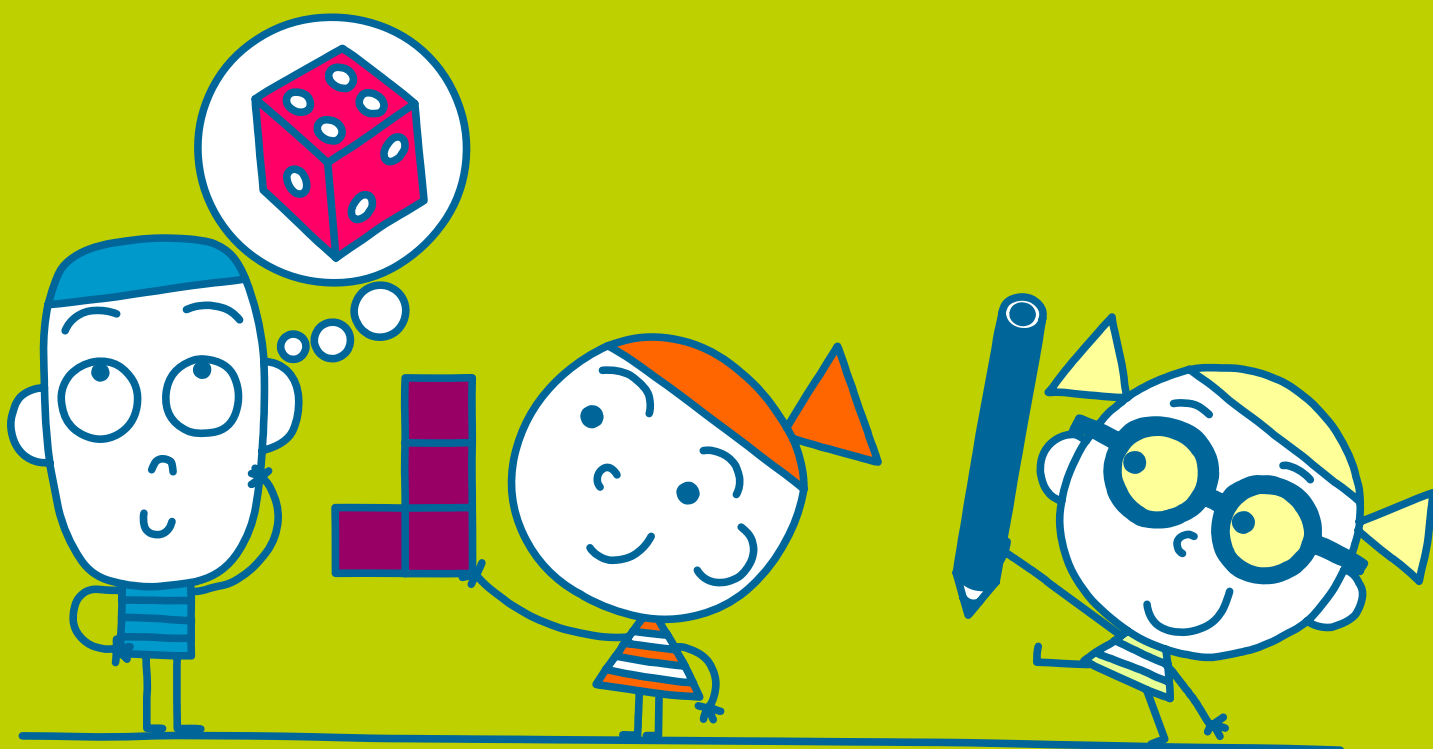


EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



DIFERENCIACE VÝUKY:

rozvoj dovednosti
pedagogické diagnostiky
ve výuce matematiky
opřený o systematické
využití gradovaných úloh
z prostředí Hejného metody
METODIKA REALIZACE



HEJNÉHO METODA

Zasloužená radost z poznávání



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



METODIKA REALIZACE

Autoři:

**Michaela Králová, Iva Kolandová, Renáta Zemanová,
Štěpán Ročák, Václav Strnad**

Kolektiv:

**Jana Bartoňová, Olga Lišková, Lucie Tomíčková, Hana Chalupská a podpoření učitelé
(nositelé inovace)**

Materiál vznikl jako výstup projektu Inovace ŠVP ve školních družinách a diferenciaci výuky matematiky na 1. stupni ZŠ s registračním číslem
CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_076/0016449

Realizátoři projektu:

H-mat, o. p. s.

Nová škola, o. p. s.

Naše velké poděkování patří všem zapojeným školám a učitelům:

Základní škola a Mateřská škola, Baška

Chrobák Tomáš

Palovská Eva

Pyšková Pavlína

Základní škola a Mateřská škola, Brno

Lazárková Romana

Mikulášková Lenka

Základní škola a Mateřská škola Dolní Břežany

Hortová Martina

Základní škola Prosperity, Nová Ves

Málková Magdalena

Základní škola a Mateřská škola Ostašov, Liberec

Michálková Tereza

Novotná Lenka

Pelcová Jiřina

Základní škola Ostrava-Hrabůvka

Dořičák Viktor

Základní škola Tomáše Šobra a Mateřská škola Písek

Hrabáková Veselá Ivana

Kučerová Miloslava

Základní škola, Praha 4

Daňková Stanislava

Plichtová Radka

Základní škola Hanspaulka a Mateřská škola Kohoutek, Praha 6

Dvořáková Iva

Chvátalová Šárka

Platzová Markéta

Sobíšková Ludmila

Základní škola Vitae, Praha

Bobáková Miroslava

Kůrka Petr

Tomešová Jana

Základní škola a Mateřská škola Vejprty

Kissová Vladimíra

Klucová Dita

1. základní škola Sedlčany

Lachoutová Naděžda

Reinischová Iveta

3. základní škola Heuréka, Úvaly

Hlaváčková Martina

Vojteková Markéta

Další velké poděkování rovněž patří **Silvii Klempererové** za grafické zpracování a sazbu a dále **Kateřině Kovaljové** za jazykové korektury.

OBSAH

ÚVOD	8
Dvanáct klíčových principů Hejného metody	9
SOUČTOVÉ TROJÚHELNÍKY	12
1. ročník	12
Homogenní a heterogenní objekty	12
Objekty x podobjekty	21
Různé konfigurace	23
Konvence	24
Komutativita	26
Přechod přes desítku	27
Zápis, jazyk	28
Velikost hodnot	28
2. ročník	29
Pozice zadaného čísla	29
Hledání více řešení	34
3.–5. ročník	35
Vztahy mezi čísly	35
Velikost hodnot	43
Soustavy (podmínky)	44
Číselný obor	49
HADI	54
1. ročník	54
Změna směru šipky	54
Parametr pozice neznámého čísla	56
Řetězení operací	58
2. ročník	59
Hadi s podmínkou	59
Operace násobení	62
Kombinace dvou operací	63
3. ročník	64
Operace odčítání	64
Operace odčítání, sčítání	65

Kombinace operací a více řešení	65
Hadi s kouzlem	68
Hadi s podmínkou	69
4.–5. ročník	71
Otevření hadi	71
Neposedové	78
Proces x koncept	82
MYSLÍM SI ČÍSLO	86
Předměty pod miskou	86
Alternativní činnosti	96
Neřetězené operace	97
Řetězené operace (aditivní, multiplikativní)	113
Myslím si dvě (tři, ...) čísla	115
Matematická kouzla	119
Přepis do rovnic a mezi prostředími	121
Soustavy dvou rovnic o dvou neznámých	126
ZLOMKY	127
1. ročník	128
2. ročník	140
3. ročník	162
4. ročník	168
5. ročník	185
GEOBOARD	189
Tvorba obrázku/obrazce	190
Tvorba geometrického útvaru	191
Obsah	208
Chirurgie obrazců	215
Obvod	219
Vysílač-přijímač/Telefon	220
Sova	221
Průřezové úlohy	222
MŘÍŽ	225
Cesta v mříži	226
Vysílač-přijímač	227
Rýsování mnohoúhelníku podle šipkového zápisu (od procesu ke konceptu)	228
Najdi v mříži bod, v němž cesta končí/začíná (od konceptu k procesu)	231

Doplnění zápisu mnohoúhelníku (od konceptu k procesu)	233
Přechod od šipkového zápisu k souřadnicovému	234
Kimova hra	234
Zavedení počátku	235
Zkrácení zápisu	237
Souřadnicový zápis	237
Konstrukce čtverců v nevodorovných polohách	238
Mřížová úsečka, střed úsečky, osa úsečky, klasifikace trojúhelníků	239
Velikosti geometrických útvarů	251
Délka úsečky	251
Obsah obrazce	255
Strategie rámování pro určení obsahu	255
Vztah mezi obsahem a obvodem	267
KRYCHLOVÉ STAVBY	270
1. ročník	270
Pojem podlaží	271
Rytmus ve stavbách	273
Práce s tabulkou	277
Neviditelné krychle	278
Plán	280
2. ročník	282
Slovo právě, přesnost jazyka	282
Proces stavby, přestavby	284
Rozvoj jazyka, hra Sova	287
Podmínka	287
Kombinatorický cíl	291
Čtenářská náročnost textu	295
Přesouvání krychlí (proces) a hledání příbuzných staveb	297
3.–4. ročník	298
Průměty	298
Překlápění stavby	301
5. ročník	308
Objem, povrch, kostra	308
Jazyky	314
Slovníček pojmů	218
Seznam použité literatury	320

ÚVOD

Milí čtenáři,

držíte v rukou metodické materiály projektu Inovace ŠVP ve školních družinách a diferenciaci výuky matematiky na 1. stupni ZŠ, které slouží jako podpůrný materiál k prohlubování matematických dovedností žáků na 1. stupni základní školy a zároveň k vašemu profesnímu rozvoji v oblasti pedagogické diagnostiky a následné diferenciaci výuky. Materiál zahrnuje 6 matematických prostředí typických pro Hejného metodu (Součtové trojúhelníky, Hadi, Myslím si číslo, Geoboard, Mříž, Krychlové stavby) a dále oblast Zlomky, které můžeme řadit jako průřezové prostředí/téma.

Každé prostředí zahrnuje obsáhlou část zaměřenou na diagnostiku, diferenciaci a následnou reedukaci vybraných úloh. Materiály prošly více jak dvouletým testováním v terénu, kdy byl učiteli ověřován diagnostický potenciál jednotlivých úloh v každém prostředí a ověřovaly se následné postupy pro diferenciaci a reedukaci.

Naším hlavním cílem bylo pomoci především učitelům podporovat rozvoj matematických dovedností žáků prostřednictvím diagnostiky, kterou zde rozumíme diagnostický potenciál vybraných úloh, na jehož základě může učitel sledovat dosavadní úroveň matematického myšlení u svých žáků. Ve chvíli, kdy je učitel schopen určit konkrétní překážky rozvoje matematického myšlení, může následně nabídnout žákům takové úlohy, které mu pomohou tyto obtíže překonat. Zároveň je připraven poskytnout žákům bez edukativních překážek takové úlohy, které je posunou a rozvinou v dané oblasti.

Diagnostická část zaměřená na konkrétní prostředí nabízí vybrané úlohy napříč celým prvním stupněm. Každá úloha (série) je doprovázena komentářem pro učitele, který zasazuje úlohu do kontextu výuky matematiky na 1. stupni ZŠ, dále obsahuje popis diagnostického potenciálu, tedy to, co můžeme na dané úloze sledovat. Jelikož byly úlohy testovány na školách v celé České republice, obsahují úlohy také konkrétní poznatky z praxe, které usnadní učitelům identifikovat obtíže žáků při řešení. Dále pak u většiny úloh nabízíme návrhy na následnou diferenciaci a reedukaci zjištěných obtíží. Abychom usnadnili učitelům následnou práci s diagnostickou úlohou, připravili jsme také druhý dokument (Baterie gradovaných úloh), který obsahuje soubor gradovaných úloh řazených podle gradačních parametrů nebo typologie úloh. Učitel může sáhnout pro úlohy do konkrétních oblastí na základě předchozí diagnostiky.

Věříme, že vám materiály poskytnou podporu pro zavedení diagnostiky a diferenciaci do vaší výuky. Vzhledem k tomu, že někteří čtenáři nemusí mít zkušenosti s výukou dle Hejného metody, uvádíme dále soupis 12 klíčových principů, podle kterých se v této metodě pracuje.

Vaši autoři

Dvanáct klíčových principů Hejného metody

1. Budování schémat

Děti ví i to, co jsme je neučili. Ví, kde mají uložené hračky nebo oblečení. Stejně tak, když se nás někdo zeptá, kde je v supermarketu, kam chodíme nakupovat, pečivo, víme to. Máme v hlavě vybudované schéma. Podle tohoto schématu si někteří mohou dokonce psát nákupní seznam, aby jim šel popořadě. Tato schémata si budujeme postupně, díky běžným denním činnostem, které děláme, a v našem vědomí jich máme celou řadu. Sám pan profesor Hejný se v mnohých přednáškách odkazuje na amerického psychologa J. R. Garricka, který tvrdí, že více než 95 % toho, co v životě skutečně potřebujeme, máme uloženo ve schématech. Z tohoto Hejný vyvozuje, že bychom měli matematické poznání budovat právě skrze schémata. Pojdme se ale nyní zaměřit na tento pojem detailněji.

Matematická schémata jsou stejně jako jiná schémata navzájem silně propojena. Například schéma pojmu racionální číslo vzniká propojením schémat pojmů přirozené číslo, zlomek, desetinné číslo a záporné číslo.

Pro vytvoření přesnější představy schématu jsou rozhodující okamžiky objevení se vnitřního rozporu. Například když dítě z 1. ročníku zjistí, že polovina je číslo, nebo když dítě ze 4. ročníku objeví, že čtyřúhelník může být i nekonvexní nebo že existuje trojúhelník, jehož obvod je libovolně velký a obsah libovolně malý. V praxi se vnitřní rozpor objevuje nejčastěji ve třídě v důsledku diskuze, ve které se projevuje různost názorů dětí.

2. Práce v prostředích

Matematických prostředí profesor Hejný a jeho tým vytvořili okolo 30. Prostředí obsahují série úloh, které na sebe vzájemně navazují a mají stejný námět. V úlohách se vyskytují různé matematické jevy. Prostředí jsou různá a každé z nich funguje jiným způsobem. Najdeme zde prostředí, která vyhovují dětem jak s auditivním, vizuálním, tak s kinestetickým stylem učení, protože jsou prostředí systematizována tak, aby zachytila nejen tyto, ale všechny učební styly. Díky opakované návštěvě dětí v těchto prostředích se s nimi seznamují, učí se v nich pracovat, budují si schéma daného prostředí a cítí se v něm bezpečně. Nerozptyluje je zde nic neznámého a mohou se tedy soustředit na výzvy a různé úrovně obtížnosti, které na ně v daném prostředí čekají. Každé nové prostředí se pomocí hry nebo diskuze vyvodí. Děti tedy potom vědí, co je v novém prostředí čeká a jak v něm pracovat. Nespornou výhodou znalosti prostředí je i to, že dítě nepotřebuje učitele k vysvětlení úlohy a může pracovat sám nebo s kamarády.

3. Prolínání témat

V matematickém světě se setkáváme s nejrůznějšími tématy (rovnice, zlomky, záporná čísla apod.). Pokud si jednotlivá témata dáváme do souvislostí, které navíc odpovídají našim vlastním zkušenostem, jsme schopni si kdykoli jednotlivý poznatek odvodit či lehce vybavit. Díky práci dětí v prostředích nejsou jejich poznatky a matematické zákonitosti izolovány. Naopak se s různými pojmy a jevy setkávají opakovaně, v různých prostředích a při řešení problému mohou volit různé strategie. Lépe se jim také vše vybavuje, protože nemají poznatek izolovaný, ale uložený v pro ně známém schématu. Například s tématem rovnic se setkávají hned v několika prostředích (Krokování, Děda Lesoň, Šipkové grafy atd.). Z toho plyne, že když je jim následně předložena rovnice o dvou neznámých, dítě si samo rozhodne, jaká řešitelská strategie pro její řešení mu nejlépe vyhovuje.

4. Rozvoj osobnosti

Většina dětí tráví ve škole více jak polovinu dne. Škola, spolužáci, vychovatelé a v neposlední řadě učitelé mají na dítě a jeho vývoj, stejně jako rodina, velký vliv. V Hejného metodě si klademe za cíl vedle rozvoje matematických dovedností zároveň také rozvoj osobnostní. Děti by měly umět argumentovat, obhájit si

svůj názor, respektovat sebe a druhé. Právě jedním z důležitých aspektů, na který profesor Hejný při tvorbě metody poukazyval, bylo budování kritického myšlení dětí a podpora jejich autonomního rozhodování. To je důvod, proč učitel v této metodě není nositelem pravdy, kterou kolem sebe šíří, ale právě děti přebírají tuto roli a tím, jak diskutují, argumentují, přemýšlí, pomáhají si a hledají různé cesty k porozumění danému tématu, se jejich osobnost rozvíjí, poznávají samy sebe, ale i druhé a morálně i sociálně rostou.

5. Skutečná motivace

O skutečné, vnitřní motivaci můžeme hovořit tehdy, pokud se sami z vlastní vůle a vlastního rozhodnutí pro něco nadchneme. Motivace je vrozená, dítě je zvědavé a má přirozenou touhu objevovat svět kolem sebe. Je to velmi důležitá součást poznávacího procesu. Dítě, které je přirozeně motivované, poznává intenzivněji a hlouběji než takové, které je k tomu stimulováno zvenčí (např. v podobě odměn, známek).

6. Reálné zkušenosti

Matematická prostředí Hejného metody vycházejí z reálných zkušeností dětí a jejich zážitků. Vezměme si třeba krychli, pro malé děti běžně pojmenovávanou spíše jako kostka, a stavbu komínů či tvorbu krychlových staveb. Skrze hru s kostkami dítě objevuje jednotlivé vlastnosti krychle a postupně se seznamuje s trojrozměrným prostorem, zároveň dochází díky zkušenostem a diskuzím i k rozvoji geometrické terminologie.

Zkušenosti jsou nepřenosné. Pokud je tedy dítě nemá, je úkolem učitele zajistit pro něj podmínky k jejich získání, ať už pomocí hry, nebo úlohy. Dítě nabývá zkušenosti i v situaci, kdy úlohu nevyřeší celou, případně ji vyřeší s chybou. Samotný fakt, že úlohu řeší, že jakkoli mentálně pracuje, je dítěti přínosný. Žádná vyučovací hodina není zbytečná, pokud je dítě aktivní.

7. Radost z matematiky

Různost matematických prostředí umožňuje uspět rozdílným typům dětí. Pokud dítě dořeší úlohu, vzniká v něm pocit radosti, úspěchu a je vnitřně motivováno pro další práci. Má radost z vlastního pokroku, z ocenění ostatních a nevzniká tak pocit strachu z matematiky. Pokud je mu předložena nová, neznámá úloha, přijímá ji jako výzvu a snaží se ji vyřešit samostatně či ve spolupráci. Pro některé děti je i malý objev či úspěšně vyřešená část úlohy důvodem k radosti, stejně tak i možnost spolupracovat s ostatními a podělit se o své nápady a objevy. Radost dětem přináší i pocit sounáležitosti a vzájemného obohacování.

Dítě, kterému jsou poznatky sděleny, nebo dokonce vnucovány, dítě, které je vedeno k reprodukci a imitaci sdělených poznatků a kterému je odepřeno nabývání vlastní zkušenosti, nebude v budoucnu ochotno ani schopno se k dalším poznatkům dopracovat vlastními silami.

V paměti si bude skládovat poučky a vzorečky a stane se z něj „intelektuální příživník“ (slova ruského psychologa A. M. Maťuščina). Jeho autonomie a potřeba poznávat, která je základem motivace, je ve skutečnosti utlumena. Urychlit poznávací proces dítěte tím, že mu sdělíme hotové poznatky, nelze. Růst kytek také nelze urychlit tím, že je každé ráno povytáhneme ze země.

8. Vlastní poznatek

Když si na něco přicházíme sami, dochází k hlubokému poznání. Pokud nám toto poznání někdo předá jako hotové, je pro nás taková informace převzatá, náš poznatek je formální a ukládá se většinou pouze do krátkodobé paměti. Dítě si vlastní poznatek buduje tím, že získává celou řadu zkušeností s konkrétním matematickým pojmem nebo jevem. Diskutuje o něm s kamarády a vysvětluje jim svoji teorii, kterou následně ověřuje na další úloze.

Cestu k objevu v matematice lze shrnout do modelu:

ZKUŠENOST → MATEŘSKÝ JAZYK → MATEMATICKÝ JAZYK.

9. Role učitele

Role učitele je v Hejného metodě odlišná. Vystupuje spíše v roli průvodce, moderátora diskuzí, rovného partnera a rádce než v roli nositele pravdy a někoho, kdo všechno ví a nechybuje. Učitel nic nevysvětluje, nehodnotí efektivnost daného postupu, pobízí děti k hledání nových řešení, jiných strategií, zadává úlohy, které diferencuje, řídí diskuze a raduje se s dětmi z nových objevů. Právě tato nová role je pro učitele začínajícího učit podle Hejného metody nejnáročnější. Akusticky se upozadit a dát důvěru dětem není pro každého jednoduché, ale pokud to učitel dokáže, brzy spatří efekt.

Během svých příprav učitel nepromýšlí výklad. Promýšlí úlohy, prostřednictvím kterých pomůže dítěti, aby pochopilo. Pracuje s různorodostí dětí. Proto se učí připravovat tzv. gradované úlohy, tedy úlohy různé obtížnosti, aby vyhověl všem mentálním skupinám dětí ve své třídě. Učí se najít k úloze v učebnici úlohu nižší nebo vyšší obtížnosti.

10. Práce s chybou

Chyba je naprosto přirozený jev, který se běžně vyskytuje. Pokud by neexistovalo, nic bychom se nenaučili. Ve společnosti bývá mnohdy chyba vnímána jako něco negativního, za co by se měl člověk cítit provinile. Neuvedomujeme si, že toto se může přenášet i na děti, které se pak bojí chybu přiznat. Práce a role učitele je v této chvíli zcela zásadní. Pokud se ve třídě objeví chyba, vítáme ji a bereme si z ní společně ponaučení. Diskutujeme nad tím, jak jsme se chyby dopustili. Pouhé označení chyby nikam nevede, podstatné je najít její původ. Teprve pak se jí přístě vyvarujeme. Pro děti je důležité, aby chybu přiznával i učitel. To vše buduje mezi ním a dítětem pouto důvěry a pocit bezpečí. Důležité je takto s chybou pracovat nejen v matematice, ale i v jiných předmětech.

11. Přiměřené výzvy

Běžně se učitelé musí vypořádat s velikou diverzitou dětí ve třídách, a to jak věkovou, tak intelektuální. Není výjimkou, že se v jedné třídě potkávají děti nadané a zároveň děti vyžadující specifický přístup a podporu. Úkolem učitele je poskytnout všem těmto dětem odpovídající úlohy, které jsou přiměřené jejich potřebám a zároveň je rozvíjí. Velmi efektivním nástrojem učitele pro tuto diferenciaci jsou gradované úlohy, díky nimž může zažít úspěch každé dítě.

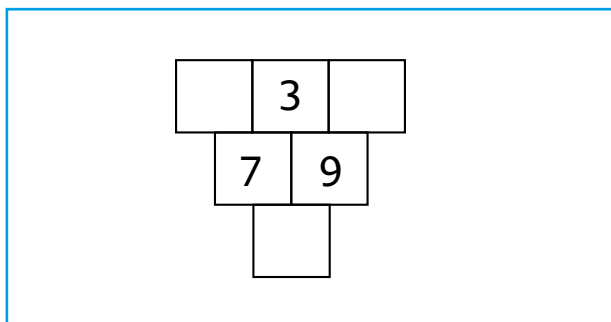
Pro děti bývá často těžké něco, co je pro dospělé naprostou samozřejmostí. Dospělí někdy předčasně na děti tlačí a vnucují jim své postupy. Na druhou stranu se ukazuje, že děti jsou schopny už na 1. stupni uvažovat o věcech, které po dospělých nikdy nikdo nechtěl a které tak mohou právě dospělým připadat nepřiměřeně obtížné.

12. Podpora spolupráce

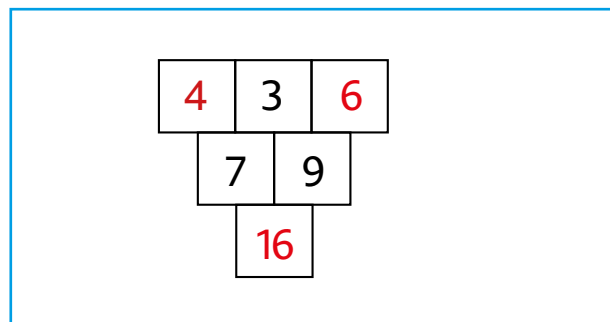
Většina poznatků se rodí při diskuzi. Díky ní si tříbíme myšlenky, pokládáme si navzájem otázky, společně o nich přemýšlíme. Pracovat s někým ve dvojici nebo v týmu není pro každého jednoduché, přesto je tato dovednost v dnešní společnosti velmi žádoucí. Učitel by měl podporovat ve třídě různé organizační metody a formy práce, aby měly děti možnost zažívat jak samostatnou činnost, tak spolupráci. Ne každému vyhovuje práce ve skupině. I přesto, že některé děti skupinové činnosti spíše přihlížejí, jsou jejich názory následně velmi cenné v diskuzi. Mnohdy se stává, že i během řešení se samostatně pracující dítě nakonec k někomu připojí, protože je zaujaté skupinovou diskuzí. Díky spolupráci se mezi dětmi rozvíjí pozitivní klima a ochota vzájemně si pomáhat. Často se stává, že děti vyhledávají pomoc u stále stejných kamarádů, což může být dáno jejich vzájemnou komunikací, „mluví stejným jazykem“. Nebojí se k někomu přijít a nahlédnout na jeho řešení, klást otázky. Vzhledem k atmosféře ve třídách a vztahům, které mezi sebou děti mají, se běžně objevuje, že se děti podporují a mají radost nejen ze své práce, ale i z práce ostatních.

SOUČTOVÉ TROJÚHELNÍKY

Ukázka úlohy:



Řešení úlohy:



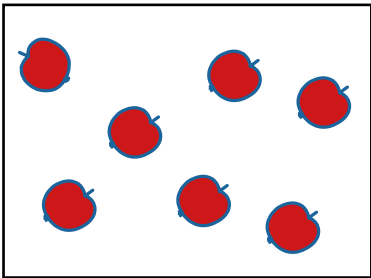
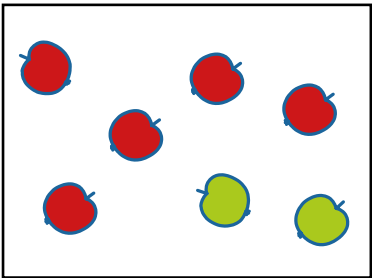
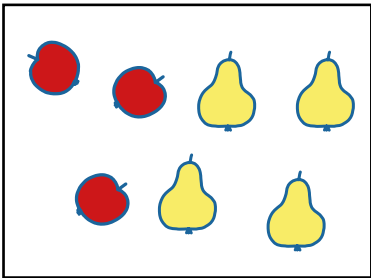
Prostředí Součtových trojúhelníků umožňuje žákům **poznávat provázanost aditivních operací** – tedy sčítání a odčítání. Například v uvedené úloze máme v levém horním rohu součtového trojúhelníku aditivní triádu tří čísel 4, 3, 7. Když dvě z čísel necháme v zadání a jedno z nich odstraníme, můžeme získat tři různé početní úlohy: $7 - 3 = 4$, $7 - 4 = 3$ a $4 + 3 = 7$. Kromě tohoto základního pravidla je v této struktuře přítomno mnoho dalších vztahů, které platí obecně mezi políčky každého součtového trojúhelníku. **Odhalování a zdůvodňování těchto zákonitostí** představuje skutečnou práci matematika, kterou zde mohou žáci na své úrovni zažívat. Prostředí je také vhodné pro diagnostikování a otevírání **nových číselných oborů** – racionálních čísel (desetinná čísla a zlomky) a záporných čísel.

1. ročník

Homogenní a heterogenní objekty

V 1. ročníku se žáci učí sčítat a odčítat. Obojí se nejprve provádí v **sémantickém jazyce** (s objekty, které žáci znají z každodenního života). Následující série ukazuje možnosti gradace, přičemž první situace pracuje s homogenními objekty, druhá a třetí již se slabou heterogenitou (nejprve rozlišujeme dvě barvy jablek, následně rozlišujeme dva druhy ovoce).

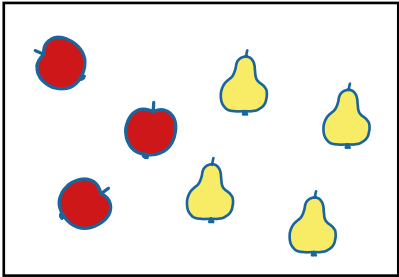
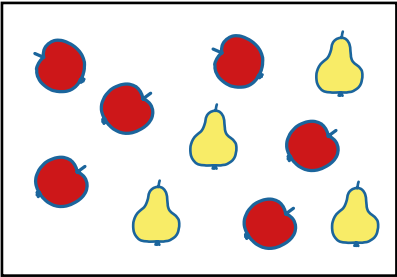
Úloha:

Zapiš počet.	Zapiš počet.	Zapiš počet.
		
		

Komentář pro učitele:

Některý žák zapíše počet všech objektů číslicí, jiný žák rozliší heterogenní objekty a zapíše dvě číslice, jiný bude evidovat počet jablek a hrušek pomocí barevných nebo jednobarevných čárek. To ukazuje, že každý z žáků vnímá úlohu jinak, přičemž jeden již sčítá heterogenní objekty, druhý pouze homogenní (stejně). Obě řešení jsou správná, rozdílnost řešení je dána pouze různým vnímáním situace. Pro učitele je toto dobrá diagnostika, na jaké úrovni vnímání žáci jsou. Protože ani jedno z řešení není chybou, nemusí se přistoupit k žádné reedukaci. Postupně budou žáci sčítat i heterogenní objekty. Tomu lze pomoci např. takovou úlohou, kde žáci nejprve zvlášť evidují jablka a hrušky, poté je sčítají dohromady, čemuž napomáhá **písmeno D** (učitel s žáky vykomunikuje, že to znamená dohromady).

Úloha:

Zapiš počet.	Zapiš počet.																
																	
<table border="1" style="margin: auto;"><tr><td style="text-align: center;"></td><td style="width: 40px; height: 20px;"></td><td style="text-align: center;"></td><td style="width: 40px; height: 20px;"></td></tr><tr><td style="text-align: center;">D</td><td colspan="3"></td></tr></table>					D				<table border="1" style="margin: auto;"><tr><td style="text-align: center;"></td><td style="width: 40px; height: 20px;"></td><td style="text-align: center;"></td><td style="width: 40px; height: 20px;"></td></tr><tr><td style="text-align: center;">D</td><td colspan="3"></td></tr></table>					D			
																	
D																	
																	
D																	

Pro upřesnění doplňujeme, že v učebnicích žáci sčítají pouze slabě heterogenní objekty, tzn. sčítají objekty, které mají společné nadřazené pojmenování: např. jablka a hrušky – ovoce. Silně heterogenní objekty (např. slon a jablko) nesčítají, protože k tomu nedochází ani v běžném životě.

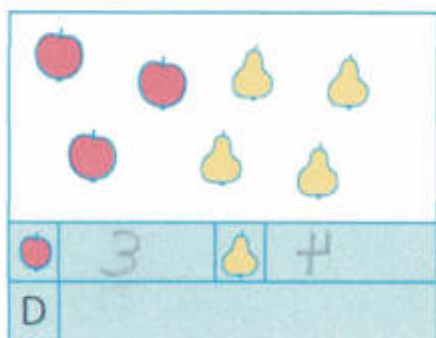
Chceme sledovat:

- jakým jazykem budou žáci objekty evidovat (číslice, čárky, puntíky),
- zda se v evidenci promítne barva.

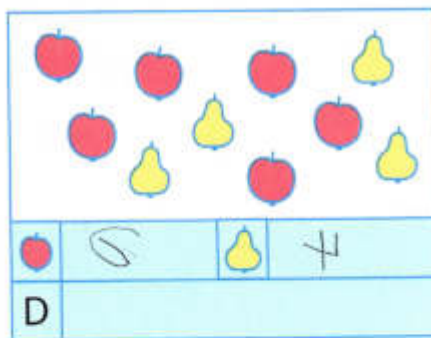
Poznatky:

- Někteří žáci evidovali počet odděleně, což naznačuje vnímání heterogenních objektů. Velmi záleží na způsobu formulace zadání ze strany učitele a vůbec jeho přítomnosti (zda učitel úlohu komentuje slovně a zdůrazní, že se ptáme, kolik je na obrázku dohromady ovoce, nebo zda se k tomu nijak slovně nevyjadřuje a žáci pracují podle porozumění zadání). Způsob žákovské evidence ukazuje jeho aktuální úroveň vnímání kvantity i heterogenity. Předpokládáme jeho postupný přirozený vývoj, žádná reedukace v tomto případě tedy není nutná.

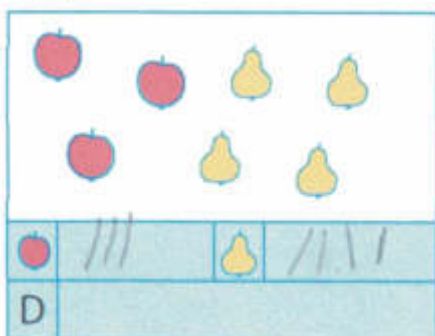
Zapiš počet



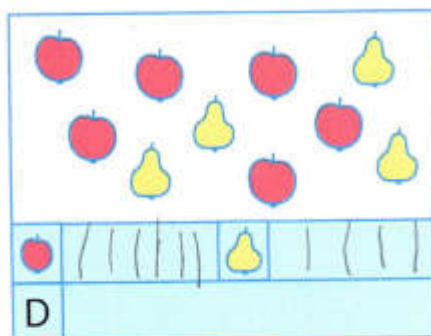
Zapiš počet



Zapiš počet



Zapiš počet



Náročnější situace může nastat, pokud jsou objekty již umístěny do **struktury**. První série pracuje se sémantickými objekty, druhá se již posouvá k jinému jazyku (tečky), pomalu tedy **směřujeme k abstrakci**, kterou bude reprezentovat jazyk čísel.

Úloha:

Komentář pro učitele:

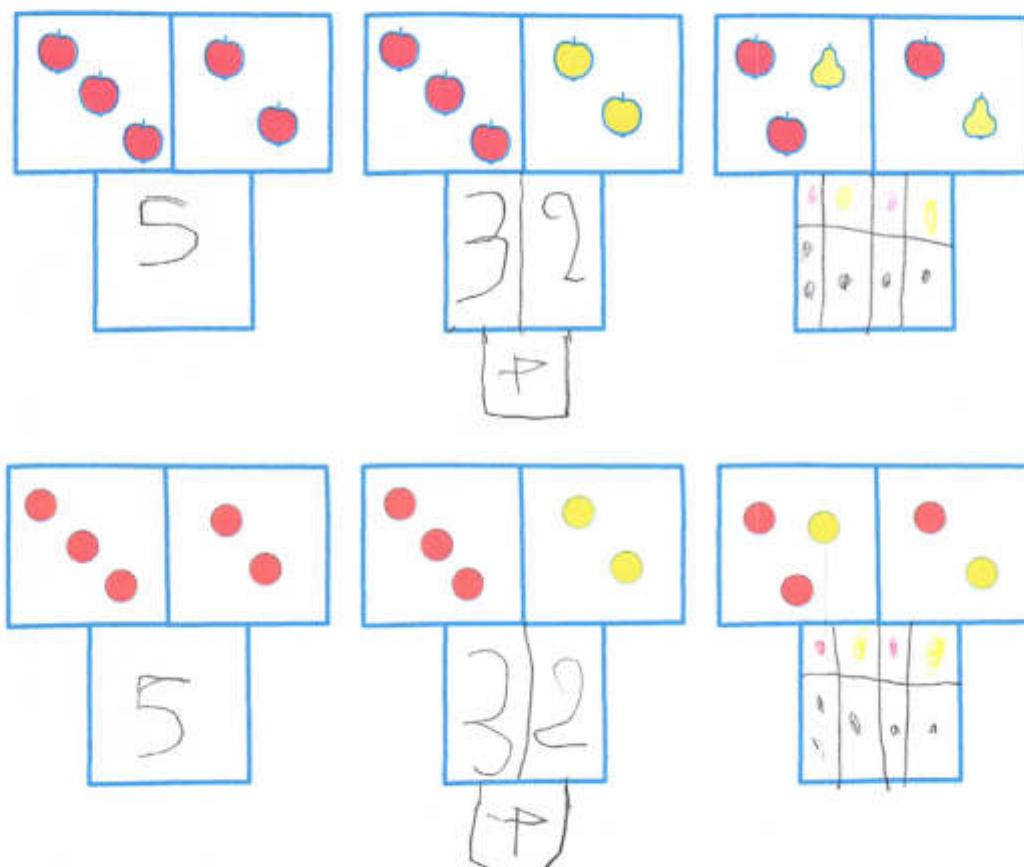
Opět se může stát, že jeden žák napíše všude 5 (ať číslicí, čárkami, nebo jiným způsobem), tedy vnímá všechny úlohy jako homogenní, jiný žák bude ve druhém a třetím trojúhelníku zvlášť evidovat červená a žlutá jablka (tečky). Reedukace v tomto případě opět není nutná.

Chceme sledovat:

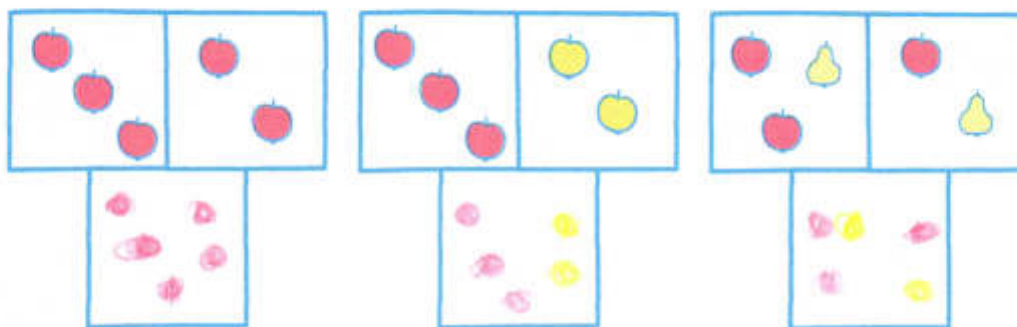
- jakým jazykem budou žáci objekty evidovat (číslice, čárky, puntíky),
- zda se v evidenci promítne barva,
- zda bude někdo z žáků vnímat úlohy jako stejné.

Poznátky:

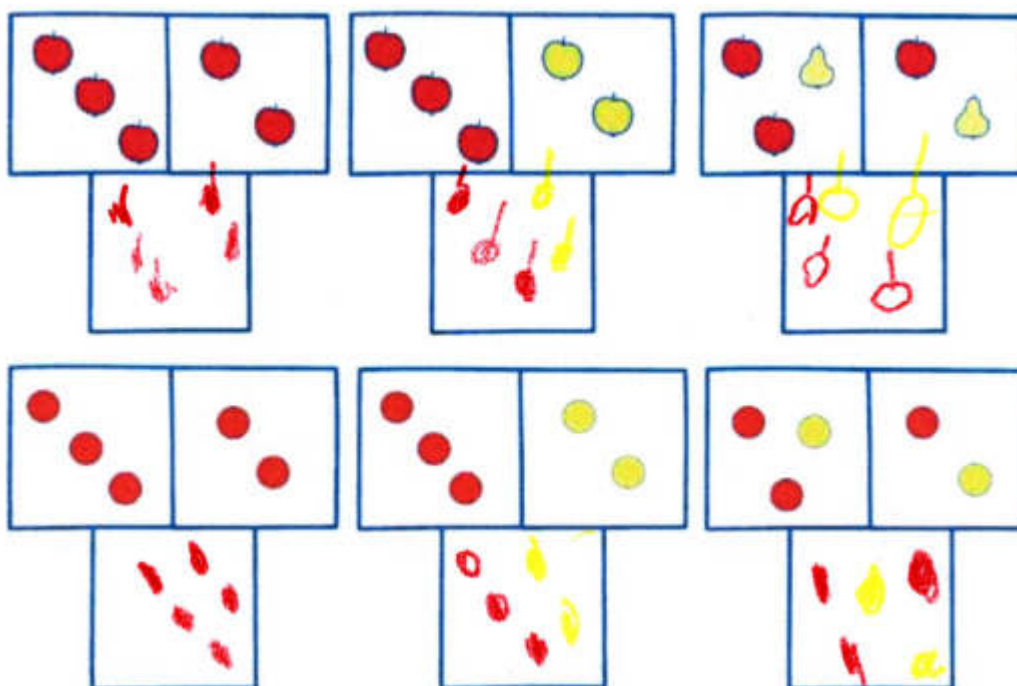
- Objevila se evidence pomocí teček, čárek, číslic, u některých žáků docházelo ke kombinaci těchto jazyků.
- Někteří žáci rozlišují v evidenci barvy při zachování jazyka teček.
- Někteří žáci zachovali identickou konfiguraci, jiní pracovali s vlastním uspořádáním.
- Objevily se numerické chyby, zřídka chybné zapsání vizuální podoby číslice. Tyto chyby učitel opravuje, zejména na tabuli. Stejně tak opravují grafickou podobu číslice i žáci.
- Ojediněle došlo k tomu, že žáci vnímali tyto tři úlohy jako izomorfní (stejně), což přímo komentovali učiteli.
- Následující ukázka řešení dokladuje různé uchopování úloh ze strany jednoho žáka. Zde je zajímavé pozorovat zejména uchopování druhé a třetí úlohy, kde můžeme vidět dva fenomény: jedním je evidence počtu v podobě čísla (přechod k abstrakci), druhým je vnímání heterogenity (žák nechce sčítat dohromady dvě barvy). Velmi zajímavým prvkem je využití tabulkové evidence pro záznam počtu v poslední úloze. Otázkou je, proč i v tomto případě nedošlo k zápisu pomocí čísla, když byl parametr barvy potlačen. Pravděpodobně došlo ke spotřebování kognitivní energie na tvorbu tabulky (došlo k vytvoření kódu za účelem třídění):



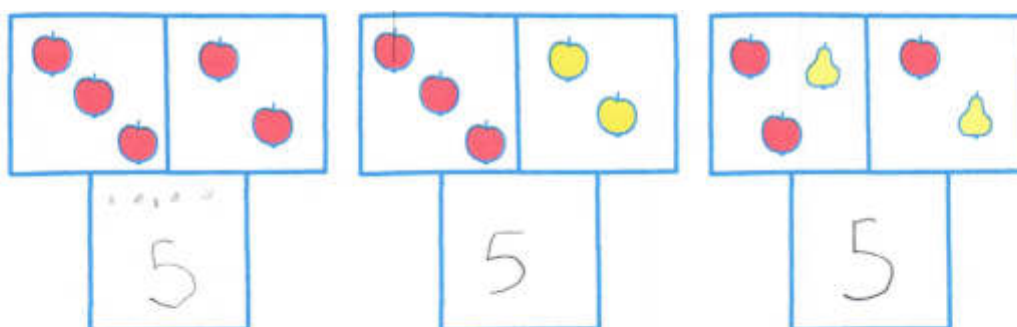
Další ukázky řešení:

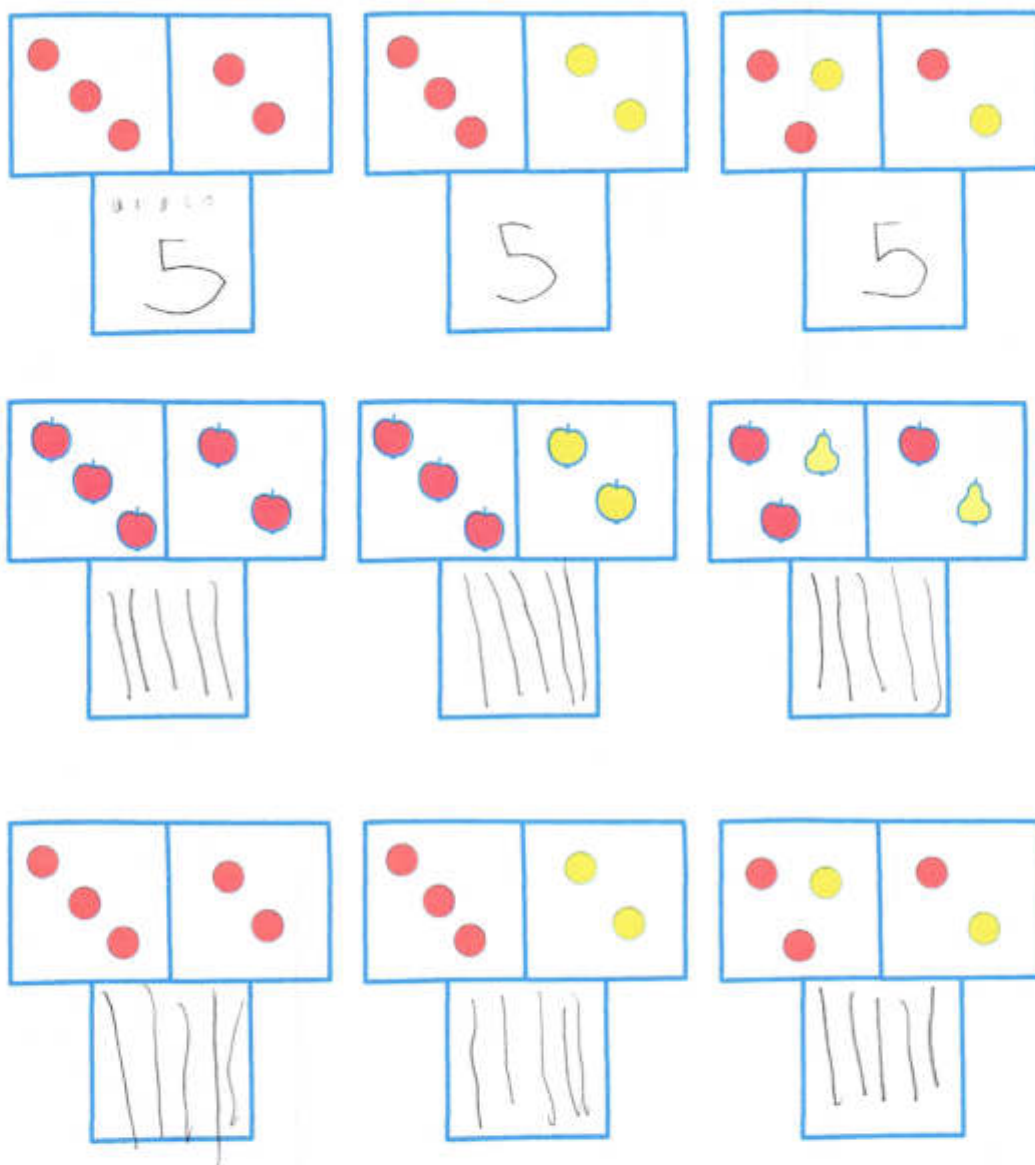


- U následujícího řešení je zjevný identický přenos objektů se zachováním konfigurace. V rámci diagnostiky se můžeme ptát, zda takový žák sčítá či nikoliv. Možností je nechat žáka komentovat jeho způsob řešení, případně ho vyzvat k modelování situace např. pomocí barevných víček nebo přímo položit otázku, která se ptá na počet objektů (jablek, teček).

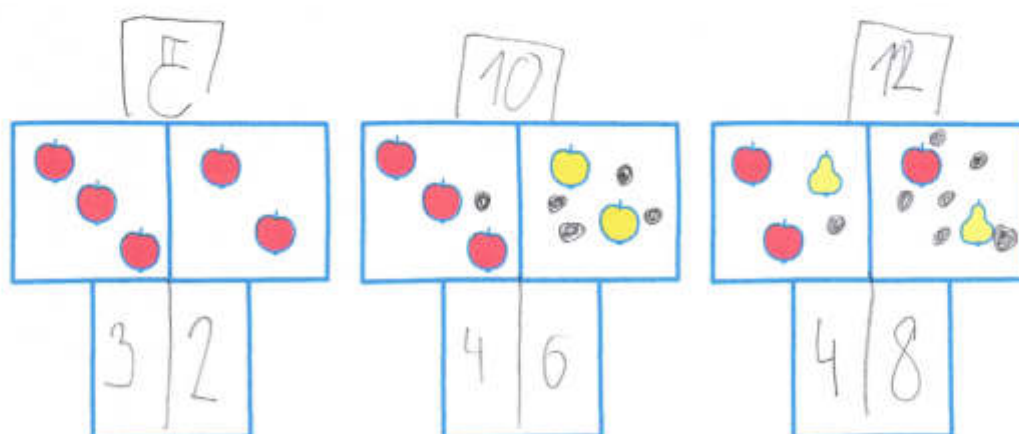


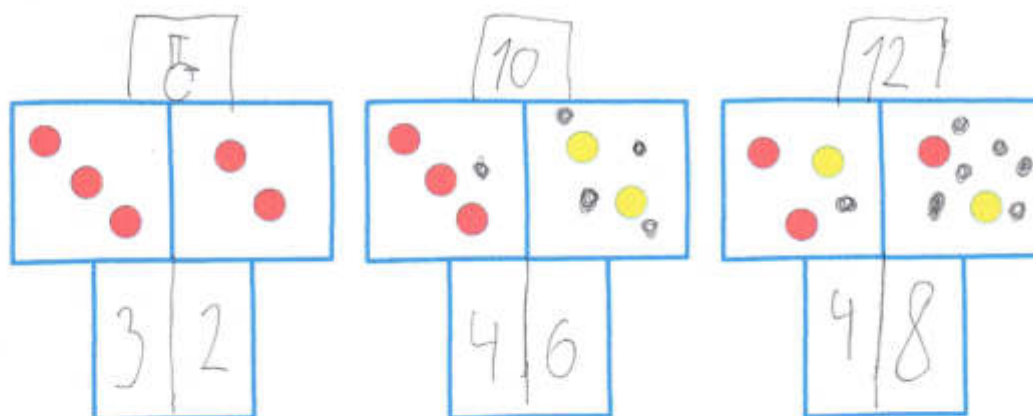
- Pokud žáci evidovali počet pomocí teček, pak hodnotu 5 zaznamenávali často v konfiguraci, která je shodná s tou na hrací kostce.
- Objevili se i žáci, kteří upozornili, že jsou všechny úlohy stejné.





- U následující série řešení jednoho žáka je zjevné volání po obtížnějších úlohách a větším počtu objektů, a to vlastní úpravou zadání. Je patrné, že obě série vnímá jako totožné, proto je také upravuje stejným způsobem. Dále je zjevná naprostá abstrakce, jelikož nedokresluje konkrétní objekty, ale pouze zástupné symboly, přičemž neřeší barvu. Zajímavá je postupná evidence počtu – nejprve přepis jednotlivých polí do čísel, následně součet eviduje nikoli dolů, ale opačně. Neznáme přesný důvod, proč toto vzniklo.

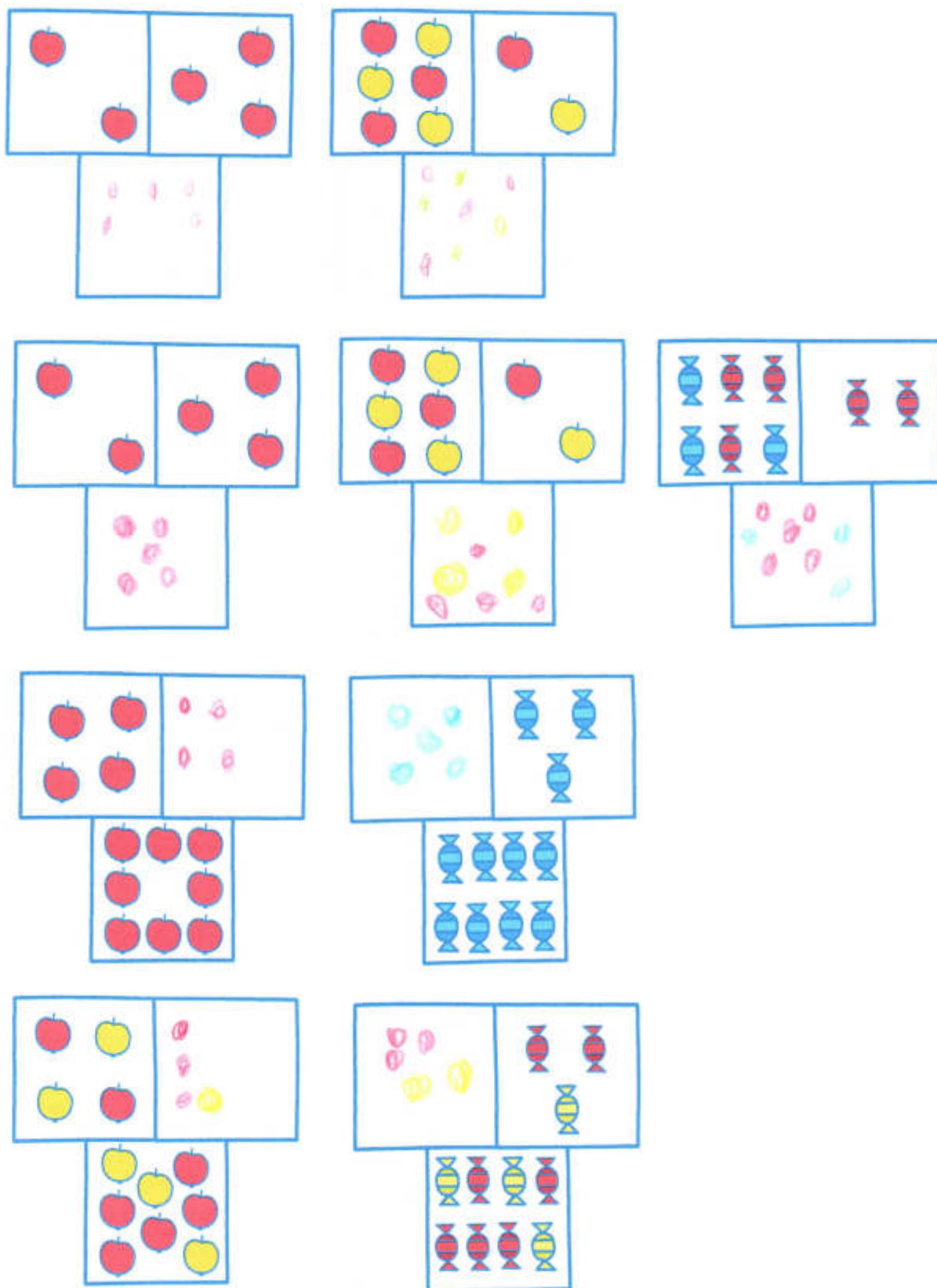




Úloha:

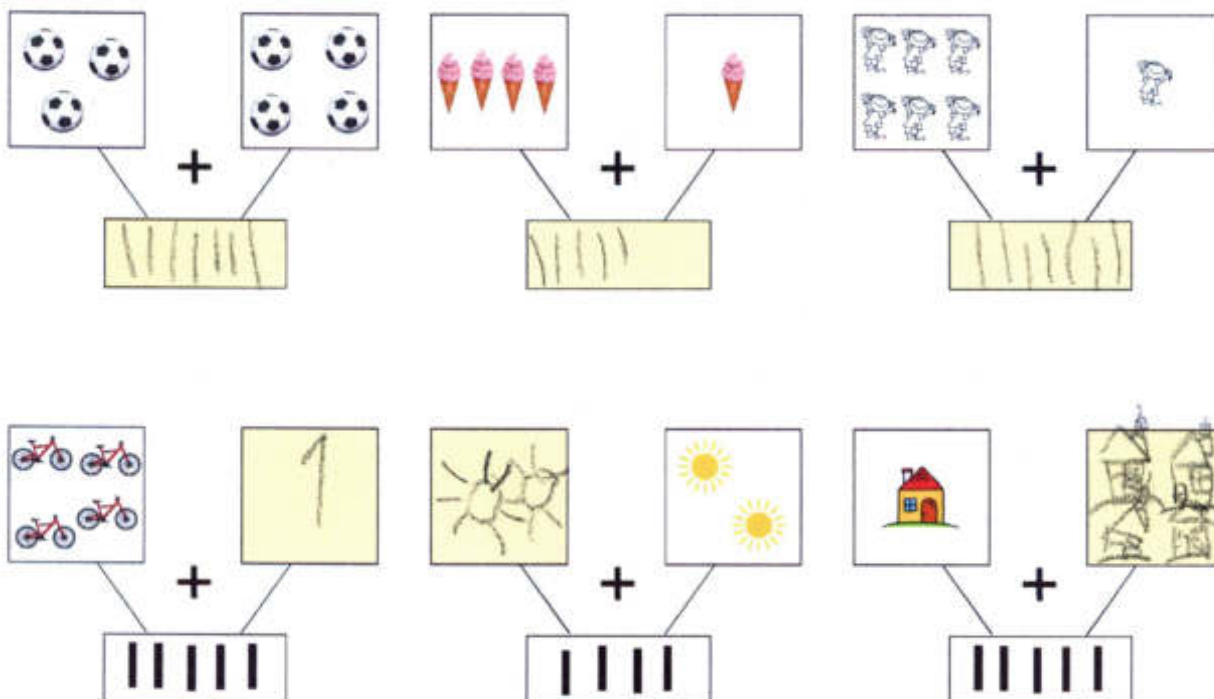
Poznátky:

- Většina žáků zohledňuje parametr barvy do svého řešení.
- Objevoval se přenos identické konfigurace objektů.
- Poslední tři úlohy jsou pro žáka náročné, jelikož proces řešení tvoří několik kroků. Nejprve si žák potřebuje určit počet objektů dané barvy v posledním poli. Dále určuje počet stejných objektů v horním poli a následně dopočítává a zakresluje tento počet. Stejný proces následně opakuje pro další objekty. Z tohoto důvodu lze tyto úlohy vnímat jako obtížnější než úlohy zadané v číslech.



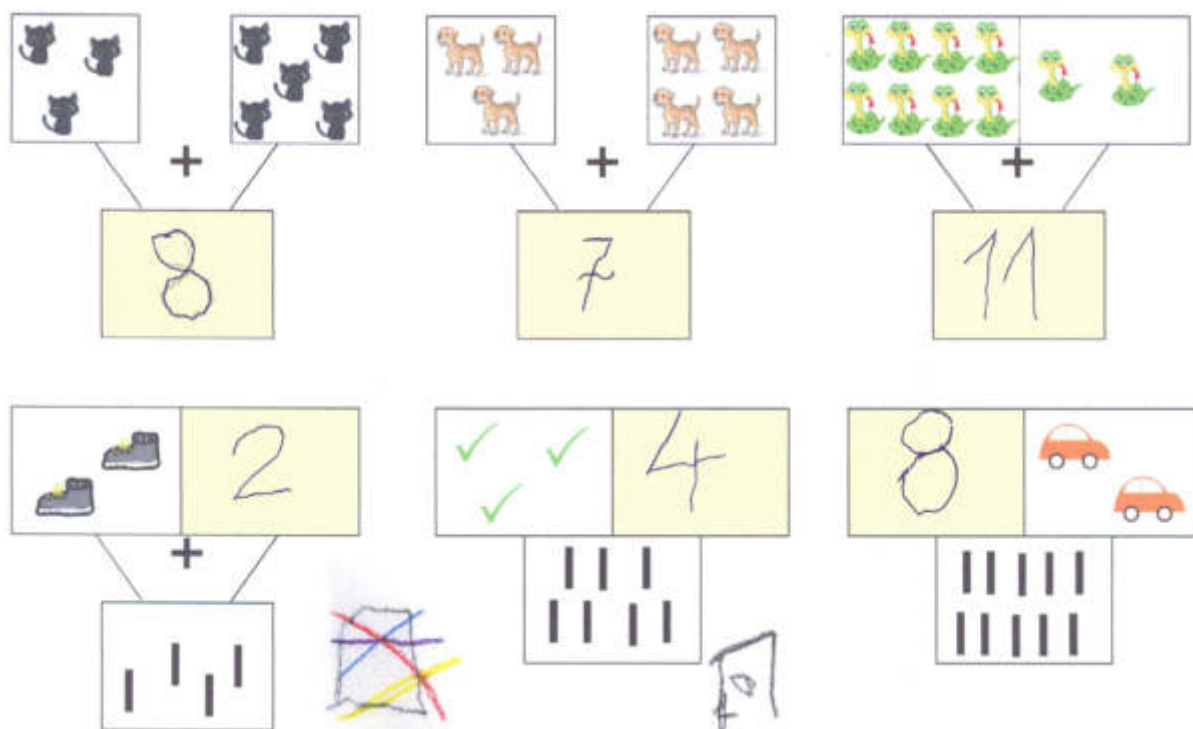
Následná diferenciacie, reedukace:

- Pokud vidíme řešení zapsané v číslech, lze zadat příště takovým žákům úlohu také v číslech a sledovat proces řešení.
- Několik žáků mělo problém s konvencí a místo dopočítávání sčítali objekty, které viděli, a součet zapsali do volného pole. Jako reedukační nástroj může učitel využít oporu o vyřešenou úlohu a její slovní komentování. Dále se osvědčily úlohy níže, které vizuálně podporují fungování struktury (tedy které hodnoty se sčítají a kam se jejich součet eviduje).

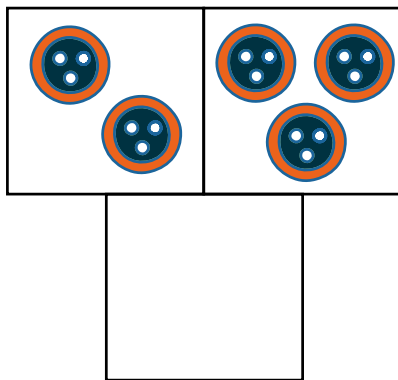


Pro ještě silnější vizualizaci sčítání lze čáry nahradit šipkami směřujícími k dolním polím, což umocní vnímání procesu sčítání směrem dolů.

- U následující druhé reedukační série dochází již u posledních dvou úloh k potlačení vizuální podpory sčítání a přechodu k čisté struktuře.



Objekty x podobjekty



Komentář pro učitele:

Stejně jako u sčítání homogenních či heterogenních objektů dochází k podobným situacím při vnímání objektů a jejich podobjektů. Např. v součtovém trojúhelníku na obrázku jsou nakresleny v levém poli dva koláče (každý má tři mandle), v pravém poli tři koláče (každý má také tři mandle). Většinou se ve třídě objeví žák, který napíše do spodního pole 15 (15 mandlí). Takový žák si všímá podobjektů. Pro učitele to je signál, že takový žák potřebuje náročnější úlohy, chce pracovat s většími čísly. Pokud žák eviduje „pouze“ koláče, není to chyba. Proto opět není třeba žádná reedukace. Vnímání podobjektů u takových žáků přijde později díky diskuzím ve třídě. Je zajímavé, že žáci v některých úlohách podobjekty evidují, v jiných ne. To může být dobrý předmět k diskuzi. Zde uvádíme několik případů, kde je možné podobjekty evidovat.

Úloha:

Zapiš počet.

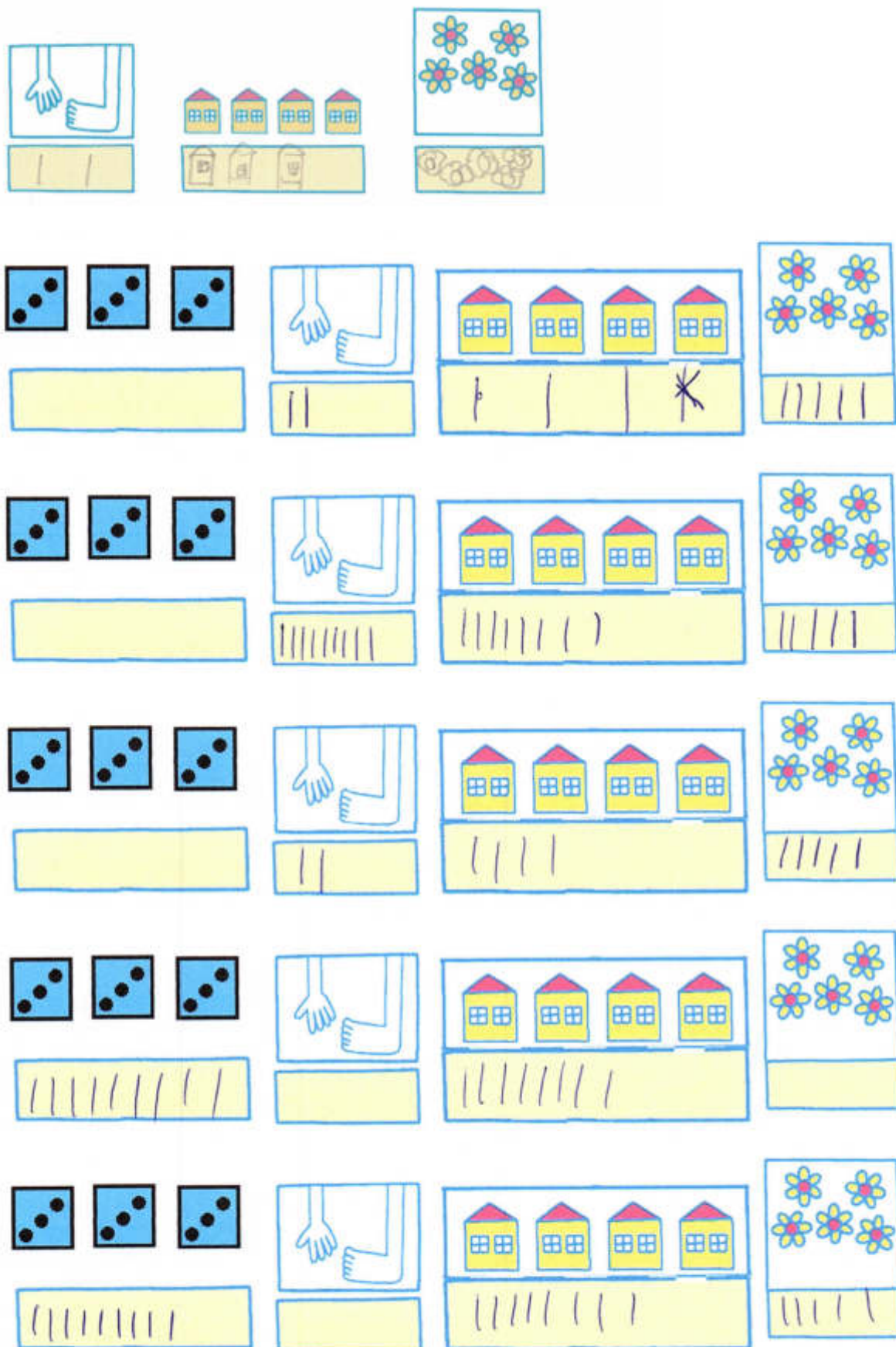


Chceme sledovat:

- zda žáci podobjekty vnímají,
- jak bude probíhat evidence počtu.

Poznátky:

- Evidence podobjektů se objevovala často.
- K evidenci počtu využívali žáci čárky a tečky. Objevil se také přenos obrázku jako takového.



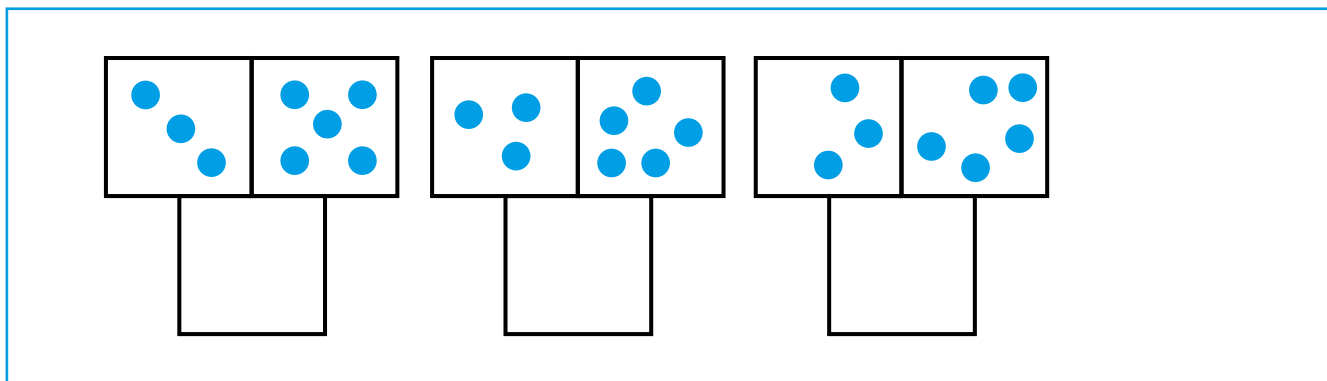
Následná diferenciacie, reedukace:

- Tato série byla zadána s následující sérií tří trojúhelníků v jazyce teček. Ukázalo se, že někteří žáci, kteří byli schopni evidovat podobijektu nebo zvládali první sérii bez obtíží, nedokázali řešit úlohu ve struktuře v jazyce teček. To potvrzuje jejich silnou vázanost na sémantiku.

Různé konfigurace

V praxi se ukazuje, že ne všechny konfigurace objektů vnímají žáci na stejné úrovni. To lze popsat na následující sérii.

Úloha:



Komentář pro učitele:

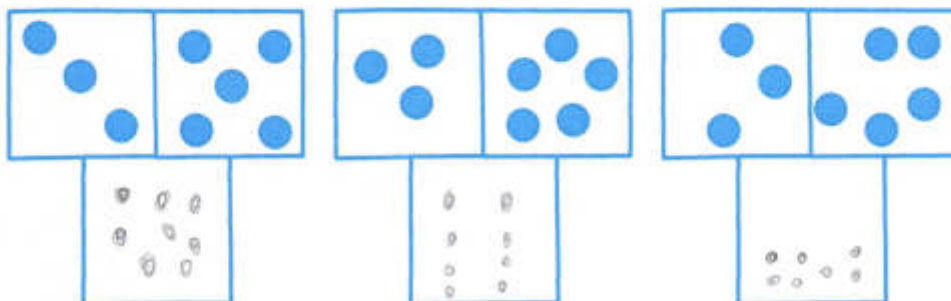
Ve všech třech úlohách je **stejný počet objektů, ale v každé z úloh jsou tečky v jiné konfiguraci**. V první úloze jsou konfigurace, které žáci znají z hrací kostky, druhá i třetí jsou náhodně vytvořeny (nejsou z hrací kostky).

Chceme sledovat:

- jaké konfigurace žákům dělají potíže, jaké naopak ne,
(Pravděpodobně zde bude hrát důležitou roli životní zkušenost žáků. Žáci, kteří hrají např. hry s kostkami, by takové konfigurace měli důvěrně znát a měli by s nimi umět i dobře počítat.)
- jak žáci uchopují počet (pouze vizuálně, pomocí prstů, manipulací, ...),
- zda si žáci všimnou, že jsou úlohy početně stejné.

Poznátky:

- Neobjevily se žádné potíže s touto sérií, žáci evidovali počet čísly, tečkami nebo čárkami.
- Někteří žáci po vyřešení komentovali, že jsou úlohy stejné, protože to pořád vychází stejně.
- U následujícího řešení je zjevné, že pro daného žáka je naopak každá úloha zcela jiná, což soudíme na základě odlišných konfigurací. Poslední úloha je navíc vyřešena chybně.



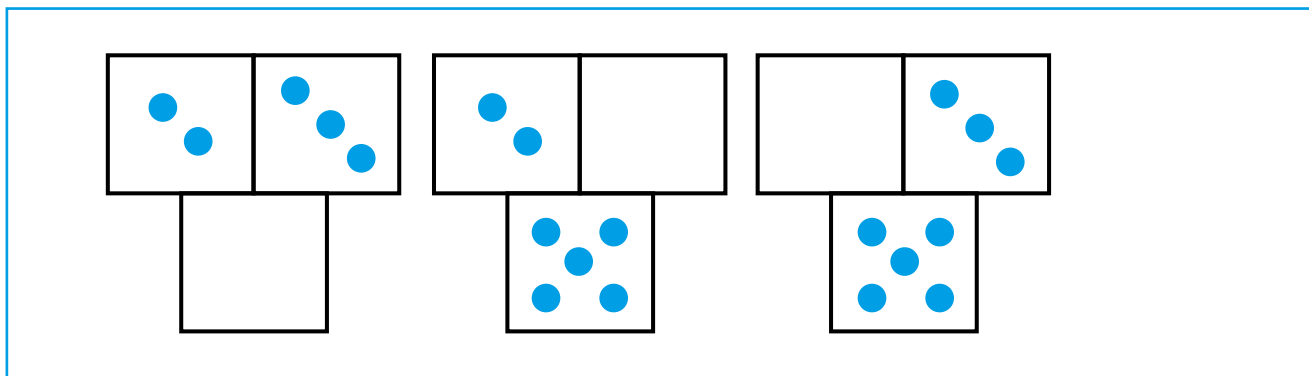
Následná diferenciací, reedukace:

- Učitel nabízí žákům úlohy s různými konfiguracemi. Při chybě je reedukace jednoduchá – necháme žáka zdůvodnit své řešení, tím většinou sám chybu objeví. Případně necháme žáky diskutovat mezi sebou s výzvou, aby si zkontrolovali svá řešení.

Konvence

Otázku konvence je vhodné s žáky **vyřešit co nejdříve**. Praxe ukazuje, že v prostředí Součtové trojúhelníky k chybám v konvenci dochází v počátcích pravidelně. Důvod si ukážeme na následující sérii tří „stejných“ úloh.

Úloha:



Komentář pro učitele:

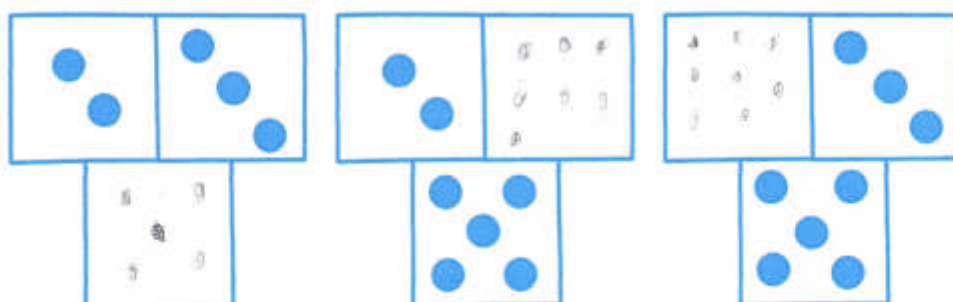
Žák např. u posledního trojúhelníku napíše do levého horního pole 8 teček nebo číslo 8. Příčina je jasná, žák tečky sčítal namísto odčítání (nebo dopočítávání). V úvodních úlohách se součtovými trojúhelníky silně převažují úlohy na sčítání, protože úkolem žáků je doplnit počet objektů do spodního pole (odčítání přichází jako náročnější operace později). Proto žáci sčítají i v takovýchto úlohách, aniž by si uvědomili, že pozice prázdného pole je jiná. Nutno podotknout, že nejde o chybu matematickou, ale konvenční (komunikační, jazykovou). Reeducace spočívá v návratu k jednoduchým úlohám s vizuální podporou (viz reedukační série zmiňované výše), případně využití manipulace nebo dramatizace, což má ovšem svá úskalí. Pokud si žáci konvenci upevní na dvouúrovňových trojúhelnících, posléze již s tímto potíže nemívají.

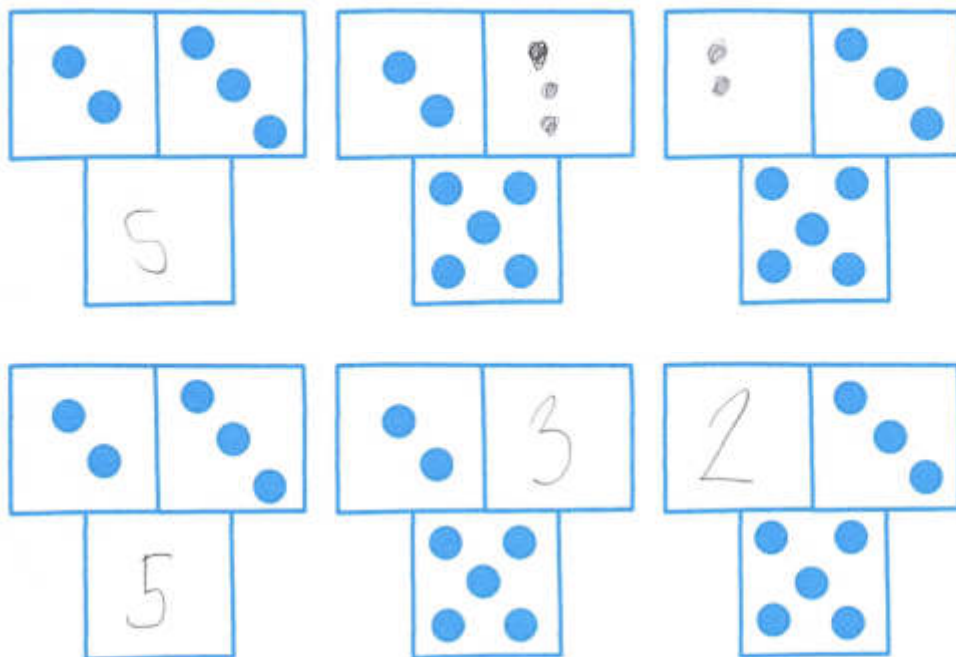
Chceme sledovat:

- zda dochází k chybě v konvenci,
- v jakém jazyce (tečky, čísla) budou žáci úlohy řešit,
- jakou budou žáci využívat řešitelskou strategii.

Poznátky:

- Chyba v konvenci byla velmi častá. Potvrdilo se, že žáci u druhé a třetí úlohy sčítají hodnoty, které vidí. U některých se tento jev kombinoval s numerickou chybou.
- Co se týče matematického jazyka, většina žáků evidovala počet v jazyce teček, spíše ojediněle se objevila čísla.



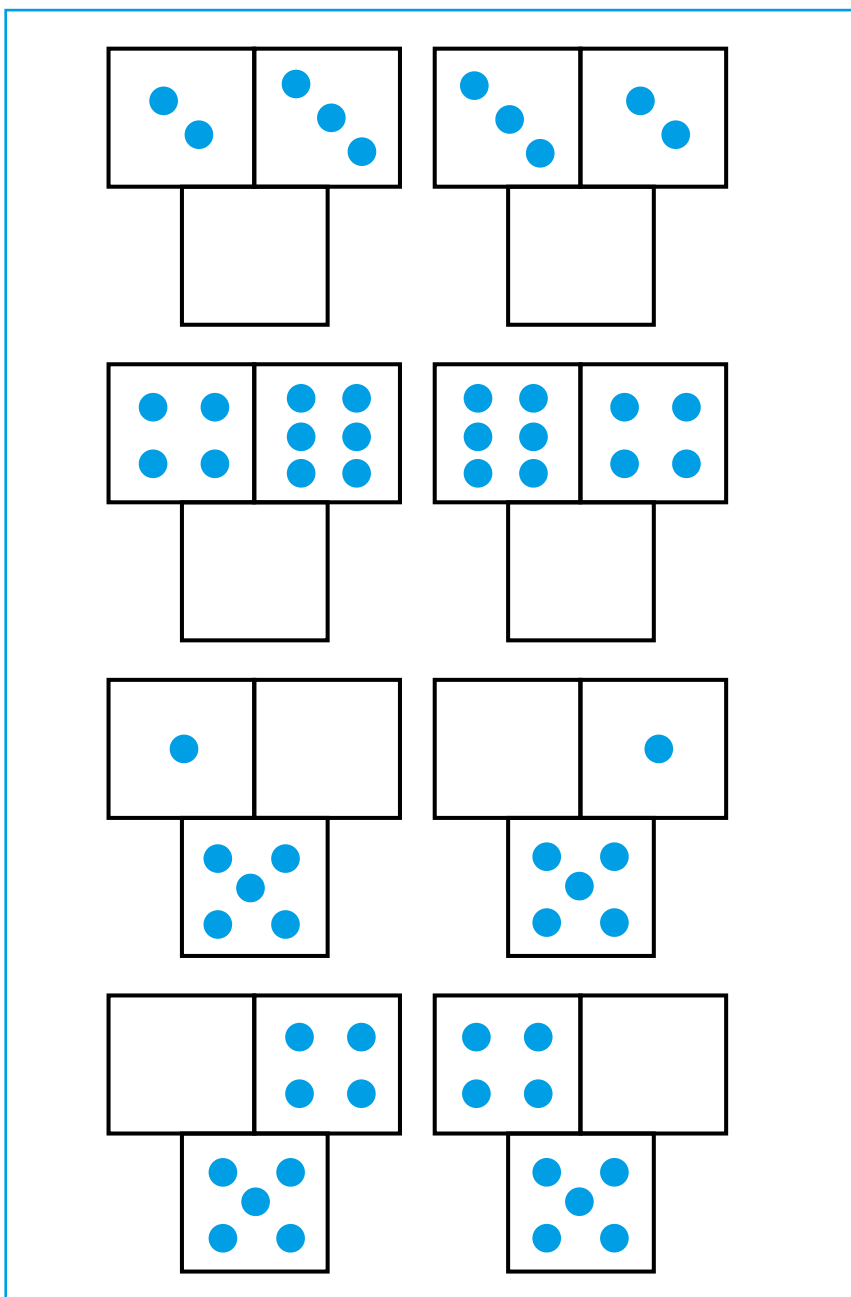


Následná diferenciacie, reedukace:

- Žákům, kterým úlohy potíže nečiní, můžeme zadat obdobné úlohy v číslech a sledovat, zda tento přechod k abstraktnímu jazyku přijmou tito žáci bez obtíží.
- Reedukací je návrat k vyřešené úloze a připomínání základního pravidla o tom, že počet objektů ve dvou sousedních polích je zapsaný vždy v poli pod nimi. Ideální je, pokud žáci pravidlo objeví sami (na základě komentování vyřešené úlohy), tím si konvenci zvnitřňují. Následně se stejnou úlohou pracují tak, že učitel postupně ukrývá jednotlivé hodnoty, žáci je doplňují a tím si učitel ověřuje, zda žáci porozuměli konvenci pojmenované ve vstupní vyřešené úloze.
- Podporou pro žáky může být také využití písmena D (jako dohromady) u poslední hodnoty, se kterou žáci pracují při jiných úlohách rozvíjejících vnímání kvantity (např. na str. 2), nebo grafická podpora pomocí dvou šipek směřujících z horních polí ke spodnímu.

Komutativita

Úloha:



Komentář pro učitele:

Dalším jevem, který může učitel sledovat, je komutativita sčítání (např. $2 + 3$ dává stejný výsledek jako $3 + 2$). V této sérii možná některý žák po vypočítání prvního trojúhelníku rychle řekne: „To je stejné, akorát otočené.“ Takový žák komutativitu vnímá dobře. Nejlépe učitel zjistí, jak komutativitě žák rozumí, pomocí rozhovoru nebo třídní diskuze. Čím více zkušeností žáci získají, tím rychleji si komutativní zákon pro sčítání osvojí. Pro diagnostiku je zásadní žáka při činnosti pozorovat, případně pořídit videozáznam žákova řešitelského procesu.

Chceme sledovat:

- zda žáci komutativitu vnímají,
- zda vnímání komutativity ovlivňují také další parametry (konfigurace, jazyk),
- zda ji následně vnímají také v jazyce čísel.

Poznátky:

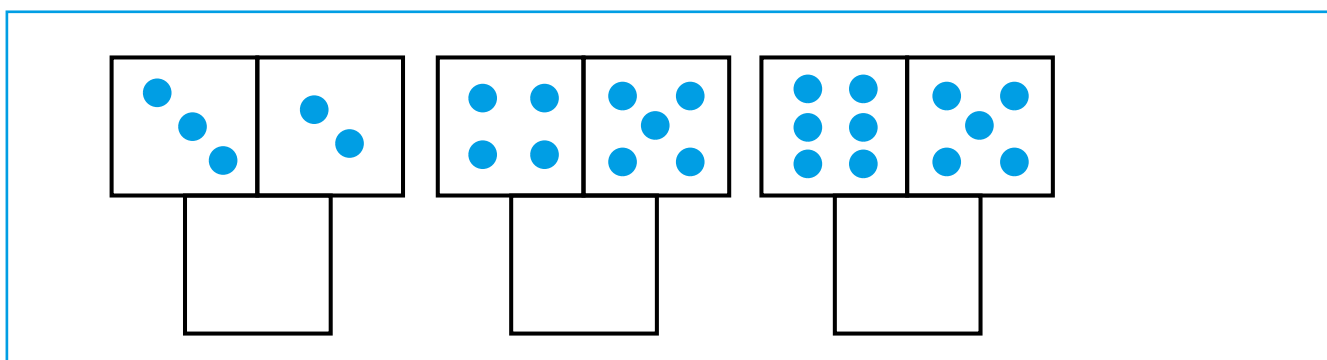
- Tyto úlohy nečinily žákům potíže, většinou se neobjevily numerické chyby – a pokud se objevily, tak u obou úloh. Z toho můžeme usuzovat, že žáci komutativitu vnímají. Někteří přímo sami vyjádřili, že jsou úlohy stejné.

Následná diferenciací, reedukace:

- Pokud tyto úlohy nečinily žákům potíže, můžeme jim zadat obdobné úlohy v jazyce teček s jinými konfiguracemi, vyšším počtem teček a dále také v jiném jazyce, v jazyce čísel.
- Žáky, kteří komutativitu nevnímají, není potřeba vést k reedukaci. Cestou může být pouze společná diskuze žáků ve třídě nad řešením.

Přechod přes desítku

Úloha:



Komentář pro učitele:

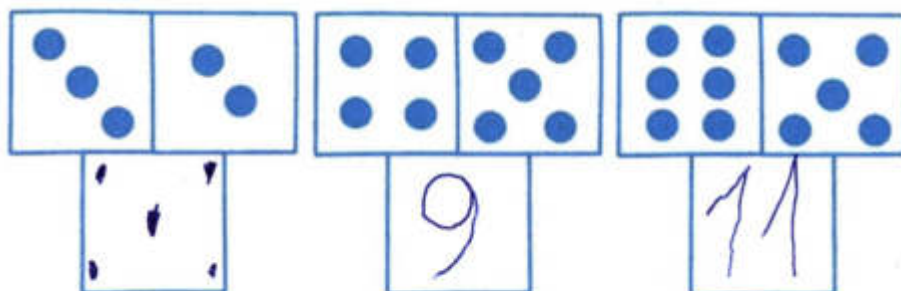
V 1. ročníku žáci sčítají malá čísla. Nejdříve v sémantickém jazyce, poté již nastupuje abstraktní jazyk čísel. Gradačním skokem bývá přechod přes desítku. Zde je důležité, že **si žáci hledají vlastní strategie nebo je odkoukávají od spolužáků**. Učitel může využít i prostředí Součtových trojúhelníků pro řešení úloh s přechodem přes desítku. V případě chybných řešení reedukace spočívá v návratu k sémantice a k manipulativním řešením (manipulace s objekty).

Chceme sledovat:

- zda jazyk teček usnadňuje žákům numeraci při přechodu přes desítku,
- v jakém jazyce budou žáci chybějící hodnotu evidovat.

Poznátky:

- Úloha nečinila žákům větší potíže. Většina žáků evidovala výsledný počet pomocí teček, ale objevila se i řešení, kde je patrné, že žák z důvodu úspory energie zaznamenává větší součet číslem.
- Mnoho žáků používalo strategii počítání jednotlivých teček souběžně s ukazováním na jednotlivé tečky.



Následná diferenciacie, reedukace:

- Pokud úlohy žáci zvládli bez problémů, zadáme jim obdobnou sérii s větším počtem puntíků, jinou konfigurací nebo v jazyce čísel.

Zápis, jazyk

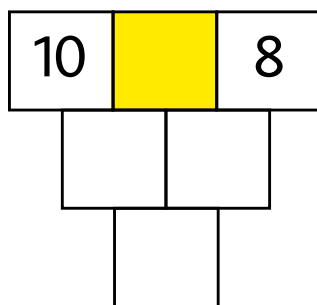
V 1. ročníku žáci používají různé jazyky k evidenci počtu. Kreslí sémantické objekty (jablka, koláče), používají reprezentanty počtu (čárky, tečky), později začínou psát číslíce. Stává se, že někteří žáci začínají používat číslíce okamžitě, již je znají z mateřské školy nebo z domova. Není důvod, aby jim učitel používání číslíček zakazoval. Nicméně i čárkování a tečkování má svůj význam, jelikož se tím ověřuje vázanost na kusy.

Velikost hodnot

Dalším gradačním parametrem úloh je velikost číselného oboru, velikost hodnot. S většími čísly stoupá i náročnost úloh. Zároveň se ve třídách vyskytují také žáci, kteří takové výzvy vyhledávají. Jsou fascinováni velkými čísly a chtějí s nimi počítat. Učitel si může provést diagnostiku potřeby používat větší čísla např. následující úlohou:

Úloha:

Do žlutého pole vlož číslo a vyřeš součtový trojúhelník.



Komentář pro učitele:

Najdou se žáci, kteří vloží do žlutého pole 1 nebo jiné malé číslo. Najdou se ale i žáci, kteří vloží 10, 100 nebo i větší číslo. To ukazuje na jejich potřebu s velkými čísly pracovat. Učitel by jim pak takové výzvy měl umožnit.

Poznátky:

- Většina žáků doplnila do žlutého pole 1, větší čísla se objevovala výjimečně, nicméně se u těchto několika řešitelů potvrdila zaujatost většími čísly a potřeba počítat s nimi.

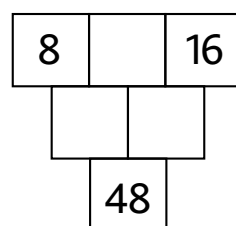
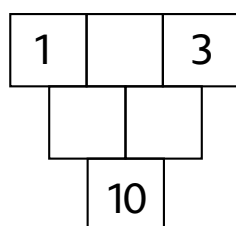
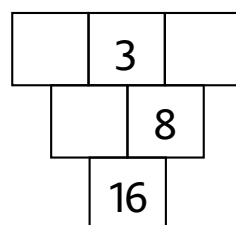
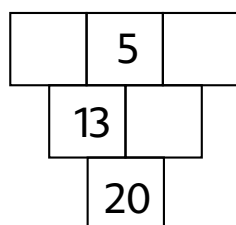
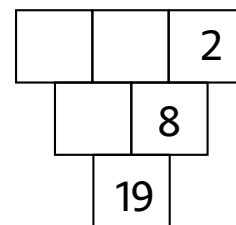
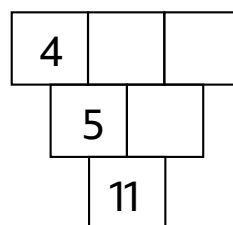
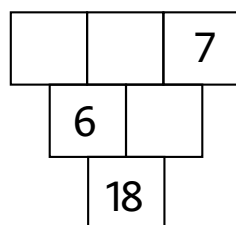
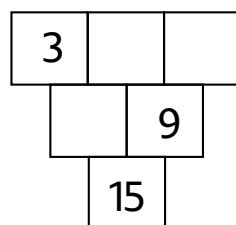
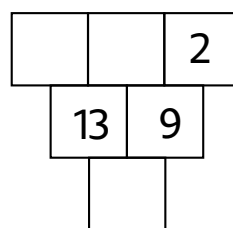
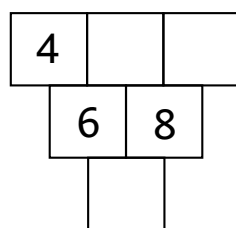
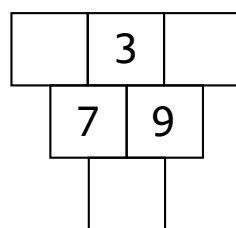
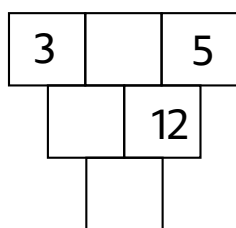
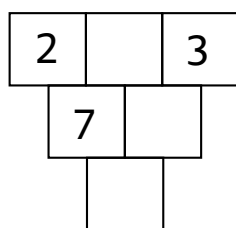
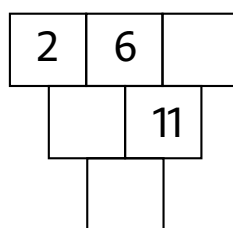
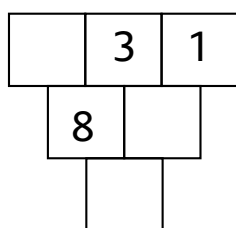
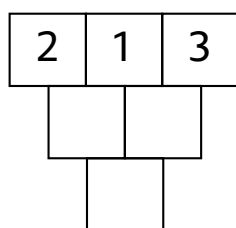
Strategie sčítání

Je důležité pozorovat a ve třídě diskutovat jednotlivé strategie sčítání. Učitel si může všimnout, jaké spoje má žák zautomatizované a jaké ne. Např. $2 + 3 = 5$ zapíše okamžitě, výpočet $5 + 4$ mu trvá podstatně déle. Platí pravidlo, že pokud má žák v takových úlohách potíže, je třeba použít manipulaci, např. žák si vezme 5 kaštanů a k nim postupně přidává další 4 kaštanů. Říká: „Šest, sedm, osm, devět.“ Nebo počítá po jedné od začátku: „1, 2, 3, 4, ..., 9.“

2. ročník

Pozice zadaného čísla

Úloha:



Komentář pro učitele:

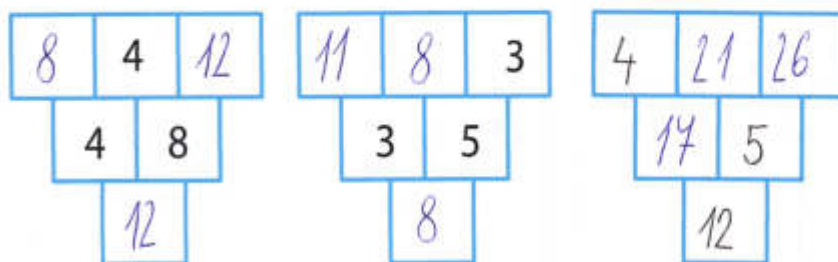
Na obrázcích je větší množství součtových trojúhelníků. Ve všech jsou známa tři čísla. Je třeba si uvědomit, že **gradačních parametrů je zde více a v úlohách se mohou prolínat**. Proto nejde stanovit pevné pořadí dle gradace. Náročnost učitel zjistí při práci s žáky. **Stěžejním gradačním parametrem je pozice zadaných hodnot. S tím souvisí další parametr: počet sčítání a počet odčítání k vyřešení úlohy** (dá se očekávat, že sčítání bude pro žáky jednodušší). Tato série cílí také na **přechod od explicitních úloh (takových, kde jsou zcela jasné jednotlivé početní kroky) k implicitním**. Nikdy o nich ovšem nelze hovořit obecně, ale vždy ve vztahu ke konkrétnímu žákovi, jelikož teprve pro něj je úloha buď explicitní, nebo implicitní.

Chceme sledovat:

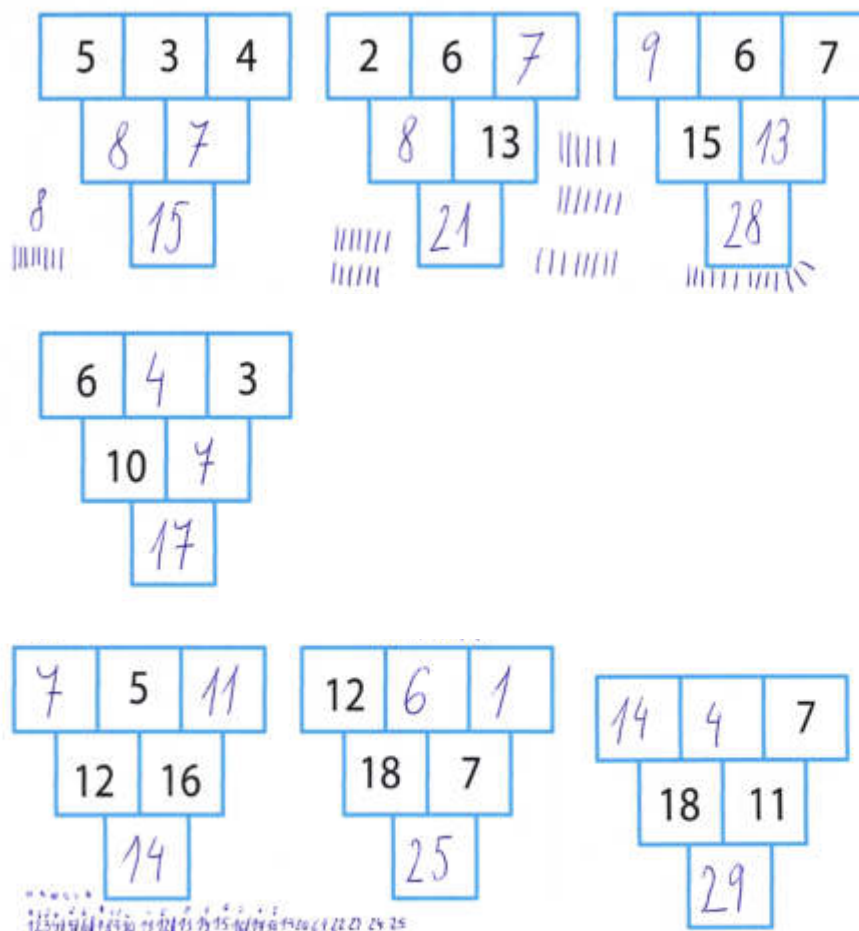
- zda žák zvládá sčítání, jestli odečítá, nebo preferuje dopočítávání,
- zda žák dobře řeší explicitní úlohy (takové, kde jsou zcela jasné jednotlivé početní kroky), ale např. implicitní se mu nedaří,
- zda se objevují numerické chyby a v jakých situacích (např. přechod přes desítku) apod.

Poznátky:

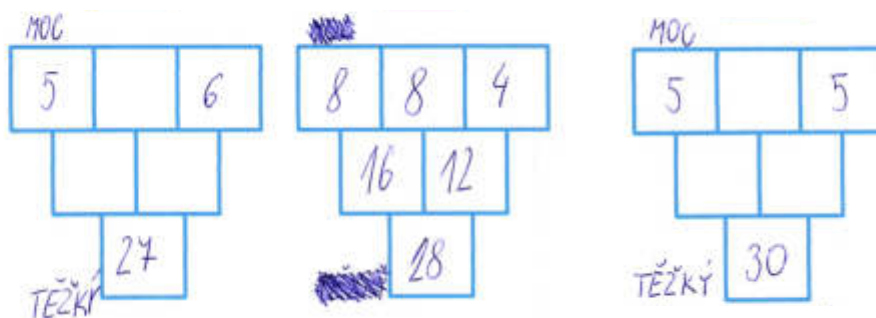
- Problematická se ukázala poslední úloha, což bylo dáno vyšším číselným oborem v kombinaci s tím, že zde žáci neměli žádný jasný postup, jak úlohu vyřešit (úloha pro ně byla implicitní), museli tedy provést mnoho pokusů.
- Často se objevovaly chyby v konvenci, a to i u žáků, kteří u předchozích úloh toto zvládali bez potíží. Ukázalo se, že pokud jsou hodnoty zadány vedle sebe, nečiní to žákům potíže, ovšem jakmile jsou hodnoty svou pozicí rozloženy tak, že cílí na operaci odčítání nebo dopočítávání, žáci velmi často sčítají.
- Časté byly rovněž numerické chyby, zejména se objevovaly v řádu desítek (např. $12 + 16 = 18$ místo 28).
- Některým žákům dělala potíž struktura jako taková, neuměli se zorientovat v tom, jaká čísla k sobě patří.
- V následujících ukázkách řešení jsou mírně obměněna čísla, obtížnost v podobě pozice známých a neznámých hodnot je plně zachována.



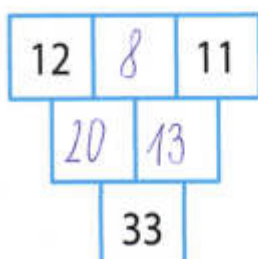
- U některých žáků byla zjevná potřeba vizualizace počtu.



- Implicitní úlohy mnoho žáků hodnotilo jako příliš obtížné, z řešení bylo zjevné četné gumování. Učitel může strategii pokusů podpořit i větším množstvím připravených šablon. Variantou je rovněž využití stíratelné tabulky, ovšem zde je úskalí, že žáci nebudou mít zaznamenány předchozí pokusy.



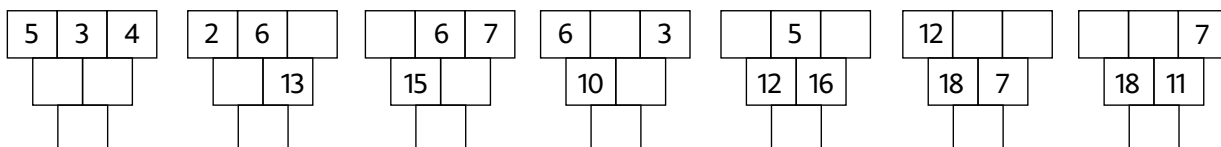
- Častou chybou u úloh, které žáci vnímali jako implicitní, je doplnění chybné hodnoty na druhé pozici v horním řádku. Žáci nejčastěji začnou rozkladem spodního čísla (např. 33 rozdělí na 20 a 13) a dále pokračují v levé horní triádě ($20 - 12 = 8$), ale již neověřují správnost pravé triády ($8 + 11$ se nerovná 13), viz níže:



Následná diferenciaci, reedukace:

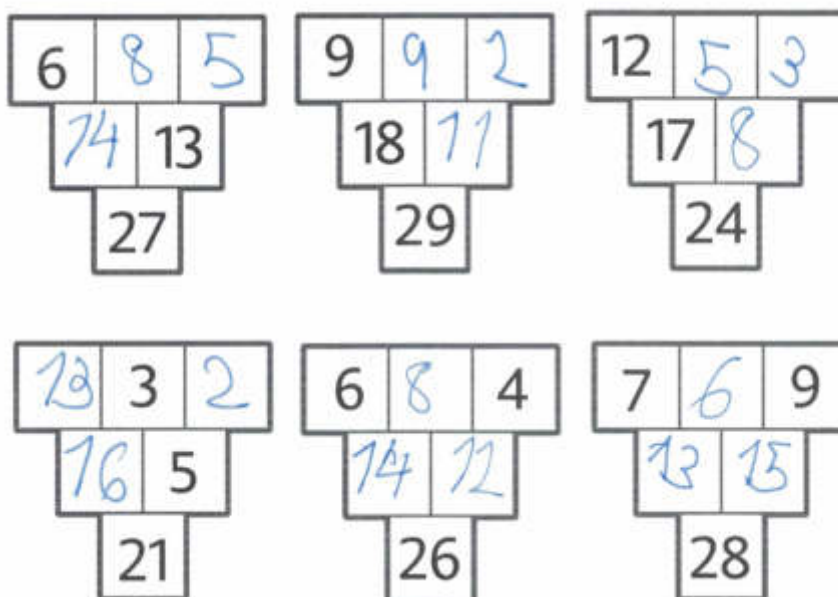
- Některým žákům pomohlo barevné zvýraznění jednotlivých malých trojúhelníků, doporučujeme využít také „okénko“ v podobě dvouúrovňového trojúhelníku, které pomůže žákům soustředit se pouze na daný výřez ve struktuře a konkrétní triádu. Pomůcku lze vyrobit, případně zakoupit zde: https://eshop.didactive.cz/souctovy_trojuhelnik_skladaci
- Jako úspěšná reedukace pro žáky, kteří implicitní úlohy vůbec nezvládli vyřešit, bylo výrazné snížení číselného oboru.
- Tvorba vlastní úlohy jim proti tomu nečinila potíže. Zde se často žáci pustili i do vyššího číselného oboru (v řádu stovek).

Dále uvádíme konkrétní ukázkou následné diferenciaci a reedukace:

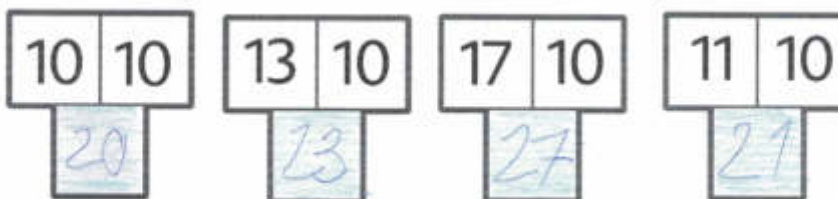


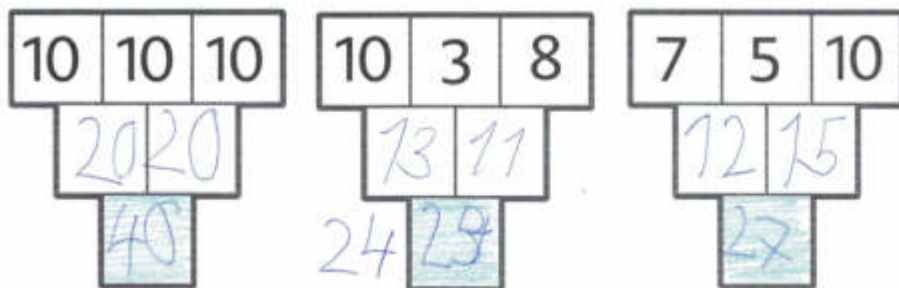
Na základě zrealizované diagnostické série výše připravil učitel na další hodinu 4 různé série úloh:

- žáci, kteří řešili bez chyby, dostali tuto sérii:



- žáci, kteří měli problém s počítáním s většími čísly, řešili tuto sérii:

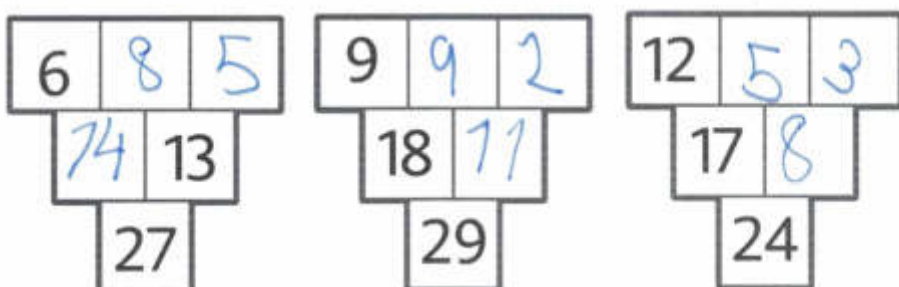
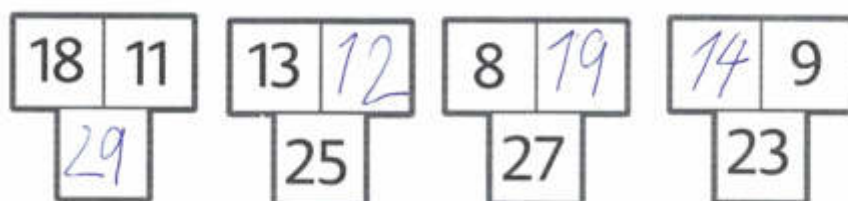




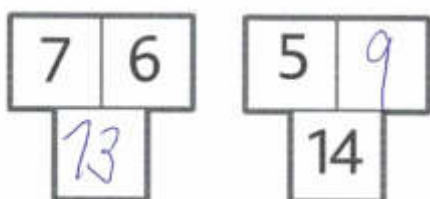
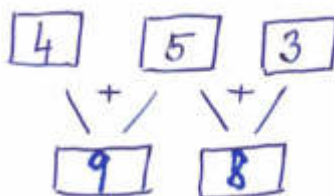
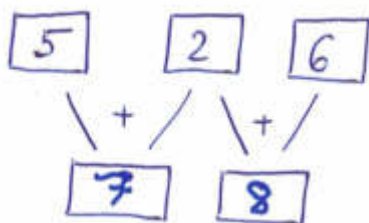
2. Vybarvi čísla z modrých políček na číselné ose



- žáci, kteří chybovali v numerice (problém s dopočítáváním nebo sčítáním a odčítáním):



- žáci, kteří měli problém s konvencí součtového trojúhelníka:



Hledání více řešení

Úloha:

	5	
14		

	5	
14		

	5	
14		

12		
23		

12		
23		

12		
23		

Chceme sledovat:

- jak žák pracuje s rozkladem čísla,
- v jakém číselném oboru chce pracovat.

Poznátky:

- Následující řešení dokladuje zaujetí většími čísly. V prvním trojúhelníku je chyba, která je ale zjevně způsobena pouze krátkodobou nepozorností, jelikož v následujících trojúhelnících žák bezpečně ovládá numeriku ve vyšším číselném oboru. Čísla, která žák volil, nejsou prvoplánově jednoduchá (nedosazuje např. celé stovky), také využívá nulu.

9	5	10
14	95	
	108	

9	5	829
14	834	
	848	

9	5	1119
14	1116	
	1130	

9	5	10
14	15	
	29	

9	5	94
14	99	
	113	

9	5	0
14	5	
	19	

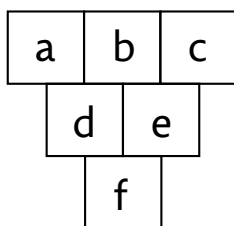
1	11	0
12	11	
	23	

2	10	1
12	11	
	23	

5	7	4
12	11	
	23	

3.–5. ročník

Vztahy mezi čísly



Komentář pro učitele:

Vztahy mezi čísly v trojúhelníku lze žákům zadávat pomocí **kouzel**. To mívá silný motivační charakter. Žáci ve snaze odhalit kouzlo objevují vazby mezi jednotlivými hodnotami.

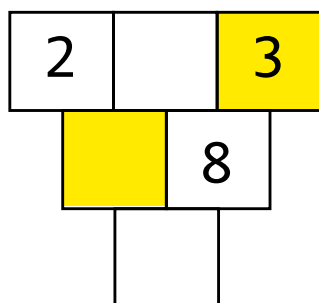
Chceme sledovat:

- zda už žák používá nějaký známý vztah,
- zda je motivovaný k dalším objevům a rychlejšímu počítání.

První vztah: $a + e = c + d$. K objevení tohoto vztahu může pomoci následující úloha:

Úloha:

Urči součet žlutých polí.

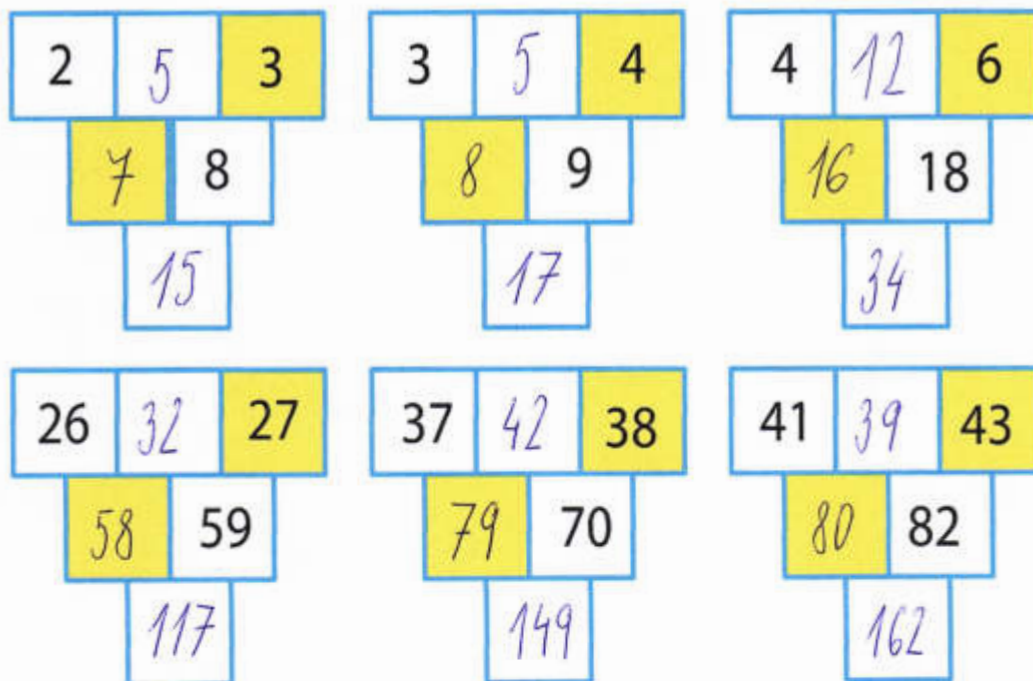


Komentář pro učitele:

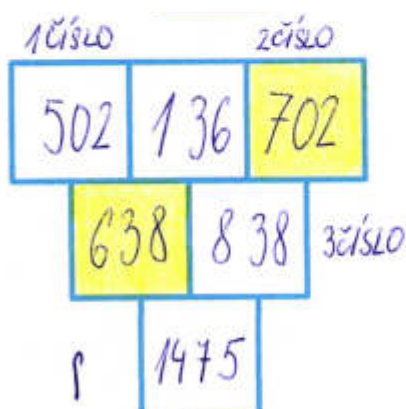
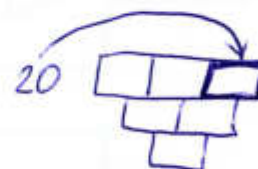
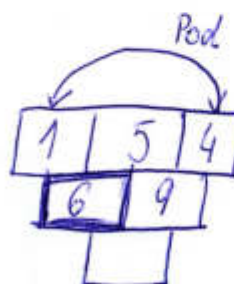
Měníme hodnotu 3 ve žlutém poli a sledujeme, jak se mění součet obou žlutých polí. Odhalení vztahu může napomoci obarvení polí 2 a 8. Pokud zná žák výše napsaný „trik“, úlohu rychle vyřeší ($8 + 2 - 3 = 7$). Učitel může tato „triková“ řešení sledovat a nabízet podle motivace žáků další úlohy.

Poznátky:

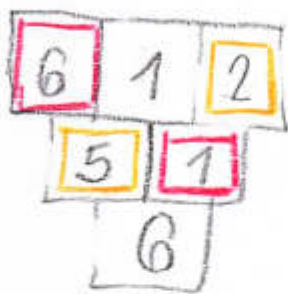
- Úloha byla testována ve 3. ročníku. Minimum žáků určilo součet, většina z nich pouze řešila trojúhelník.
- Podobné série byly zadány v 5. ročníku, kde byla zároveň výzva pro rychlé žáky, aby zkusili najít trik na rychlé určení druhého žlutého pole. Většina žáků se pustila do objevení zákonitosti. V momentě, kdy ji objevili, přestali dopočítávat konečný součet. Zobecnění ($a + e = c + d$) se podařilo najít při spolupráci ve dvojici. Žáci, kteří vztah objevili, tento objev potom představili spolužákům u tabule, další to od nich pochopili (tzv. kognitivní osmóza). Pro bližší představu uvádíme níže několik zajímavých řešení (některá chybná) s komentáři žáků:



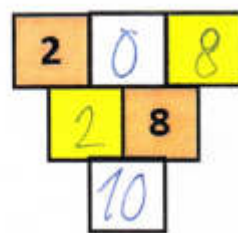
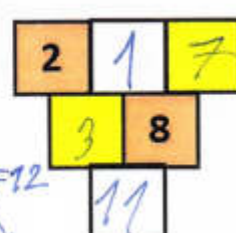
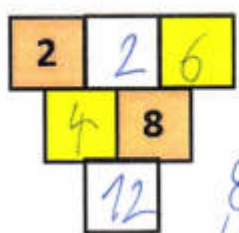
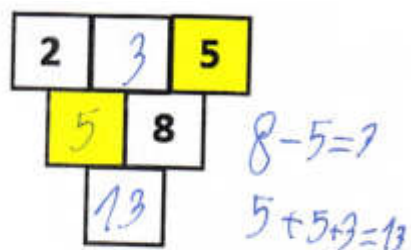
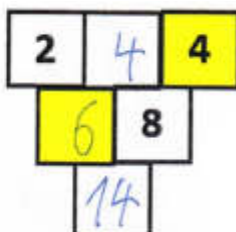
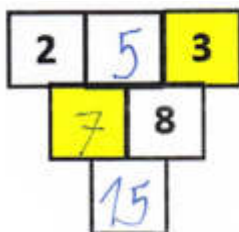
Jaký je rozdíl
mezi čísly vpravo
a vlevo mezi horními
číslly



FINTA MUSÍ SE VÝPOČÍTAT O KOLIK JE 1 ČÍSLO MENŠÍ
NEŽ 2 ČÍSLO TŘEBA 502 JE MENŠÍ O 200 NEŽ 702
A JE 3 ČÍSLO TŘEBA 838 A $838 - 200 = 638$



Stejně barvy se rovnají slený součet.



Handwritten calculations and arrows:

$$8 + 2 + 2 = 12$$

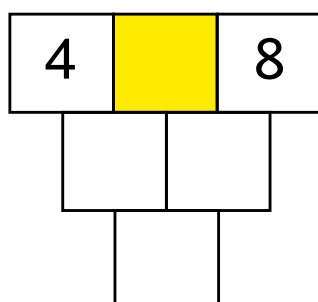
$$8 + 1 = 9 + 1 = 10 + 1 = 11$$

$$4 + 1 = 5 + 4 + 1 = 10 + 2 = 12$$

Druhý vztah: $a + 2b + c = f$, analogicky $[f - (a + c)] : 2 = b$.

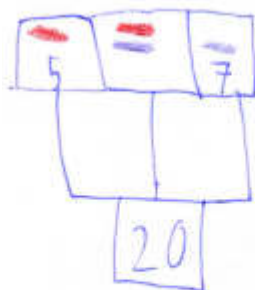
Úloha:

Do žlutého pole vlož číslo, vyřeš trojúhelník.
Pokud kouzelníkovi řekneš dolní číslo, on rychle řekne číslo ve žlutém poli.



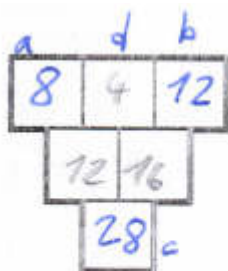
Poznátky:

- První řešení žáka 4. ročníku popisuje, jak rozumí vztahu čísel v horním řádku a posledního políčka dole. Díky barvám lze dobře vidět, že si žák uvědomuje, že prostřední číslo nahore je v součtu dole dvakrát. Objev popisuje jak slovně, tak právě barevným kódováním polí. Toto už je krok směrem k zobecnění, které zatím neprobíhá přes písmena (jako kdybychom to chtěli vyjádřit algebraicky), ale proměnnou jsou barvy.

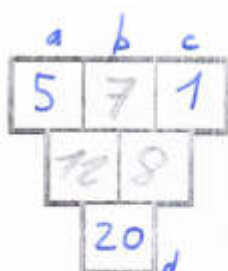


Když sečtu součty horní modrých a dvou červených, vyjde mi výsledek. Horní prostřední číslo je násobkem 2. Takže když sečtu 2 horní krajní čísla (číslo 12). Do dolního čísla mi vyjde nějaký počet (asi 8). To vyjde 2, protože podle barvy se počítá dvakrát, a máme výsledek (4).

- Další ukázka řešení (rovněž ze 4. ročníku) zachycuje zobecnění vztahu pomocí algebry, jazyka písmen. Vidíme zde, že žák už umí za pomoci písmen zapsat vztah do rovnosti. Zápis vpravo je chybný (chybí tam dělení dvěma), ačkoli jej psal stejný žák.



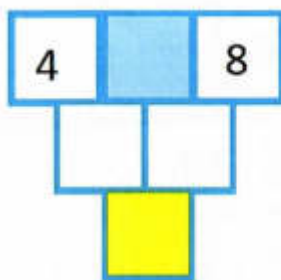
$$[c - (a + b)] : 2 = d$$



$$[d - (a + c)] = b$$

- Žáci v jiné třídě dostali pracovní list s trojúhelníkem a tabulkou. Měli volit různá modrá čísla a dopočítávat žluté číslo. Učitel jim doporučil, ať začnou 0 a 1, pak už volí čísla libovolně. Přibližně polovina žáků zvolila čísla jdoucí po sobě (od 0 do 8). Další zvyšovali modré číslo o 2, volili násobky 5 nebo zkoušeli různá čísla včetně záporných. Následně je učitel pozval do „kina“ před tabulí i s jejich tabulkami a společně dávali jejich řešení dohromady (zapsal modrá čísla 0–5 a potom několik náhodných ověřovacích). Ptal se, jestli je v tabulce něco zajímavého.
- Ti, co volili po sobě jdoucí čísla, si všimli, že když modré číslo zvyšují o 1, žluté se zvyšuje o 2. Další postřeh byl, že žluté číslo je vždy sudé.
- Dívky, které volily za modré číslo násobky 5, si všimly, že žluté číslo vždy končí dvojkou.
- Chlapci zase objevili, že rozdíl mezi žlutým a modrým číslem se zvyšuje o 1, tedy stejně jako modré číslo.
- Učitel navedl třídu, aby žlutá čísla napsali jako $12 + ?$, tedy u 0 je 12 ($12 + 0$), u 1 je 14 ($12 + 2$) atd. Tím objevili vztah, že k 12 vždy přidáváme dvojnásobek modrého čísla. Potom vztah společně ověřili na několika dalších číslech (velkých, záporných atd.). 12 by mohli odhalit i sami žáci (jako součet $4 + 8$) bez vstupu učitele.

- Ukázka žákovského řešení, kde si žák při vyplňování tabulky zvolil postup, kdy po prvních 4 hodnotách začal systematicky střídat kladná a záporná čísla:



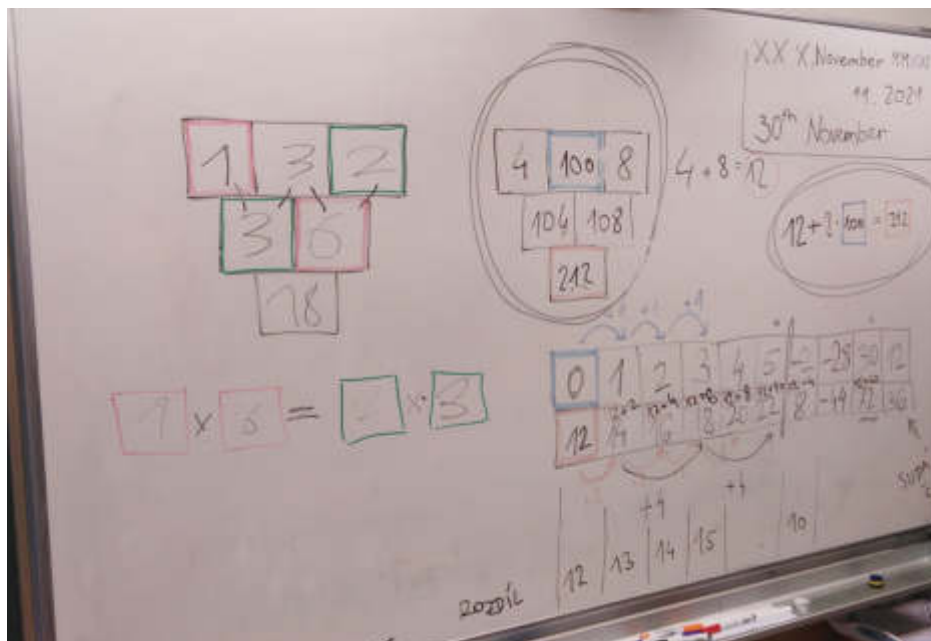
modré číslo	0	1	2	3	-2	-1	-3	-4	4	1m
žluté číslo	12	14	16	18	8	10	6	4	280	1m12
m	5	-5	6	-6	7	-7	8	-8	9	-9
z	22	2	24	0	28	-2	30	-4	32	-6



m	10	-10	11	-11	12	-12	13	-13	14	-14
z	34	-8	36	-10	38	-12	40	-14	42	-16
m	15	-15	16	-16	17	-17	18	-18	19	-19
z	64	-18	46	-20	48	-22	50	-24	52	-26
m	20	-20	21	-21	22	-22	23	-23	24	-24
z	54	-28	56	-30	58	-32	60	-34	62	-36
m	25	-25	26	-26	27	-27	28	-28	29	-29
z	64	-38	66	-40	68	-42	70	-44	72	-46

Toto je pěkná ukázka procesuálního pochopení vztahu (tabulka, která vykazuje nějakou pravidelnost). Zároveň je zde vidět silná motivace žáka, jelikož udělal mnoho pokusů.

Ukázka z následného sdílení u tabule:



Jednoho žáka napadlo místo součtových trojúhelníků udělat násobilkové (viz tabule výše vlevo). Žáci zjišťovali, zda tam platí podobné vztahy, a zjistili, že opravdu platí. Zajímavé je, že tam platí třeba i ten vztah prvního řádku a posledního políčka, ale místo sčítání je tam násobení a místo násobení je tam mocnění, tedy $f = a \cdot c \cdot b^2$.

Následná diferenciacce, reedukace:

- Pro žáky, které objevování vztahů zaujme, může učitel připravit úlohu na následující vztah:

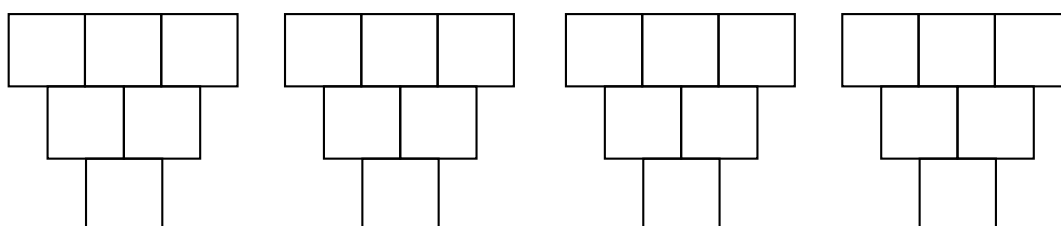
Třetí vztah: $3 \cdot (a + b + c) + 2b = a + b + c + d + e + f$ čili **trojnásobek součtu horního řádku + dvojnásobek prostředního čísla horního řádku = součet všech čísel součtového trojúhelníku.**

Další úlohy k využití vztahu mezi čísly, podmínky

Úloha:

Doplň ST tak, aby:

- součet čísel horního řádku byl 3 a součet všech čísel byl 9
- součet čísel horního řádku byl 3 a součet všech čísel byl 11
- součet čísel horního řádku byl 3 a součet všech čísel byl 13
- součet čísel horního řádku byl 3 a součet všech čísel byl 15



Komentář pro učitele:

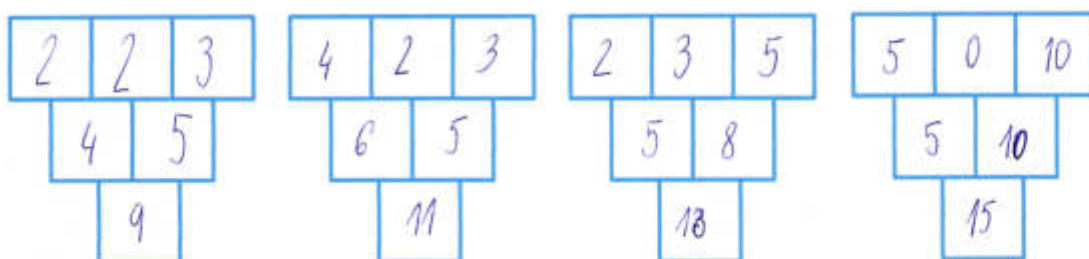
Úloha klade nároky na žáky nejen z hlediska matematiky, ale také čtenářské gramotnosti. Žáci musí zohlednit dvě podmínky součtů, součet čísel v horním řádku a celkový součet čísel. V ideálním případě by bylo dobré, aby žák úlohu vyřešil a pak si řešení ověřil.

Chceme sledovat:

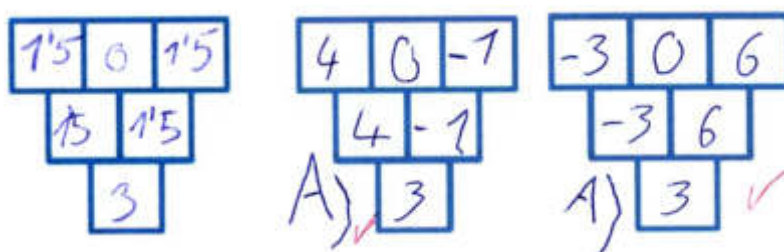
- zda úspěšnost úlohy ovlivňuje čtenářská gramotnost,
- jaké strategie budou žáci využívat,
- zda budou žáci hledat více řešení.

Poznátky:

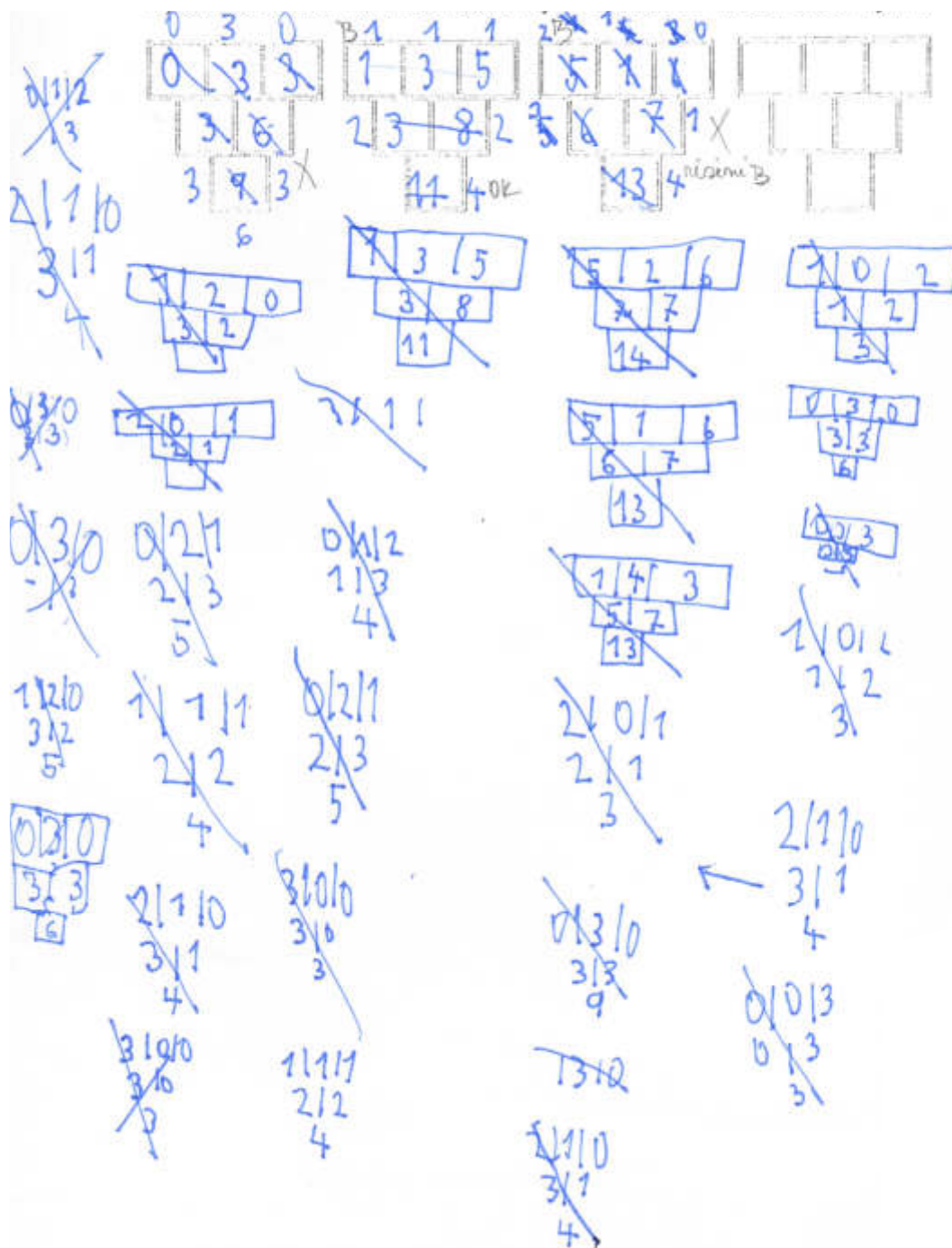
- Série byla testována ve 3. ročníku. Zásadním problémem byla čtenářská gramotnost, kdy pouze minimum žáků pracovalo podle zadání, ostatní navrhovali trojúhelníky bez respektování podmínek součtů.
- Relativně častou chybou byla dále záměna součtu všech čísel za poslední číslo v trojúhelníku. Stejná skutečnost se objevovala opakovaně i ve 4. ročníku.



- Nejčastěji začali žáci kombinací v prvním řádku (1, 1, 1), druhá byla (0, 3, 3 – v různém pořadí čísel) a poslední (0, 1, 2 – v různém pořadí čísel).
- U několika žáků se stalo, že časem přestali sledovat jednu z podmínek, např. tři úlohy vyřešili správně a ve čtvrté už zapomněli dodržet jednu z podmínek.
- Někteří žáci si všimli, že číslo ve spodním poli trojúhelníku zůstává stejné pro různá řešení při dané vstupní podmínce o součtu všech čísel (např. v 1. úloze je ve spodním poli vždy 3 atd.), a využívali to při řešení, protože pak spodní číslo napsali do trojúhelníku hned.
- Větší počet volných šablon trojúhelníků vedl u většiny žáků k hledání většího počtu řešení.
- V úloze někteří žáci počítali i v oboru racionálních čísel (přičemž nepoužívali zlomky, ale desetinná čísla – to si vysvětlujeme tím, že okolo nás se běžně vyskytují spíše desetinná čísla než zlomky, zároveň to může být ovlivněno tím, když se třída v nedávné době dané problematice věnovala a desetinná čísla mají žáci v „živé“ paměti), někteří počítali i v oboru záporných čísel. Za zmínku stojí také nestandardní zápis desetinného čísla v prvním řešení.



- V následující ukázce řešení můžeme vidět nekončící snahu žáka o nalezení řešení:

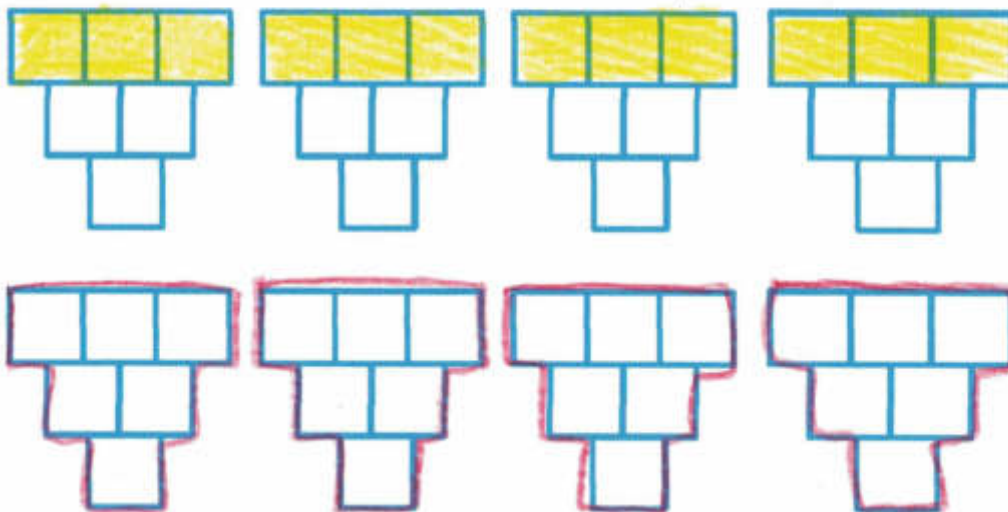


Následná diferenciacce, reedukace:

- Pokud je tento typ úloh pro žáky obtížný či neřešitelný, podmínky je dobré rozfázovat, tedy nejprve zadat úlohu jen s jednou (žlutou) podmínkou, potom úlohy jen s druhou (červenou) podmínkou a až ve třetí fázi zadat obě barevné podmínky současně.

Doplň ST tak, aby:

- součet čísel horního řádku byl 3 a součet všech čísel byl 9
- součet čísel horního řádku byl 3 a součet všech čísel byl 11
- součet čísel horního řádku byl 3 a součet všech čísel byl 13
- součet čísel horního řádku byl 3 a součet všech čísel byl 15

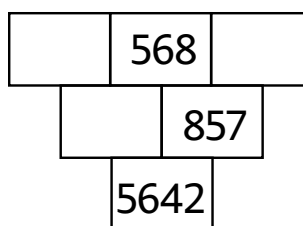
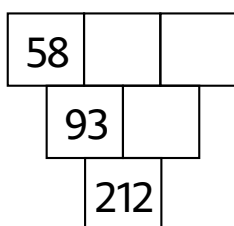


- Další možností je nechat žáky podmínky nejprve tvořit. Tedy vyřešit (nebo nechat vymyslet žákem) nějaký součtový trojúhelník a u něj určit součet prvního řádku. Poté trojúhelník vyřešit a určit součet všech čísel. Následně vyřešit trojúhelník a určit součet prvního řádku a všech čísel.

Velikost hodnot

Podle potřeby se zadávají úlohy s většími čísly. Velikost hodnot je jedním z gradačních parametrů. Zvyšuje se náročnost provedených výpočtů. Případné chyby odstraní třídní diskuze.

Úloha:



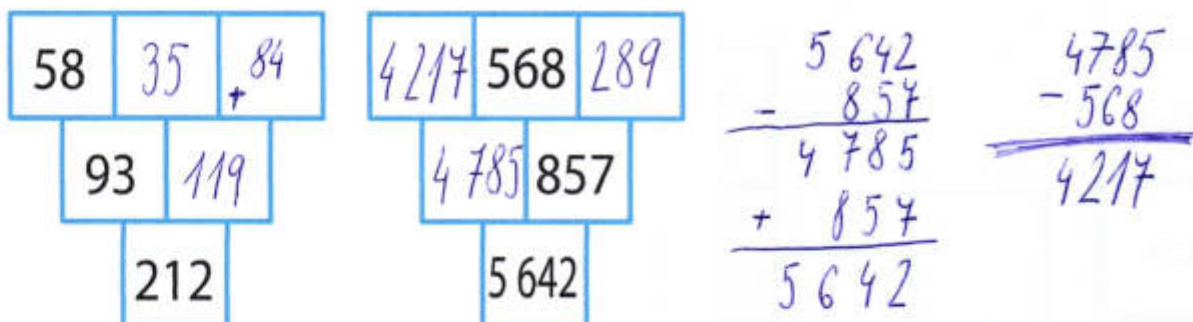
Chceme sledovat:

- jakým způsobem žáci provádí numeraci (pamětně, nebo využívají písemné algoritmy),
- jakým způsobem řeší žáci proces odčítání (zda odčítají, nebo dopočítávají),
- zda mají žáci potřebu provádět kontrolu a ověření svých výpočtů.

Poznátky:

- Mnoho žáků řešilo numeraci pamětně, nemají zvnitřněný písemný algoritmus jako efektivní způsob pro řešení.

- Pro některé žáky jsou velká čísla motivační, bavilo je vymýšlení vlastních úloh.
- Obor velkých čísel nebyl pro většinu žáků komplikovaný, ovšem pro většinu bylo komplikované odčítání, většinou ho řešili jako dopočítávání. Objevilo se i využití odhadu s následným zpřesňováním, což diagnostikuje dobré porozumění číslům a dobrou představu o mnohosti, protože bez toho nelze kvalitní odhad udělat.
- Z diskuzí s učiteli usuzujeme, že žáci písemné odčítání někdy nepoužívají proto, že jim připadá pracné, i když mu třeba rozumí.



Soustavy (podmínky)

Nejprve se žáci seznamují s přípravnými úlohami (v 1. a ve 2. ročníku bez přípravy velmi složité).

Úloha:

		2
		5

+

=

10

		2
		15

+

=

10

Komentář pro učitele:

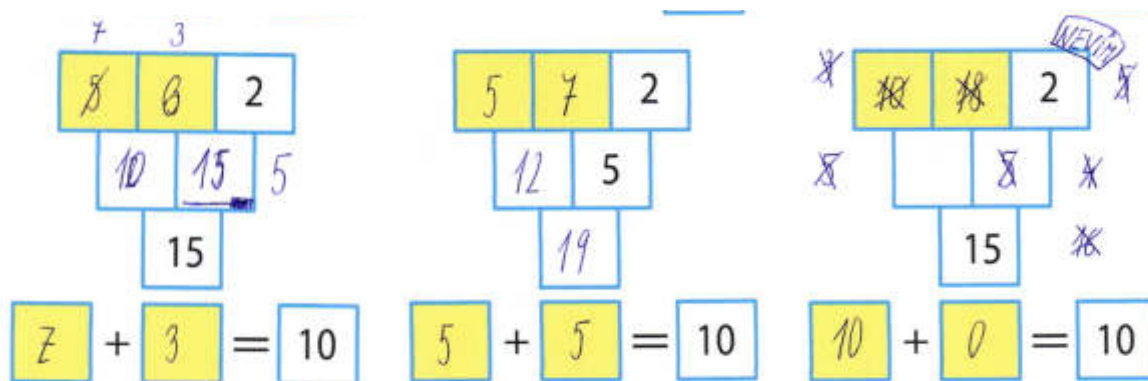
První úloha je jednodušší díky pozici zadaných hodnot, konkrétně 2 a 5, které jsou vázány v jedné triádě. Žák hned vidí (pokud zná konvenci), že v pravém žlutém poli musí být hodnota 3. Pak již dopočítá druhé žluté pole na základě dané podmínky (hodnotu 10 z podmínky tedy může s jistotou zapsat do trojúhelníku). U druhé úlohy tento postup není možný a můžeme zde diagnostikovat, jakou strategii žák zvolí. Žák, který má již dostatek zkušeností, doplní do trojúhelníku nejprve hodnotu 10 pod dvě žlutá pole (což je údaj z podmínky), následně vpravo doplní 5. Poté přejde k hornímu řádku, kde nejprve doplní 3 a nakonec 7.

Chceme sledovat:

- zda žák vyřeší obě série, nebo pouze 1 z nich a kterou,
- žakovskou řešitelskou strategii.

Poznátky:

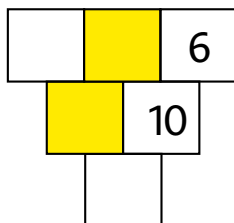
- Druhá úloha byla žáky hodnocena jako obtížnější.
- U některých řešení bylo patrné vícero problémů, nejčastěji chyba v konvenci ve spojení s numerickými chybami a dále nevnímání podmínky jako součásti úlohy.



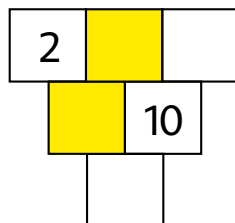
Následná diferenciacce, reedukace:

- Pokud žáci nemají potíže s podmínkovými úlohami (podmínku berou jako součást úlohy), můžeme jim zadat náročnější variantu. V čem se liší následující dvě úlohy? U první úlohy je možné okamžitě doplnit jedno žluté pole ($10 - 6 = 4$) a dále pak je možné snadno dopočítat druhé žluté pole díky zadané podmínce. Tato strategie u druhé úlohy není možná, jelikož zadaná čísla nejsou vázána v jedné triádě.

Úloha:



$$\boxed{\text{yellow}} + \boxed{\text{yellow}} = 12$$



$$\boxed{\text{yellow}} + \boxed{\text{yellow}} = 12$$

- Další možností pro učitele je porovnat druhou úlohu s úlohou z prostředí Myslím si číslo (využití tzv. **izomorfismu**, tedy stejnosti úloh):

Úloha:

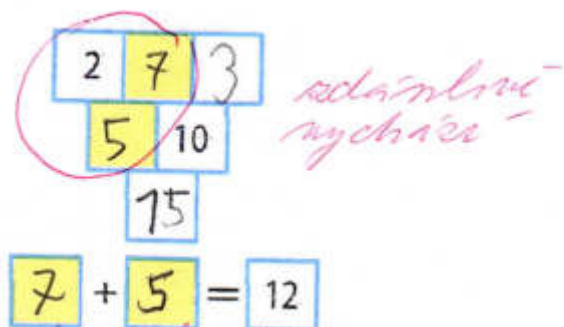
Hledám dvě čísla.
Jejich součet je 12, jejich rozdíl je 2.
Jaká čísla to jsou?

Chceme sledovat:

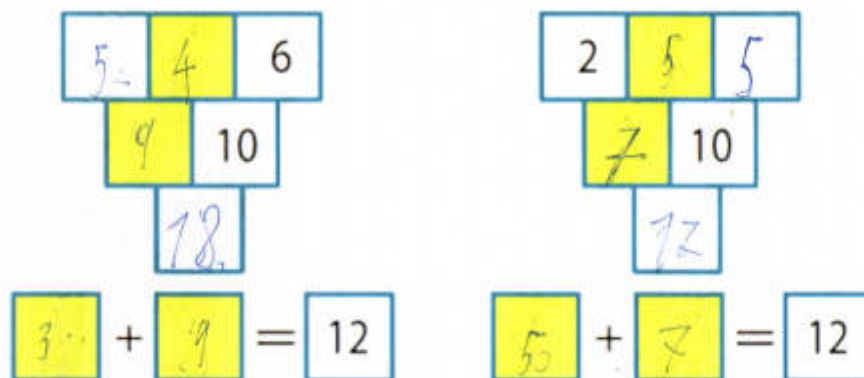
- zda žák vyřeší obě úlohy, nebo pouze jednu,
- zda si všimne stejnosti úloh,
- v jakém prostředí se mu pracuje lépe,
- jaké používá strategie.

Poznátky:

- První úloha byla pro většinu žáků bez obtíží, hned si všimli, že mohou rovnou doplnit číslo 4 do prostředního pole horního řádku.
- U několika žáků nedošlo k uvědomění, že podmínka je vázanou součástí úlohy. Podmínka vycházela numericky správně, ovšem čísla po dosazení do trojúhelníku neodpovídala konvenci.



- Následující ukázka řešení dokladuje, že v první úloze žák řeší podmínku izolovaně, tedy mimo součtový trojúhelník. Úloha o myšleném čísle je slovně komentována, k propojení na druhý součtový trojúhelník nedošlo.



Hledám dvě čísla.

Jejich součet je 12, jejich rozdíl je 2.

Jaká čísla to jsou?

5 a 7
Vypočítal jsem to tak že jsem si rozdělil číslo dvanáct na 6 a 6
a protože tam musí být rozdíl dva tak jsem si vypočítal že $6 - 1 = 5$
a že $6 + 1 = 7$ a 7 a 5 je rozdíl dva.

- Další ukázka řešení prezentuje systematickosti při snaze najít řešení pomocí strategie rozkladu:

Hledám dvě čísla.

Jejich součet je 12, jejich rozdíl je 2.

Jaká čísla to jsou?

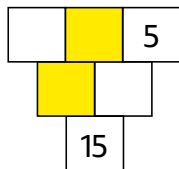
5 a 7

Proložte: 1 a 11 NEMA' ROZDÍL 2
2 a 10 NEMA' ROZDÍL 2
3 a 9 NEMA' ROZDÍL 2
4 a 8 NEMA' ROZDÍL 2
(viz. vpravo) 5 a 7 má rozdíl 2

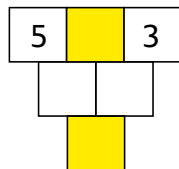
Já jsem si dopisoval od jedničky.

- Dále uvádíme náročné úlohy jako možné výzvy pro žáky, kteří s předchozími úlohami neměli potíže.

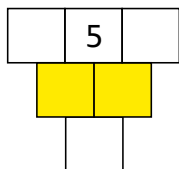
Úloha:



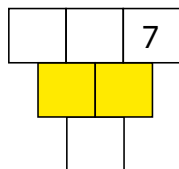
$$\square + \square = 10$$



$$\square + \square = 15$$



$$\square + \square = 18$$



$$\square + \square = 20$$

Komentář pro učitele:

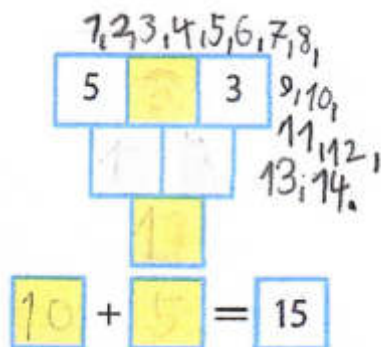
Série cílí na rozklad čísel i na kombinatoriku. První úloha: rozklad 10, druhá úloha vychází na $\frac{7}{3}$ (to je prakticky neřešitelné), třetí úloha $a + c = 8$ (rozklad 8), čtvrtá úloha řeší otázku levého horního pole (**parita**). Druhá úloha je velmi náročná, v poslední úloze se paritou myslí vztah čísel prvního řádku a čísla dole, ze kterého mohu určit paritu rohového čísla.

Chceme sledovat:

- zda žák najde jedno řešení, nebo bude motivován hledat více řešení (tedy vnímá kombinatorickou myšlenku).

Poznátky:

- Nejčastěji použitá strategie vedla přes dosazení nějakého čísla do horního žlutého pole, vyřešení trojúhelníku a následného ověření podmínky.
- U trojúhelníku s podmínkou 10 byla nejčastější první kombinace 5 a 5.
- U podmínky součtu 15 postupovali žáci systematicky od 1 ve žlutém horním poli, což bylo málo. 2 a 3 bylo stále málo, tak zkusili 4, to bylo moc, ale někteří i přesto zkusili dosadit číslo 5. Žádný žák nezkusil dosadit zlomek nebo desetinné číslo mezi 3 a 4, např. jedna žákyně zkoušela čísla až do 14 (viz obrázek níže). Úloha byla celkově hodně náročná pro 4. i 5. ročník (v 5. ročníku se objevilo řešení pomocí desetinných čísel s dvěma desetinnými místy, ale ani tam úlohu přesně nevyřešili), ve 4. ročníku přišli žáci s tím, že lze úlohu vyřešit tak, aby součet čísel v podmínce byl 14. Potom přemýšleli, co udělat s tou 1, která zbývá do 15. Protože už žáci znali vztah prostředního horního pole a spodního, řekli, že potřebují tuto jedničku rozdělit tak, aby nahoře byl jeden díl a v poli dole dva díly, takže to potřebují rozdělit na třetiny:

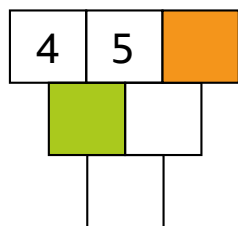


- U úlohy se součtem podmínky 18 si poměrně mnoho žáků uvědomilo, že 18 lze rovnou doplnit do spodního pole trojúhelníku, nejčastěji použitý první rozklad čísla 18 byl $10 + 8$, minimum žáků začalo s rozkladem $9 + 9$.
- Numerické chyby se téměř nevyskytly.

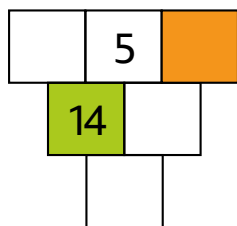
Následná diferenciacce, reedukace:

- Pokud žáci řeší podmínku odděleně, je možné odlišit obě políčka barevně, aby si žáci spíše uvědomili souvislost podmínky a součtového trojúhelníku a jednotlivých polí. Tato reedukace se osvědčila jako funkční.

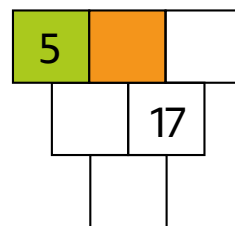
Úloha:



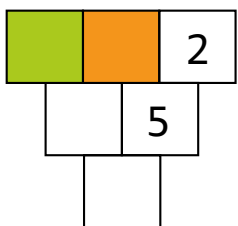
$$\text{green box} + \text{orange box} = 12$$



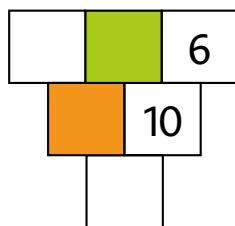
$$\text{green box} + \text{orange box} = 15$$



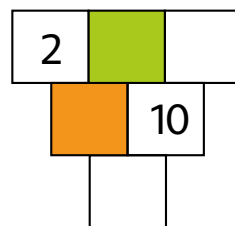
$$\text{green box} + \text{orange box} = 10$$



$$\text{green box} + \text{orange box} = 10$$



$$\text{green box} + \text{orange box} = 12$$

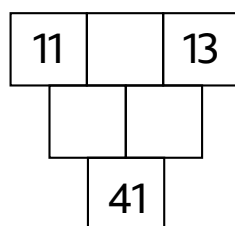
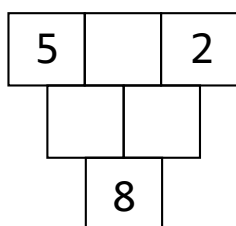
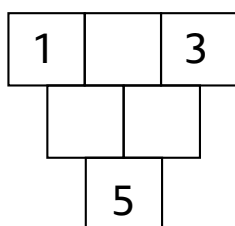
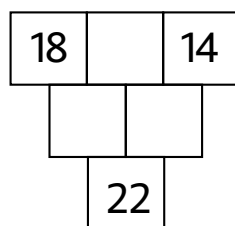
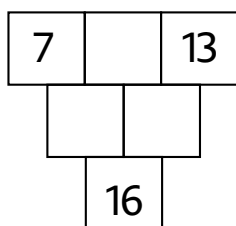
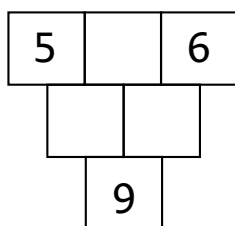


$$\text{green box} + \text{orange box} = 12$$

Číselný obor

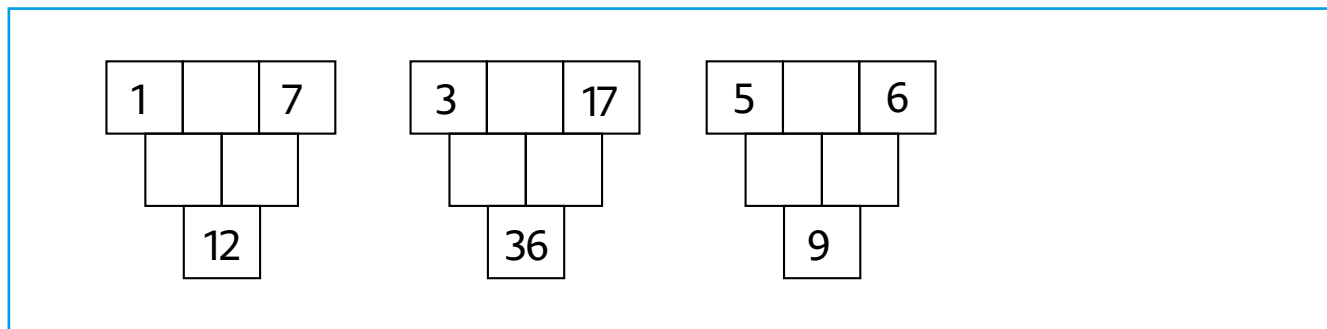
Součtové trojúhelníky jsou strukturální prostředí. Proto se v nich v případě potřeby dobře tvoří úlohy s dalšími číselnými obory, konkrétně se **zápornými** nebo **desetinnými čísly**. Takové dvě série lze vidět zde:

Úloha:



Učitel si může diagnostikovat míru porozumění žáků záporným nebo desetinným číslem, např. pokud zadá následující sérii:

Úloha:



Komentář pro učitele:

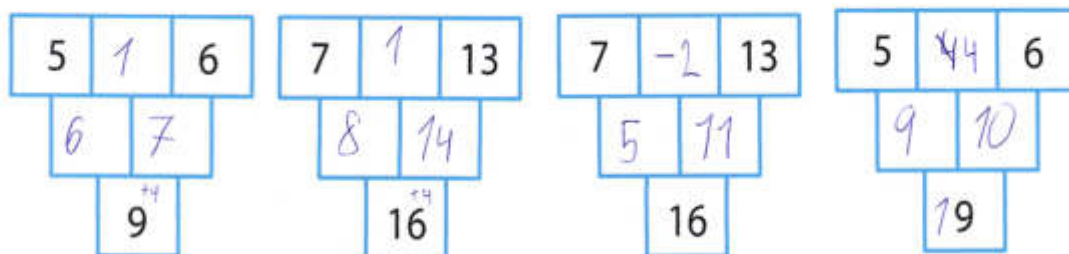
První úlohu žáci vyřeší, v prostředním horním poli vyjde 2. Ve druhém trojúhelníku vyjde horní prostřední číslo 8. Třetí trojúhelník ale již nevyřeší všichni žáci, někteří budou tvrdit, že úloha nemá řešení. Dokonce i když nějaký žák ukáže řešení s horním prostředním číslem -1 , někdo toto řešení nepřijme. To je v pořádku, ostatní žáci takové řešení budou akceptovat v budoucnu s větším počtem zkušeností s podobnými úlohami i se zkušenostmi z každodenního života (výtahy, teploměr, dluhy).

Chceme sledovat:

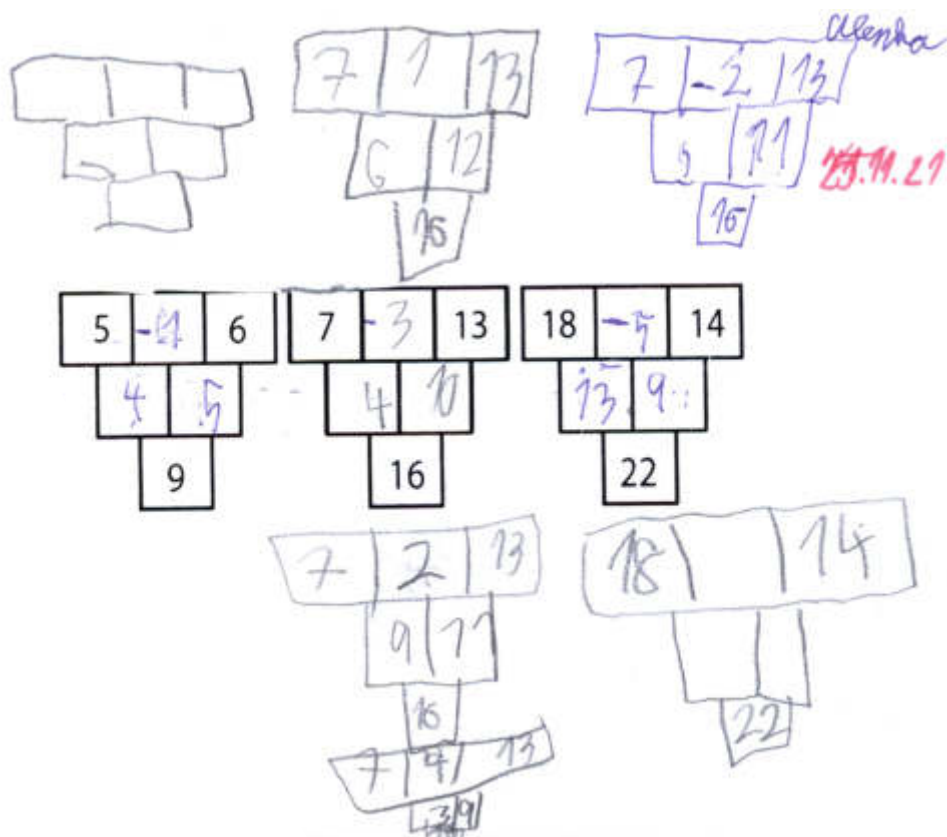
- jakým způsobem budou žáci řešit třetí úlohu v sérii.

Poznátky:

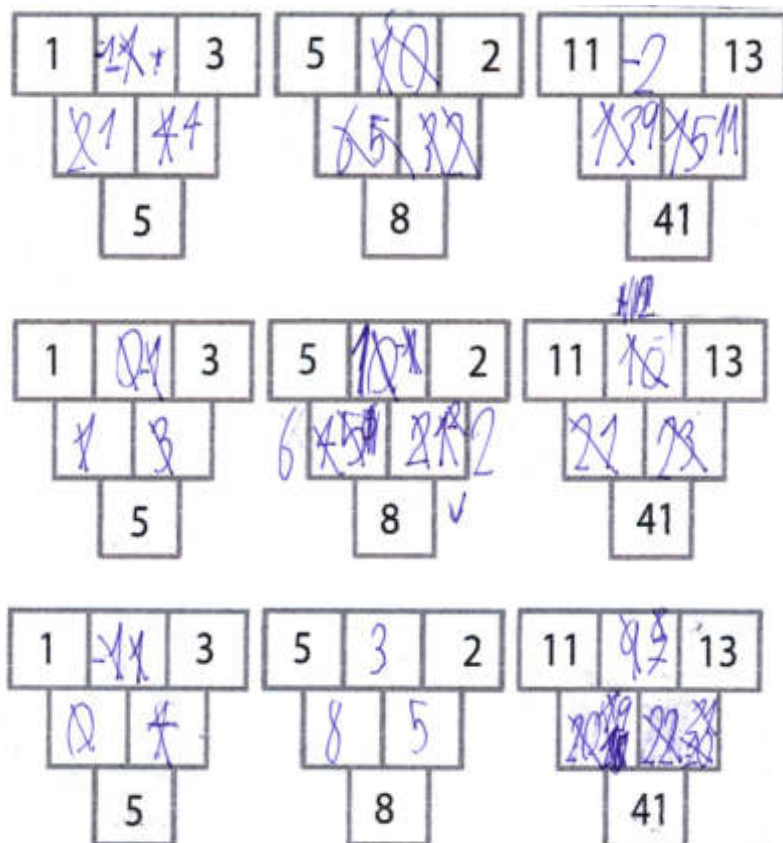
- Někteří žáci změnili zadání tak, aby nepoužili záporná čísla (3. a 4. ročník), pro některé žáky úloha neměla řešení (3. a 4. ročník) – viz následující ukázka:



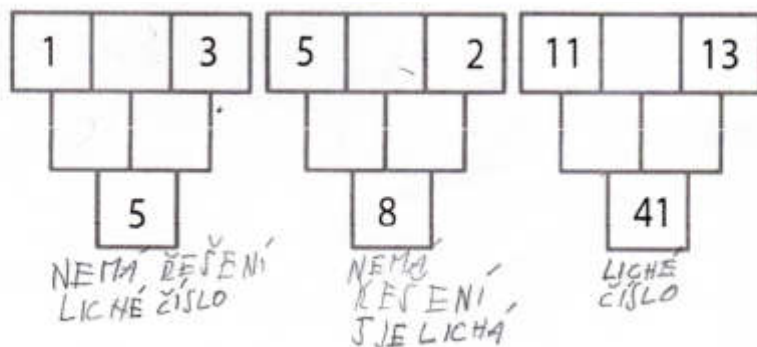
- Někteří žáci zapomínali psát znaménko mínus před číslem.
- Z první série většina žáků zvládla první dvě úlohy, se třetí už si někteří nevěděli rady. Někdo řešil úlohy tak, že rozkládal spodní číslo do prostředního řádku a pak dopočítal číslo v prvním řádku.



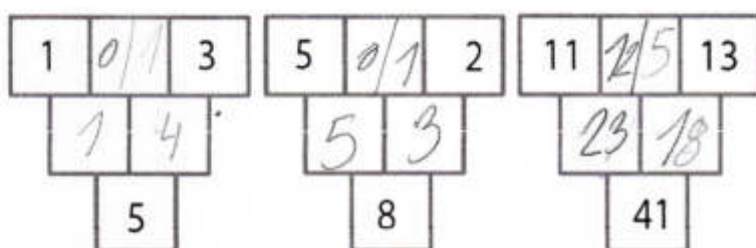
- U druhé série většina žáků dosadila do prvních dvou trojúhelníků nejdříve 1 a potom 0, téměř nikdo tyto varianty písemně nezaznamenal a rovnou z pamětného počítání věděl, že s těmito čísly to nevyjde, u třetího trojúhelníku již většina žáků neúspěšné pokusy písemně zaznamenávala.



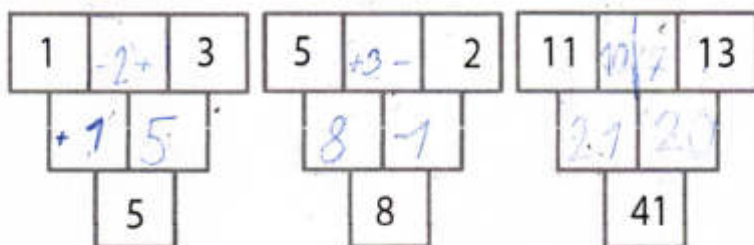
- Další ukázky řešení ilustrují situaci, kdy úlohy nemají pro žáka řešení, a to na základě toho, že vyhodnotí spodní číslo jako liché a pro něj tudíž nerozdělitelné (myšleno na 2 stejné části).



- Tito řešitelé k řešení přistoupili způsobem, kdy prostřední pole horního řádku rozdělují a doplňují do něj 2 hodnoty, aby vycházelo pole níže.



- Dále můžeme pozorovat využití dvou znamének a v poslední úloze také jev, který popisujeme výše (zapsání 2 hodnot do 1 pole).

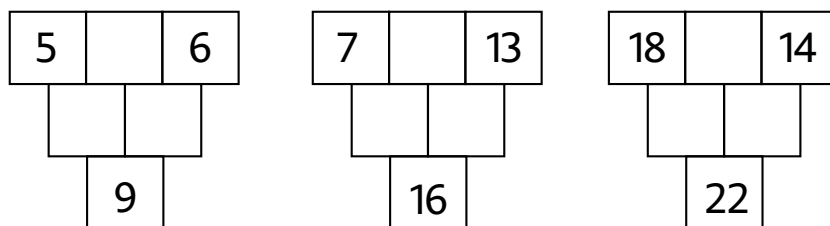


Následná diferenciac, reedukace:

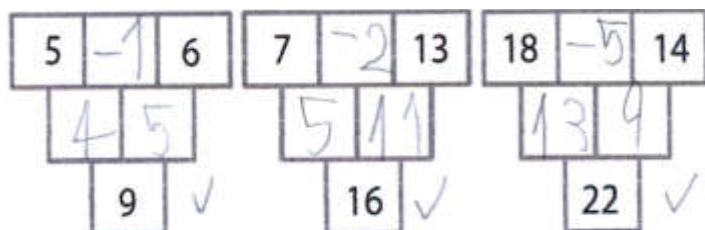
- Pro žáky, kteří na řešení s desetinnými čísly nepřišli, se můžeme zaměřit na práci s pravítkem a mluvit o tom, zda jsou mezi dvěma centimetry ještě nějaké menší díly, případně s nimi vytvořit číselnou osu a na tu zaznamenat poloviny (v tuto chvíli jdeme v poznávacím procesu o úroveň níž, protože úlohu zadanou strukturálně sémantizujeme pomocí jednotek délky).
- Lze využít další možnosti pro sémantizaci, např. ceny v obchodě, stupnice teploměru, digitální váha atd. – tedy rozšiřovat životní zkušenosti žáka s desetinným číslem.
- Ovšem celá série je diagnostická a diagnostikuje, zda už je žák připraven na práci s desetinným číslem. Pokud někdo ještě vývojově připraven není, nemá smysl ho teď násilně a rychle přesytit životními zkušenostmi s desetinným číslem. Proto možná nejlepší reedukací v tomto případě je čas a nechat žáka dozrát.

V rámci následného ověření byla žákům zadána tato série:

Úloha:



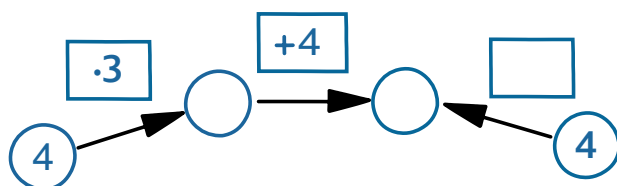
- Ke každému součtovému trojúhelníku žáci dostali tři kopie, aby měli prostor na experimentování. Někdo začal zkoušet desetinná čísla (nejspíš na základě nedávno zadané úlohy s desetinnými čísly).
- Sledovali jsme, zda si žáci uvědomí, že pokud potřebují výsledek zvětšit (tedy když do horního řádku vložili číslo, po kterém jejich trojúhelník měl dole menší číslo než číslo v zadání), musí záporné číslo zmenšit. Většina žáků rozuměla tomu, že „zmenšit záporné číslo“ znamená posunout se na číselné ose směrem doleva od 0 – taková představa je správná, ale ne vždy samozřejmá, často pro žáky „zmenšit číslo“ znamená posunout se blíže k 0 z pravé i levé strany.
- Žáci u prvních dvou trojúhelníků dosadili většinou 0 a 1 a zjistili, že úloha nevychází, dál pokračovali se zápornými čísly.
- Objevili se i žáci, pro které už úlohy nebyly implicitní, ale explicitní. Nemuseli tedy už číslo v prvním řádku odhadovat, ale znali algoritmus, jak ho zjistit výpočtem. Parafráze jednoho žakovského vysvětlení je učitelem zapsána níže:



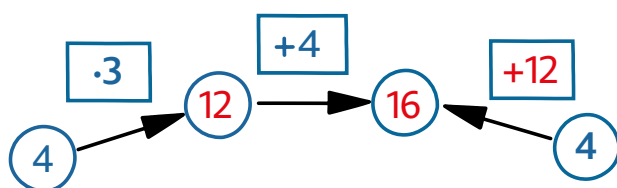
100%
 Když horního
 čísla a aby lek
 rozděl dvěma
 a správně, kolik
 musí odčíst.

HADI

Ukázka úlohy:



Řešení úlohy:

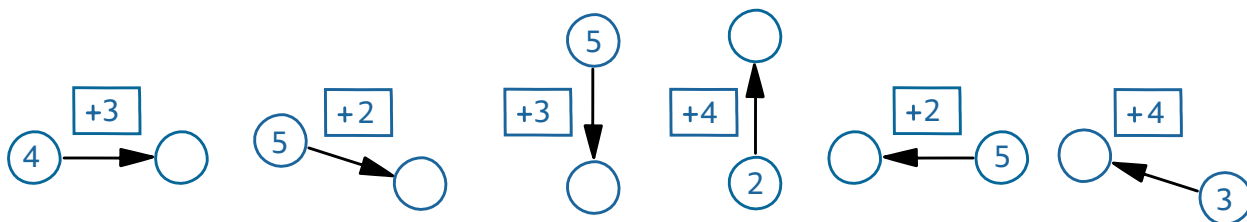


V úlohách z prostředí Hadů se žáci seznamují se dvěma důležitými rolemi čísel. Čísla v kolečkách jsou **stavy**. Čísla nad šipkami jsou **operátory**, které udávají početní operaci. Šipka určuje směr, ve kterém operaci provádíme. S oběma rolemi čísel se běžně setkáváme i v životě. Stavem může být například teplota 3 stupně nad nulou, stav peněz na účtě nebo věk člověka. Změnou operátorem změny může být oteplení o 5 stupňů, příchozí výplata na účet nebo stárnutí člověka v průběhu času. V tomto prostředí mohou žáci zjistit, že některé matematické operace jsou vzájemně opačné (sčítání a odčítání) a jiné převrácené (násobení a dělení). Všechny tyto operace označujeme jako inverzní. Když totiž chceme zjistit neznámý stav proti směru šipky, můžeme k tomu použít inverzní operaci, než která je znázorněná u šipky. Toto prostředí také připravuje žáky na práci s neznámou, kterou zde reprezentují neznámé stavy a operátory. Nabyté zkušenosti žáci později využijí při **řešení rovnic**, do kterých lze všechny úlohy z tohoto prostředí přepsat.

1. ročník

Změna směru šipek

Úloha:



Komentář pro učitele:

Změna směru šipek (nejen vodorovně zleva doprava) má za cíl, aby si žáci zvykali na různé směry šipek a dobře si fixovali, že počáteční i koncové číslo hada mohou být v různých polohách. Důležité je respektovat směr šipky (operace). Navíc v praxi se ukázalo, že pokud se žáci setkali pouze s jedním směrem (vodorovně zleva doprava), žákům, a dokonce i učitelům se prostředí Hadi pletlo s prostředím Krokování. V Krokování jsou šipky, jejichž směry se nemění (směřují pouze vodorovně zleva doprava nebo zprava doleva, viz ukázka: $|\rightarrow| \leftarrow \leftarrow \leftarrow |$).

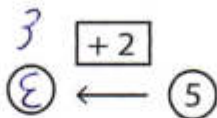
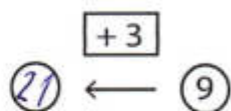
Na základě zkušeností jsme pořadí úloh, které je viditelné v ukázkách řešení, pozměnili oproti původní verzi.

Chceme sledovat:

- zda bude opačná šipka dělat větší potíže,
- zda se objeví situace, kdy bude žák interpretovat otočenou šipku jako operaci odčítání,
- jak žáci přijmou šipky, které vedou dalšími směry, např. shora dolů nebo naopak.

Poznátky:

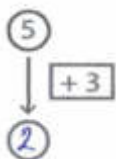
- Někteří žáci si do prostředí Hadi promítají zkušenosti z prostředí Krokování, tedy šipku vnímají jako další krok navíc (když je nad šipkou +3, přičítají +4).
- V úlohách, kde je šipka psaná zprava doleva, dochází k chybnému psaní čísel, např. číslo 12 žák zapíše jako 21. Žák se snaží úlohu číst ve směru šipky a obrací pozice číslic.



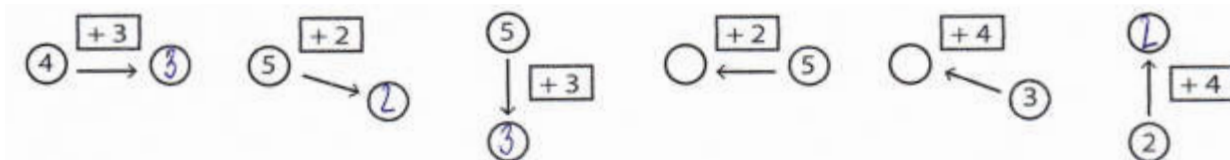
- Šipka směřující vlevo vyvolává u žáků operaci odčítání. Pokud by byl výsledek záporné číslo, žáci evidují kladnou hodnotu (nepoužijí znaménko mínus), případně vnímají nutnost zjistit rozdíl mezi čísly 3 a 4 a výsledek zapsat.



- Šipka směřující dolů vyvolává sémantickou zkušenost odečítání.



- Někteří žáci si všimli „stejnosti“ úloh.
- Pokud žáci využívají k počítání prsty, může učitel sledovat jejich proces. Někteří zatím nemají vytvořený koncept, že 1 ruka = 5 prstů, a počítají stále po jednotlivých prstech, jiní ruku vnímají jako celek o počtu 5. Totéž je pozorovatelné u vnímání počtu 10. Učitel tedy může sledovat, kolik žáků ve třídě dokáže rovnou říct, že na obou rukách máme celkem 10 prstů.
- U několika žáků došlo k situaci, kdy přenášeli poslední viditelnou cifru do prázdného pole ve směru šipky. Zvláštní bylo, že tento způsob nebyl uplatněn u šipek směřujících vlevo a byl narušen i v poslední úloze.



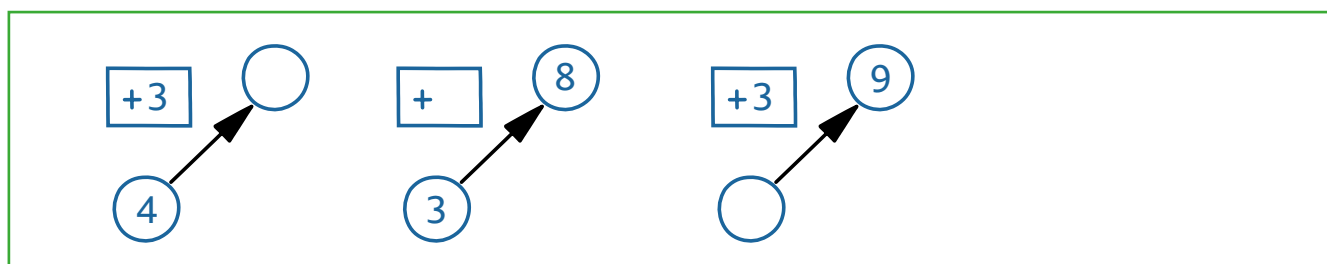
Následná diferenciaci, reedukace:

- Žáci, kterým úlohy nečinily potíže, mohou řešit navazující typy úloh (různé pozice neznámého čísla, řetězení, vyšší číselný obor, různé orientace apod.).
- Žáci, kteří mají potíže s numerikou: Je nezbytné modelování úlohy přes vyjádření daného počtu objekty (např. modelovat vše pomocí víček a sledovat celý proces), využít prostředí Schody (tam je zahrnut proces – operátor změny, stejně jako v Hadech), doporučujeme využít i sémantiku – převést strukturální situaci do slovní úlohy (Mám na stole 4 víčka, přidám k nim 2 víčka, kolik víček budu mít celkem?) a také úlohu vyjmout ze struktury a řešit pouze abstraktně na bázi izolovaných početních úloh, tedy $4 + 2 = ?$.
- Žáci, kteří mají potíže s konvencí: Obecně je u strukturálních prostředí vhodné mít po nějakou dobu (zejména v počáteční fázi) vyvěšenou vyřešenou úlohu, kterou třída řešila jako první. Kdykoli někdo poruší konvence prostředí, podíváme se na tuto úlohu a necháme ji žáka přečíst. Můžeme ji opakovaně rozebrat: „Proč je zde toto číslo? atd.“ a pak se vrátit k úloze, kde byl problém. Druhý způsob je zadat dvě úlohy, které se liší jen směrem šipky. V tu chvíli si žáci často uvědomí, v čem dělají chybu.



Parametr pozice neznámého čísla

Úloha:



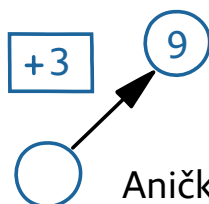
Komentář pro učitele:

Trojice úloh výše tvoří gradovanou sérii. Poslední úloha je nejnáročnější, protože zde neznáme počáteční stav, což je pro žáky obtížné (toto platí obecně pro situace, kdy neznáme počáteční stav). U všech úloh hraje roli také parametr orientace zadání (nakloněné zadání), který celkově přidává úlohám na obtížnosti. Parametry se tedy kombinují.

Chceme sledovat:

- jak budou žáci reagovat na jednu a tu samou úlohu, kde pokaždé vynecháme jiné pole,
- řešitelskou strategii,
- srovnání řešení úlohy v prostředí Hadi a jejich sémantický přepis do slovní úlohy (bude nás zajímat, zda se liší řešitelská úspěšnost u žáků).

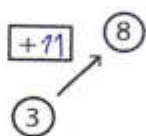
Úloha:



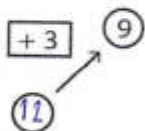
Anička si přidala do pokladničky 3 Kč. Pak měla v pokladničce celkem 9 Kč. Kolik korun měla v pokladničce před přidáním?

Poznatky:

- Žáci sčítají stavy a součet doplní na pozici operátoru – objevilo se opakovaně, častěji v situaci, kdy šipka směřuje vpravo, byla ale i situace, kdy na pracovním listu byly zapsané dvě úlohy stejného typu pod sebou, obě vodorovně umístěné, jedna vyřešena správně, druhá se součtem stavů (součet uveden jako operátor).



- Někteří žáci nerespektují směr šipky. Tato chyba se objevovala u velkého množství žáků. Vezmou tedy dvě známá čísla ze zadání a jejich součet zapíší do volného pole.

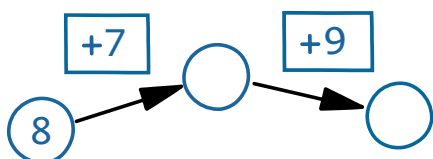


- Všichni žáci dopočítávají, u nikoho se neobjevilo odečítání.
- Srovnání úspěšnosti úlohy ve struktuře a sémantice nebylo jednoznačné. Obě úlohy byly pro žáky náročné, a to zejména utajeným počátečním stavem.

Následná diferenciaci, reedukace:

- Žáci, kterým úlohy nečinily potíže, mohou řešit navazující typy úloh (řetězení, vyšší číselný obor, různé orientace apod.).
- Žáci, kteří mají potíže s numerikou: modelování situace přes reálné objekty, využití prostředí Schoody.
- Žáci, kteří mají potíže s konvencí: diskuze nad vyřešenými úlohami, návrat k jednodušším typům úloh, posilovat zkušenosti s různými orientacemi zadání a různými směry šipek.
- Žáci, kteří bez obtíží řešili úlohy v Hadech i slovní úlohy, mohou řešit náročnější situace s využitím řetězení operací, např.:

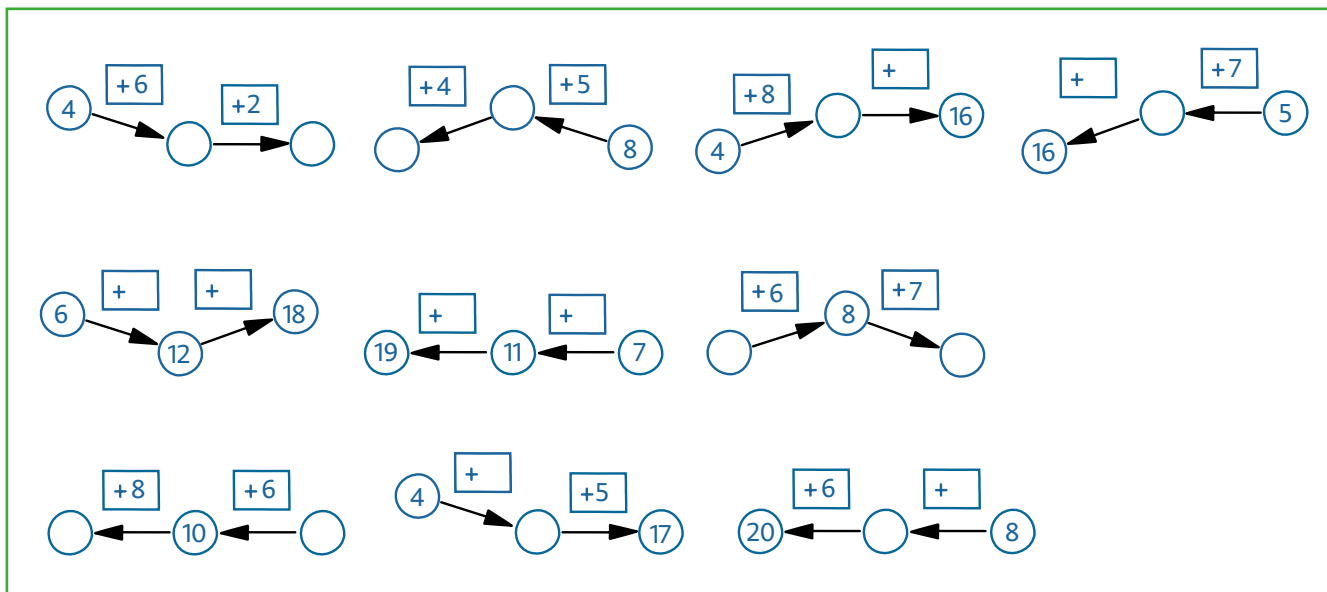
Úloha:



Maruška měla v kasičce 8 Kč. Babička jí přidala 7 Kč a dědeček 9 Kč. Kolik korun má v kasičce teď?

Řetězení operací

Řetězení můžeme realizovat postupným rozšiřováním, tedy „prodlužováním“ hadů, např. stav + operátor = stav, stav + operátor = stav + operátor = stav atd. V následující sérii zachováváme jednotný parametr nařetězení hadů (stav + operátor = stav + operátor = stav) a gradujeme pozicemi hledaného čísla.



Komentář pro učitele:

Zde se nabízí gradovaná série několika úloh s řetězením operací. U všech úloh je orientace zadání podobná (vodorovná), měníme známé stavy a operátory a jejich pozici od nejlehčí po nejobtížnější úlohu a zároveň směr šipek.

Chceme sledovat:

- která úloha bude žákům dělat největší potíže a proč,
- zda činí potíže umístění doplňovaných čísel, případně domluva se změnou orientace šipek (ve třídě budou jistě žáci, kteří při změně šipky použijí jinou operaci).

Při zadávání série úloh se záměrem sledovat, jak se žáci vyrovnají s řetězením úloh, je možné využít jakoukoli gradovanou sérii složitějších hadů. Můžeme samozřejmě měnit pozici zadání. Ale neměli bychom volit příliš komplikované hady, protože jinak bude diagnostika velmi obtížná.

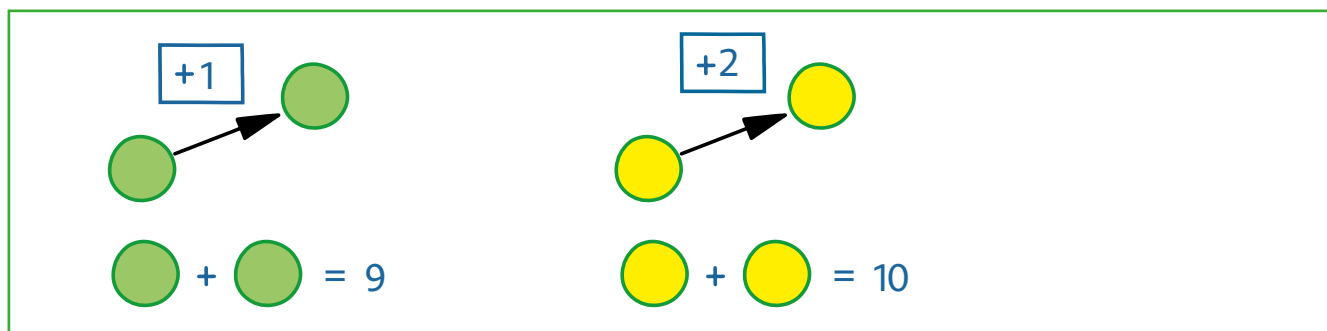
Následná diferenciacce, reedukace:

- U tohoto typu úloh se řídíme výše zmiňovanými náměty pro reedukaci potíží s numerikou či s konvencí.
- Žáci, kteří úlohy zvládají bez potíží, mohou k těmto řetězeným úlohám vytvářet slovní úlohy.

2. ročník

Hadi s podmínkou

Úloha:



Komentář pro učitele:

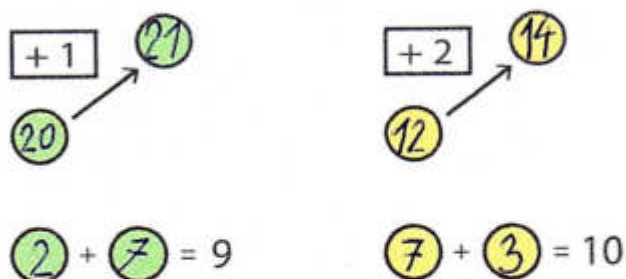
Žáci prostřednictvím hadů s podmínkou získávají zkušenosti s řešením soustav dvou rovnic se dvěma neznámými. V zeleném hadovi víme, že dvě hledaná čísla jsou po sobě jdoucí, protože druhé číslo je o 1 větší než první. Dále víme, že jejich součet je 9. Mohli bychom také říci, že rozdíl hledaných čísel je 1 a jejich součet je 9.

Chceme sledovat:

- jak budou žáci postupovat, tedy zda zvolí metodu pokusů, nebo vypíší rozklady čísla 9 a z nich vyberou správnou možnost, (Práce se žlutým hadem bude obdobná jako se zeleným, jen se čísla liší o 2. Obě úlohy zachovávají stejnou orientaci zadání hada.)
- zda některý z žáků objeví pravidlo, že když se součet dvou čísel liší o 1, tak výsledek je vždy liché číslo, a pokud se dvě čísla liší o 2, výsledek je vždy sudé číslo.

Poznátky:

- Někteří žáci řeší jen spodní podmínku, tedy rozklad. Následně čísla dosadí do hada, ale neřeší numerickou správnost.
- Pokud s tímto typem úloh nemají žáci zkušenost, nedá se předpokládat propojení úlohy a podmínky (žáci tedy řeší izolovaně rozklad a poté izolovaně hada). S touto chybou se setkáváme často i v případě, kdy žáci zkušenosti mají. Tuto situaci dokladuje následující řešení:

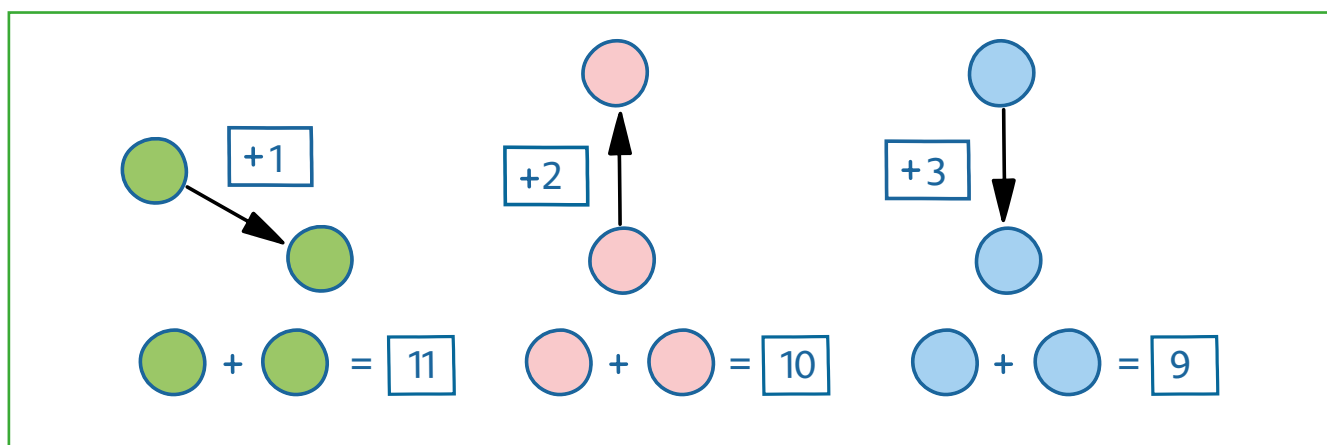


- Objevení pravidla součtu bylo velice ojedinělé. Učitel může tento objev podpořit tak, že dává žákům prostor vyřešit více úloh.

Následná diferenciacce, reedukace:

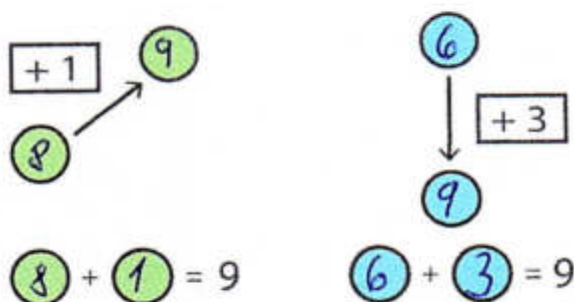
- Pokud žáci řešili hada a podmínku izolovaně, je efektivní vrátit se k vyřešené úloze a společně diskutovat, co žáci v úloze vnímají. Je důležité, aby zaznělo pojmenování, že obě části tvoří jednu úlohu. Následně žáci potřebují získat zkušenosti s tímto typem úloh, proto je dobré zadat jim podobné úlohy k řešení např. do skupiny. Jako efektivní postup se také ukázala manipulace s připravenými kolečky a kartičkami (se zachováním barev).
- Další možností pro reedukaci je propojení hodnot pomocí přímých šipek (z horního prvního stavu udělat šipku ke spodnímu prvnímu stavu).
- Pokud žáci nemají s úlohami potíže, lze jim zadat podmínkové úlohy s různou orientací šipek, což přináší následující série.

Úloha:

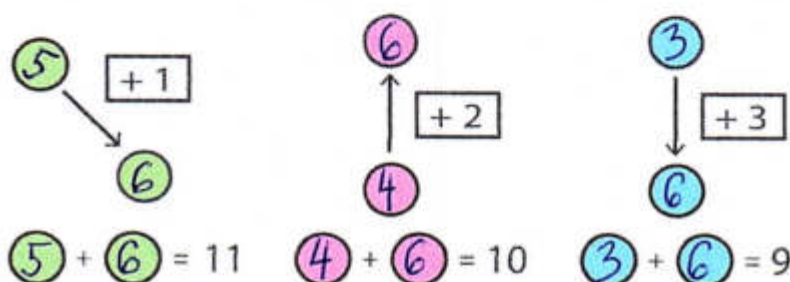


Poznátky:

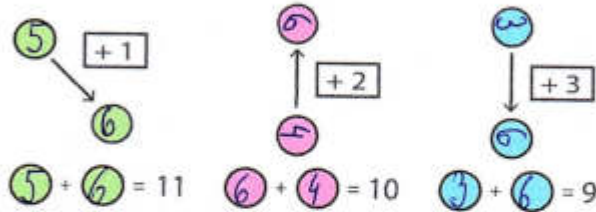
- Žáci často zaměňují součet čísel z podmínky za druhý stav v hadovi.



- Nejčastější strategií byla metoda opakovaných pokusů. Jedna žákyně si všimla, že ve všech třech hadech této série je druhé číslo 6 a první čísla se zmenšují vždy o 1, na toto upozornila celou třídu. (Tento jev se vztahuje pouze k této sérii, nejedná se o obecné pravidlo.)



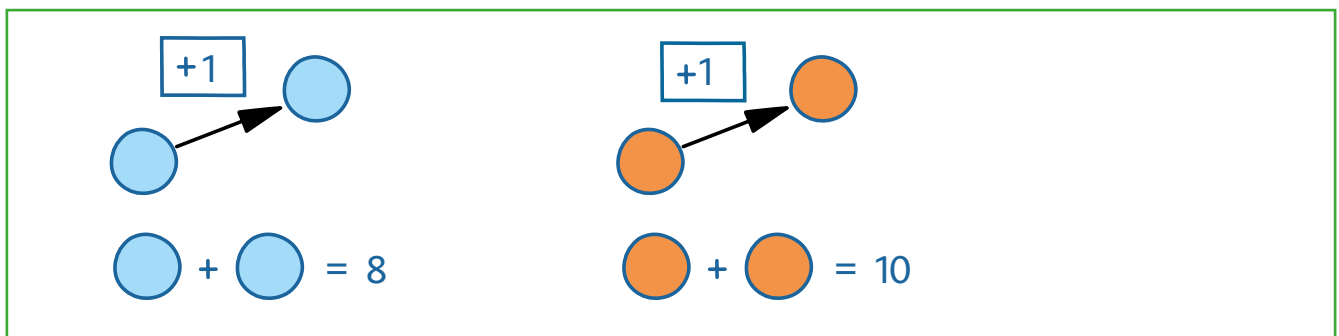
- S přibývajícími zkušenostmi je u některých žáků již patrná strategie v řešení, a to postupné dosazování dvojic čísel (systematicky např. od nejmenších, většinou se jedná o rozklady součtu, který je zadán v podmínce).
- U některých žáků se objevil problém se směrem šipky, jako funkční se ukázala reedukace, kdy byla ze strany učitelky doplněna v hadovi hodnota jednoho stavu.
- Někteří žáci mají potřebu si otočit papír se zadáním tak, aby se svislé šipky dostaly do horizontální polohy, např.:



- Objevuje se již strategie odečítání.

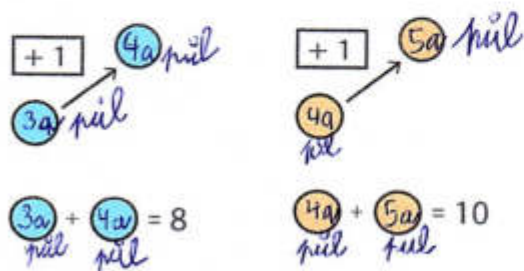
Z hlediska diagnostiky (případně následné diferenciaci) můžeme také zadat úlohu pro experty, kde se čísla liší o 1 a výsledek je sudé číslo. Můžeme sledovat, zda žák bude ochotný čísla půlit, nebo pro něj úloha nebude mít řešení.

Úloha:

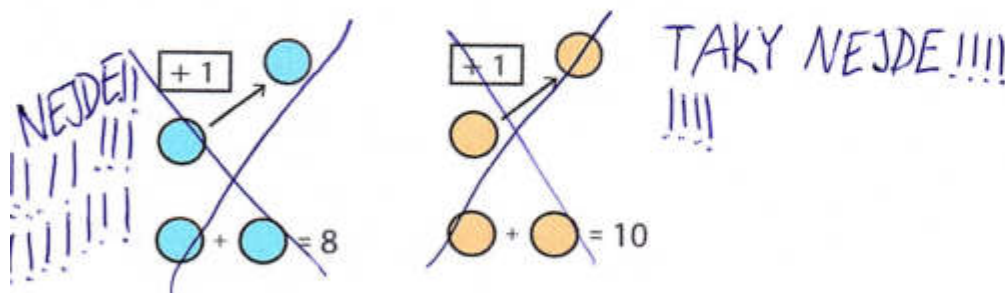


Poznátky:

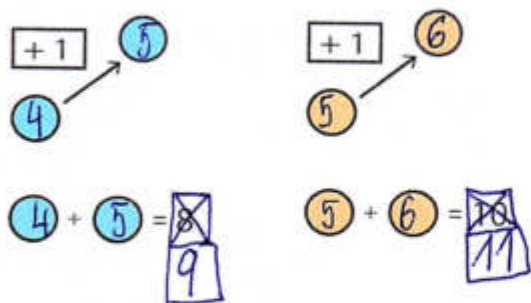
- Již někteří druháci přijdou s možností půlení:



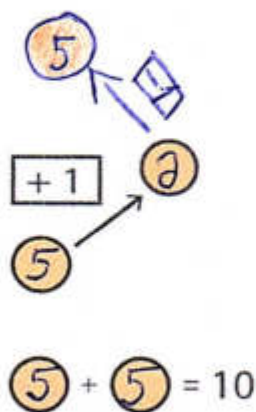
- Pro některé žáky je tato úloha zdroj pro jejich rozčilení, jako je to vidět u následujícího řešení.



- Pro některé žáky úloha nemá řešení, někteří zvolili úpravu zadání tak, aby dokázali úlohu řešit. Žákyně toto navíc okomentovala, že výsledek v podmínce musí být liché číslo, když se v hadovi přičítá 1.

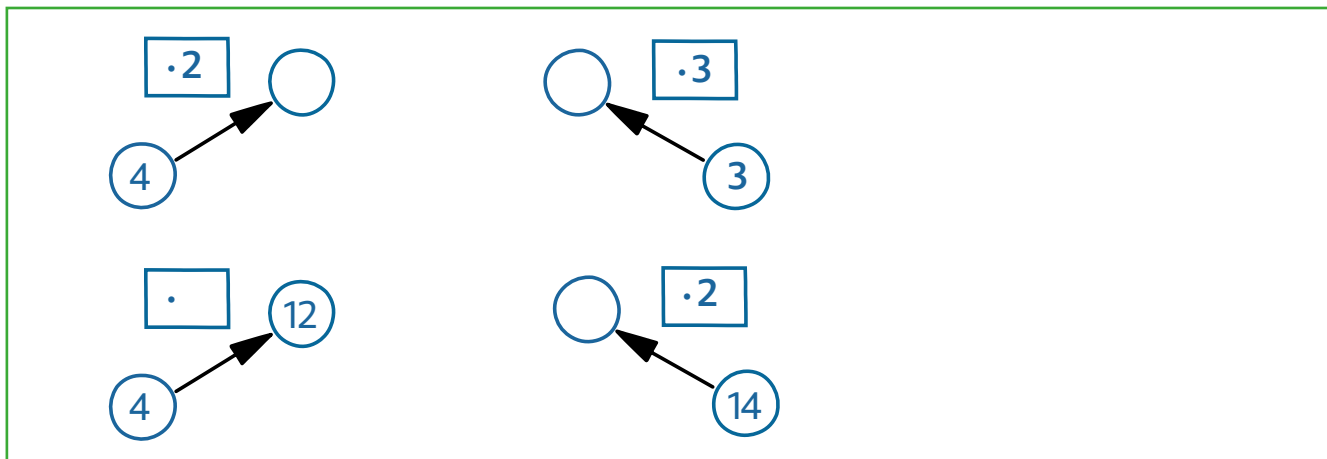


- Snaha vyřešit úlohu vedla několik žáků také k úpravě hada ve smyslu jeho rozšíření, např.:



Operace násobení

Úloha:



Komentář pro učitele:

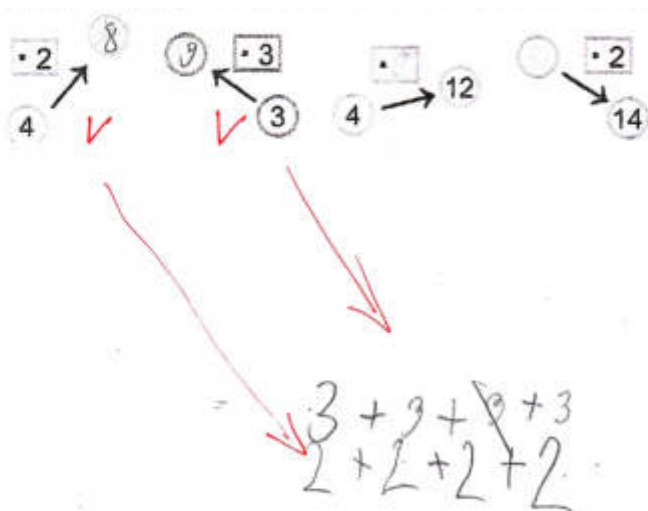
U série hadů výše se soustředíme na operaci násobení, která se objevuje ve **skaláru změny**.

Chceme sledovat:

- jakým způsobem budou žáci hady řešit (opakované přičítání, využití násobkové tabulky, z paměti).

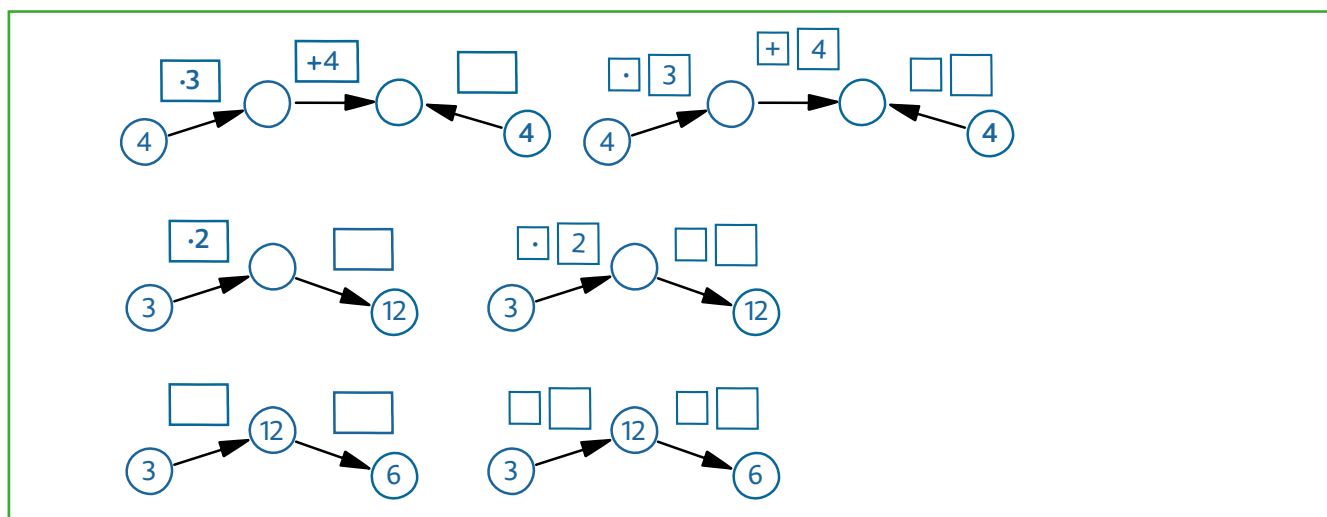
Poznatky:

- Někteří žáci využili oporu násobkové tabulky, jiní ji nepotřebovali.
- Objevilo se také využití opakovaného sčítání pro vyřešení násobkového spoje:



Kombinace dvou operací

Úloha:



Chceme sledovat:

- jak se žák vypořádá s doplněním operátoru změny nebo skaláru do hada ve chvíli, kdy je jak operátor nebo skalár, tak operace oddělena (dvojí provedení grafiky).
- jakou operaci žák zvolí (ve všech případech může doplnit operaci násobení a dané číslo nebo operaci sčítání a dané číslo).

Poznatky:

- Někteří žáci si uvědomili stejnost úloh, a i přesto vytvořili dvě různá řešení, jiní si také stejnost uvědomili, ale napsali jedno stejné řešení.
- Někteří žáci píší znaménko operace za číslo (v tom případě, kde se doplňovalo znaménko i číslo do jednoho obdélníkového políčka – ale to může být způsobené i směrem šipky).

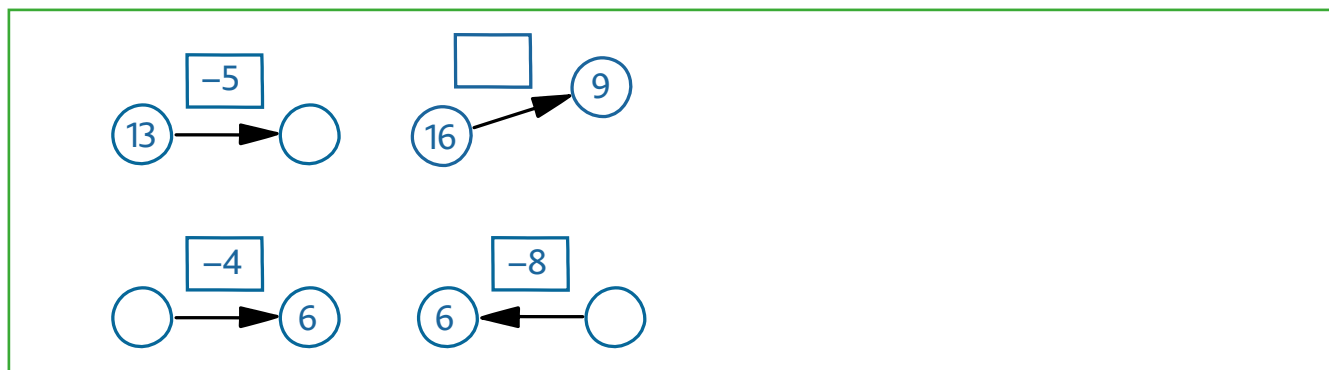
Následná diferenciacce, reedukace:

- Pokud žáci píší znaménko operace až za číslo, je efektivní poskytovat jim oba rámečky zvlášť. Tím podpoříme zápis znaménka před číslo.

3. ročník

Operace odčítání

Úloha:



Komentář pro učitele:

Jednoduchá série čtyř hadů výše je gradovaná směrem šipky, pozicí neznámého čísla, zároveň se v hadech objevuje operace odčítání nezávisle na dalších jiných operacích (např. v učebnici je operace odčítání v rámci složitějšího hada spolu s dalšími operacemi).

Chceme sledovat:

- jak se žákům daří jednotlivé hady řešit,
- zda bude ještě hrát roli směr šipek,
- zda se potvrdí vyšší chybovost u posledního hada, která může vzniknout nerespektováním směru šipky, kdy bude žák postupovat lineárně a výsledek bude záporné číslo, nebo tvrzení, že úloha nemá řešení.

Poznatky:

- Většina žáků s úlohami neměla potíže.
- Nejvyšší chybovost byla potvrzena v poslední úloze, vyšší byla i u předposlední úlohy (některé žáky stále limituje směr šipky).

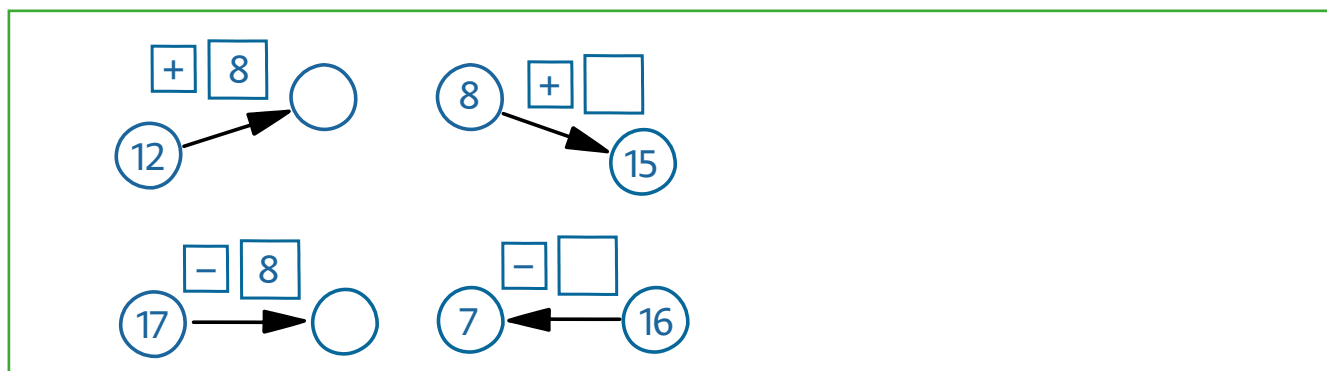


Následná diferenciacce, reedukace:

- Pokud mají žáci potíže se směrem šipek, je důležité využít náměty pro reedukaci zmiňované v předchozích částech. Jako efektivní se ukázala reedukace pomocí úloh z prostředí Myslím si číslo.
- Pokud tyto úlohy nečiní žákům potíže, můžeme následně zvýšit číselný obor, zvolit řetězení operací a jejich kombinaci.

Operace odčítání, sčítání

Úloha:



Komentář pro učitele:

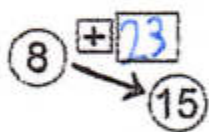
V rámci diagnostiky vedle sebe postavíme dvojici hadů s operací sčítání v operátoru změny a dvojici hadů s operací odčítání v operátoru změny.

Chceme sledovat:

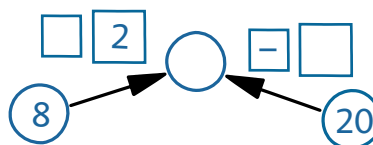
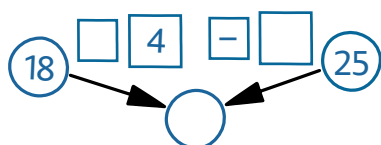
- jaké jsou žákovské strategie a kdy žák přestává dopočítávat.

Poznátky:

- U některých žáků se objevovaly chyby popisované výše u předchozích typů úloh, např. evidování součtu na pozici operátoru:



Kombinace operací a více řešení



Komentář pro učitele:

U dvou úloh výše se objevuje více možných řešení.

Chceme sledovat:

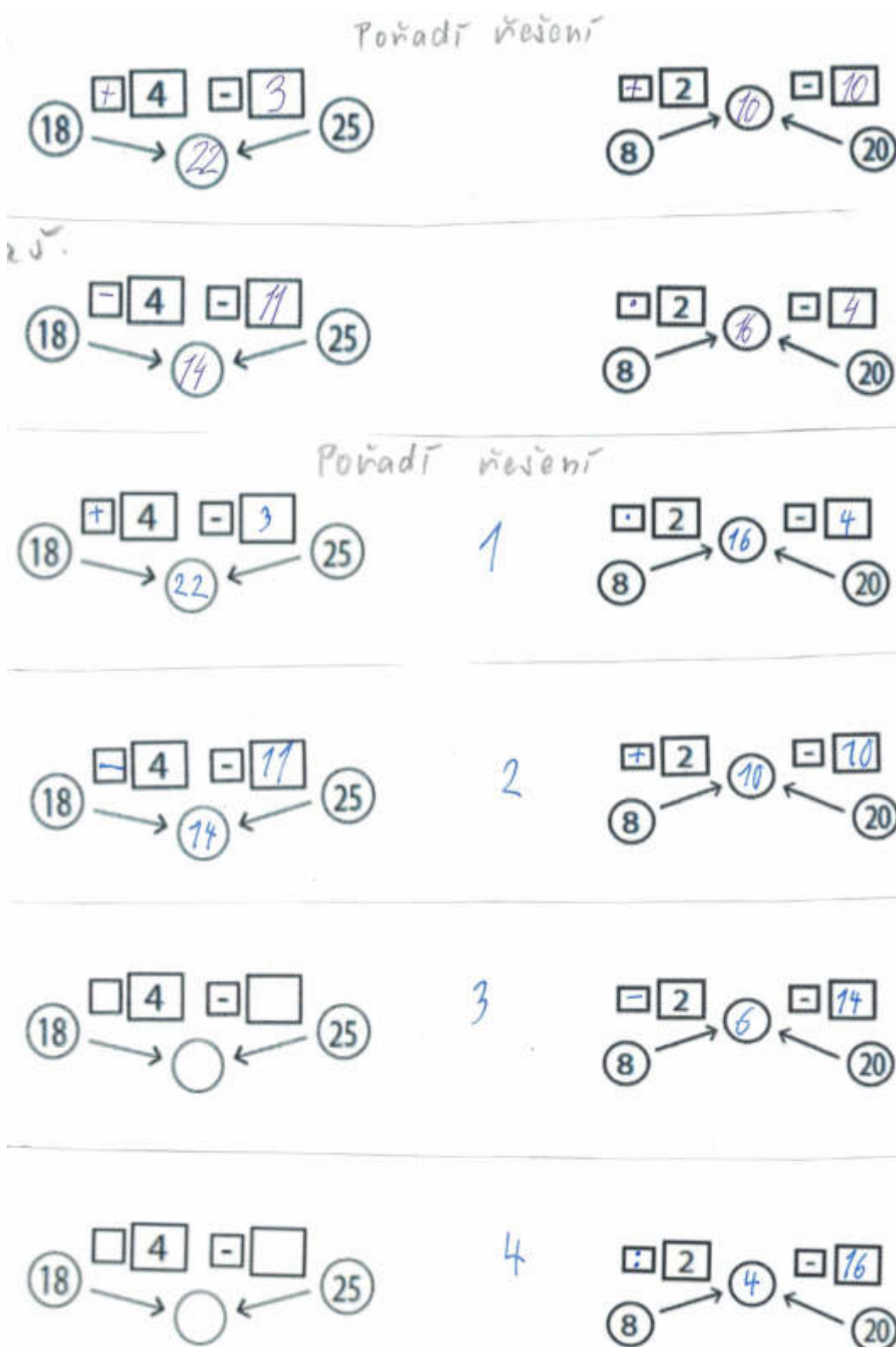
- zda si žák všimne, že některé úlohy nabízí více řešení.

Poznátky:

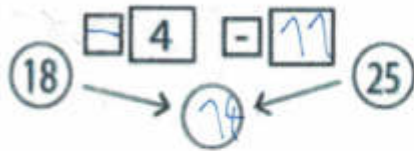
- Nikdo z žáků sám od sebe nepřišel s myšlenkou, že by měly úlohy více řešení, až po výzvě ze strany učitele.
- Pokud učitel uvedl na pracovní list každou úlohu dvakrát, žáky to podpořilo v hledání více řešení.

Bez tohoto doplňku se žáci nepokoušeli více řešení hledat. Zároveň hledali takový počet řešení, kolikrát byla úloha natištěna na pracovním listu.

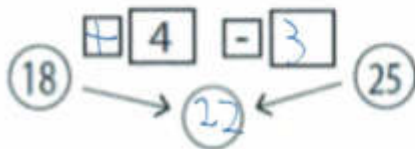
- Objevila se i argumentace, že v prvním hadovi nemůže být u první operace násobení, protože by výsledek přesáhl 25 (na základě odhadu) a zároveň tam nemůže být dělení (to by neuměl vypočítat).



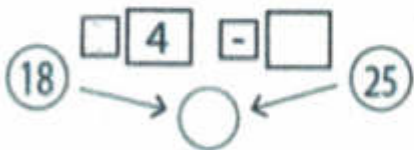
MATY



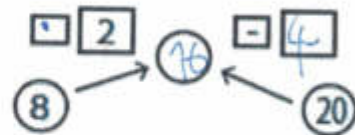
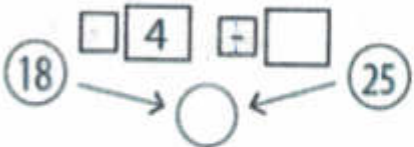
MATY



MATY



MATY



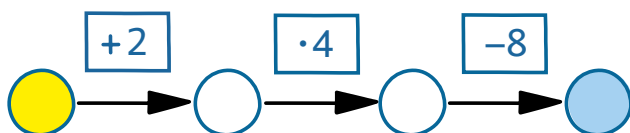
Hadi s kouzlem

Komentář pro učitele:

Úlohy jsou motivovány tím, že **učitel kouzlí**. Tento způsob je dobrým předpokladem pro zobecnění dané situace. I někteří žáci budou chtít být kouzelníky a zjistit „trik“, jakým had funguje.

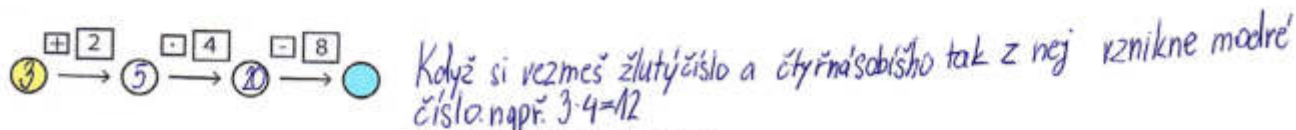
Úloha:

Když do žlutého pole dáš číslo, vyřešíš hada a řekneš mi číslo v modrém poli, rychle uhodnu, jaké číslo bylo v poli žlutém. Víš, jak to dělám?



Poznátky:

- Pro objevení kouzla stačilo některým žákům vyřešit úlohu dvakrát.
- Někteří učitelé připravili pro žáky rovnou několik šablon pod sebou (učitel je také může mít nakopírované, ale žák by si pro tyto kopie musel dojít sám na základě vlastního rozhodnutí – je to jiné, než když žák dostane připravený pracovní list s předtištěnými šablonami).
- Žáci měli tendenci zadávat do prvního pole vysoká čísla i záporná čísla.
- U několika žáků se objevila evidence do vlastní tabulky a následná formulace „triku“:

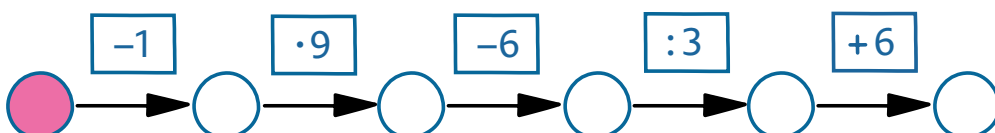


Ž	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

Ž	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
M	84	88	92	96	100	104	108	112	116	120	124	128	132	136	140	144	148

Úloha:

Vlož si do růžového pole číslo. Hada vypočítej. Když mi řekneš, jaké číslo vyšlo na konci hada, uhodnu rychle, jaké číslo sis dal do růžového pole.



Komentář pro učitele:

Úloha cílí směrem k zobecnění (poslední číslo – 1, pak : 3 a získám růžové).

Chceme sledovat:

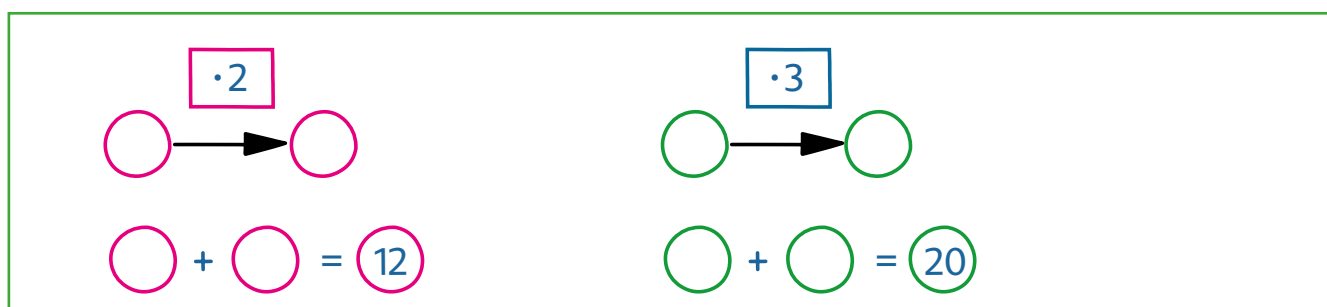
- zda žáci objeví zobecnění.

Poznátky:

- Tato úloha byla pro žáky náročnější, a to zejména numerickou. Oproti předchozímu kouzlu nedokázali rychle provádět jednotlivé výpočty. Na zjednodušení zde žáci neodkazovali.

Hadi s podmínkou

Úloha:



Chceme sledovat:

- jakým způsobem žáci pracují s úlohou, kde se objevují dvě soustavy se dvěma různými operacemi v rámci jedné úlohy.

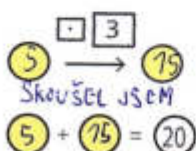
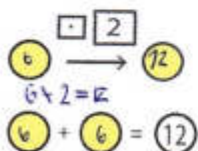
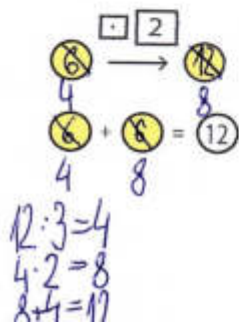
Poznátky:

- Žáci často vnímali násobení 2 jako opakované sečtení téhož čísla, u násobení 3 mnoho žáků neumělo úlohu vyřešit.
- Někteří žáci řeší jako oddělené úlohy (had, podmínka). Velmi často ale vyřeší hada, druhý stav doplní do podmínky na první místo a potom dopočítají podmínku. V některých případech žáci nejprve řešili podmínku. U druhé úlohy pak psali, že nelze vyřešit, jelikož si udělali rozklad 20 na 10 a 10 a toto číslo vnímali jako to koncové číslo v hadovi, viz řešení:

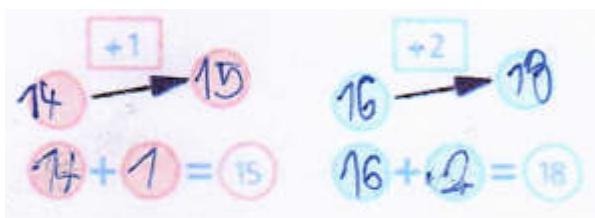
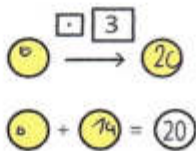
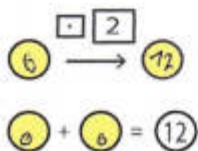
Handwritten student solutions for the 'Hadi s podmínkou' problem. The first system (pink) shows a box with 2 above an arrow from a circle with 6 to a circle with 12, and below it, $6 + 6 = 12$. The second system (green) shows a box with 3 above an arrow from a circle with 7 to a circle with 21, and below it, $7 + 10 = 20$.

- Žáci tyto úlohy často řeší metodou opakovaných pokusů, viz následující ukázka řešení:

Handwritten student solutions for the 'Hadi s podmínkou' problem using trial and error. The first system (pink) shows a box with 2 above an arrow from a circle with 4 to a circle with 8, and below it, $4 + 8 = 12$. The second system (green) shows a box with 3 above an arrow from a circle with 5 to a circle with 15, and below it, $5 + 15 = 20$. Below these are two trial calculations for each system: 1. $3 \cdot 2 = 6$, $3 + 6 = 9$; 2. $4 \cdot 2 = 8$, $4 + 8 = 12$. For the second system: 1. $5 \cdot 3 = 15$, $5 + 15 = 20$.

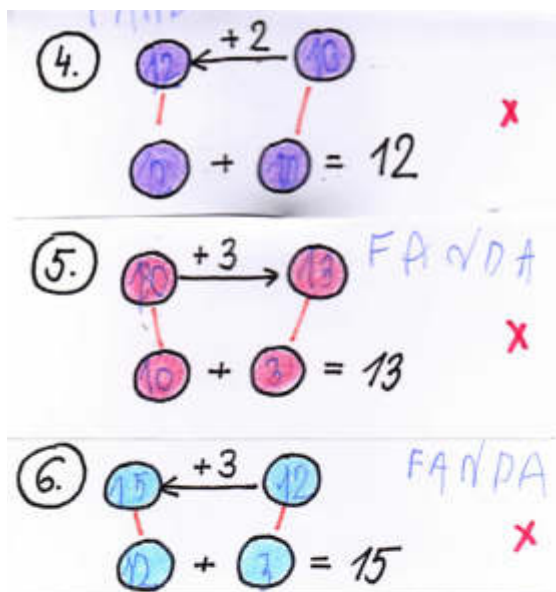


- Po připomenutí významu podmínky a jasném pojmenování, že čísla z hada se musí úplně stejně objevit v podmínce, zvládli někteří žáci svou chybu opravit.
- V některých řešeních se objevila snaha o to, aby had vyšel stejně jako zadaný součet u podmínky:



Následná diferenciaci, reedukace:

- Pokud žáci oddělují hada a podmínku, lze využít prezentaci vybraných řešení (problematických i správných) a následným přidělením kartiček k řešením, která považují žáci za správná. Důležité je propojení s argumentací.
- Byla ověřována i vizuální podpora propojení hada a podmínky, která ovšem nemusí zaručit úspěch, viz následující řešení:



Možností je také barevné odlišení stavů (viz již naše doporučení výše), tedy aby první stav v hadovi měl stejnou barvu jako první stav v podmínce a toto propojení ještě podpořit vizuálně (spojovací čárkou).

4.-5. ročník

Otevření hadi

Komentář pro učitele:

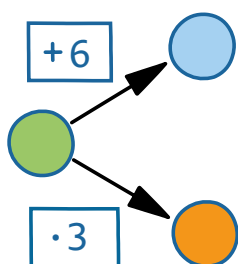
Než žáci získají zkušenost s otevřenými hady, kde je **spojení hada a tabulky**, můžeme napřed nabídnout úlohu, kde se objeví pouze had (viz níže) a zadání: Doplň do zeleného pole postupně čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Chceme sledovat:

- zda některý žák přijde s návrhem tabulky.

Úloha:

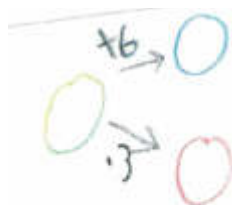
Doplň tabulku pro modro-oranžového dvojhada.



z	1	2	3	4	5	6
m						
o						

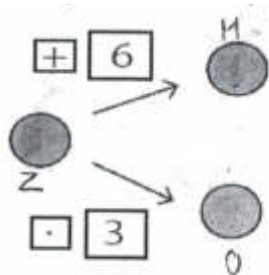
Poznátky:

- Žáci dostali tuto úlohu nejprve bez tabulky (viz text výše). S tímto typem hada se setkali poprvé. Žáci hledali více řešení. Většina zapisovala jednotlivé hady, jedna dívka zvolila systematickou evidenci („tabulku“), kterou nazvala grafem. Vysvětlila, co v ní lze nalézt. Sama řekla, že nemusela nic objevovat, že jí to takto přišlo logické. Vždy se to zvedá o stejnou hodnotu. „Když je to krát 3, ta oranžová, tak vždycky se to zvedá o 3.“ Dále vysvětlila zvyšování zelené a modré o 1. Záznam do tabulky zvolila proto, že jí přišla nejjednodušší pro záznam posloupnosti, kterou objevila. Po společném sdílení začalo tabulku využívat více žáků ve třídě.



0	6	0	16	22	48
1	7	3	17	23	51
2	8	6	18	24	54
3	9	9	19	25	57
4	10	12	20	26	60
5	11	15	21	27	63
6	12	18	22	28	66
7	13	21	23	29	69
8	14	24	24	30	72
9	15	27	25	31	75
10	16	30	26	32	78
11	17	33	27	33	81
12	18	36	28	34	84
13	19	39	29	35	87
14	20	42	30	36	90
15	21	45			

- Další objevy ve třídě: Když dám do zeleného políčka lichá čísla, vyjdou mi v oranžovém a modrém lichá čísla. Pokud tam dám sudé číslo, vyjdou mi sudá.
- V úloze s tabulkou se objevila situace, že žáci dosazovali hodnoty do hada, počítali správně, ale k chybě došlo při přepisu do tabulky (nezohlednili předepsané hodnoty pro zelené pole).



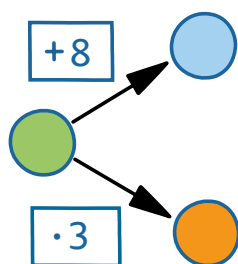
z	1	2	3	4	5	6
m	10	11	12	13	14	15
o	12	15	18	21	24	27

+1 +3

stačí přidávat čísla a vychází to

Úloha:

Doplň tabulku pro modro-oranžového dvojhada.



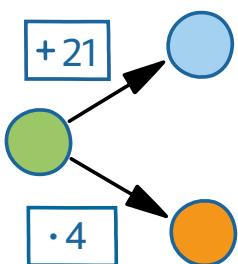
z	1	2	3	4	5	6
m						
o						

Poznátky:

- Někteří žáci začali v určité chvíli doplňovat zbytek tabulky dle pravidelností tabulky, ale přesto někteří žáci, kteří si všimli pravidelností, řešili ve všech případech (ve všech sloupcích) hada – to ukazuje, že v tabulku ještě nemají takovou důvěru a potřebují mít jistotu tím, že vyřeší hada.

Úloha:

Doplň tabulku.



z	3							
m							41	
o		20						
m-o			0	-6	-9	-12		-129

Komentář pro učitele:

Tady může učitel sledovat, zda žáci doplňují tabulku metodou pokusů, nebo již používají nějaké objevené vztahy a pravidelnosti: např. zjistí, že rozdíl $m - o$ v prvních dvou sloupcích je 12 a 6, čísla v zeleném poli budou 3 a 5. To již může vést k hypotéze, ověření a rychlejšímu doplňování tabulky.

Poznátky:

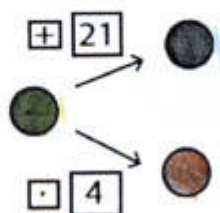
- Jako problematický se ukázal poslední řádek tabulky, žáci mu nerozuměli. Mezi předchozí a touto úlohou je velký gradační skok.
- Mnoho žáků gumovalo, je vhodné dát k dispozici více tabulek.
- Část žáků pokračovala v prvním řádku chybně v posloupnosti lichých čísel 3, 5, 7, 9 atd. (případně někdo pokračoval v posloupnosti násobků čísla 3), aniž by došlo ke kontrole, zda tomu odpovídají i další řádky tabulky. Tento jev ukazuje, že tuto úlohu vnímají žáci silně procesuálně.
- Někteří žáci měli správně vše až na poslední sloupec. To ukazuje, že nejsou silní v numeraci s velkými zápornými čísly, ale v tabulce se orientovat umí.
- Objevilo se také velmi zajímavé řešení, kdy si žák sestavil vlastní tabulku, kde doplňoval zelené pole postupně čísla od 1. Zřejmě mu dělalo velké potíže, že původní tabulka v prvním řádku „skákala“. Je výborné, že si tento žák dokázal úlohu sám individualizovat – původní tabulka je pro něj obtížná, tak si vytvořil vlastní, jednodušší. Jeho řešení uvádíme níže:

2)

Doplň tabulku

9.2

KUBX



z	3	4	5 7	9	10 11	12 13	14 15	16 17
m	24	25	26 27	28	31	32 33	41	42 43
o	12	20	28 36	40	44	80	88 96	104 112
m-o	12 28	5	0	-6	-9	-12	-39	-129



Handwritten calculations and a number line:

72 + 72 = 144

288 - 93 = 195

288 - 93 = 195

40

140

78 + 39 = 117 + 12 = 129

39 + 39 = 78

78 + 78 = 156

Number line from 1 to 21:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32										
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44										
78	15	12	9	6	3	0	-3	-6	-9	-12										

- Někteří žáci v řádce „m-o“ sčítají „m + o“ (chyba konvence).
- Někteří žáci vyplnili první dva sloupce tabulky a v dalších, kde byl zadán rozdíl „m – o“, se už zasekli a nevěděli, jak postupovat.
- Několik žáků mělo tabulku zcela správně, nenašli ale žádný explicitní vztah nebo způsob, jak sloupce vyplňovat. Zkoušeli čísla, např. číslo 10, a všimli si, že splňuje určitý sloupec tabulky pro zadanou diferenci. To je poměrně úspěšná strategie pokusů a aproximací, diagnostikuje to komplexní vnímání tabulky.

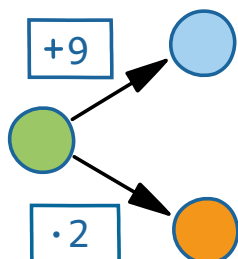
Následná diferenciaci, reedukace:

- Pokud žáci vnímají úlohu silně procesuálně a nekontrolují všechny hodnoty ve sloupcích, je potřeba nasměrovat jejich pozornost právě na sloupce. Můžeme jim předložit tabulku přehnutou podle sloupců a žáci by nejdříve viděli první dva sloupce, po jejich vyplnění by odkryli další sloupec atd. Můžeme jim dát sloupce také rozstříhané, tímto způsobem potom může vzniknout jedna velká tabulka na tabuli v okamžiku, kdy tam každý žák připevní svůj vyplněný sloupec. Tím zároveň úlohu individualizujeme, protože můžeme každému žákovi dát přesně takový sloupec, který odpovídá jeho současných schopnostem.
- Pokud úloha žákům nečiní potíže, můžeme jim zadat výzvu, aby sami vytvořili tabulku s vybranými údaji, nebo výzvu, aby podle vyplněné tabulky vytvořili hada.

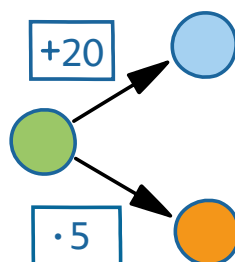
Úloha:

Jaké číslo musíme dát do zeleného pole, aby modré a oranžové číslo bylo stejné?

a)



b)

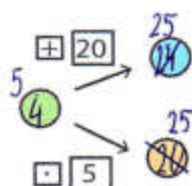
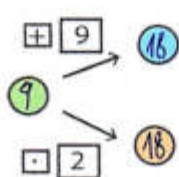
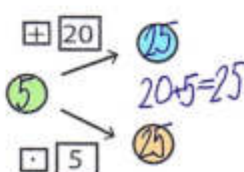
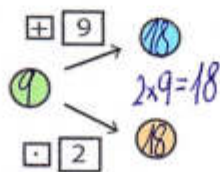


Komentář pro učitele:

Sledujeme, zda žáci dokáží řešit úlohu bez tabulky, případně zda někoho napadne si tabulku udělat. Zajímá nás, jakou strategii řešení žáci zvolí.

Poznátky:

- V úloze b) žáci viděli řešení rychleji než v a), asi proto, že viděli majákové spoje ($5 + 20$ a $5 \cdot 5$). Někteří zde zkoušeli doplňovat násobky 5.
- V úloze a) často žáci jako první číslo doplnili do zeleného pole 10, viděli, že to o kousek nevychází, takže na druhý pokus už byli úspěšní (žáci často toto také napsali ke svému řešení).

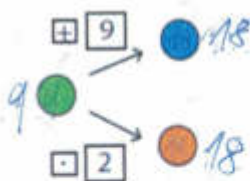


Romoi jsem trefil 9

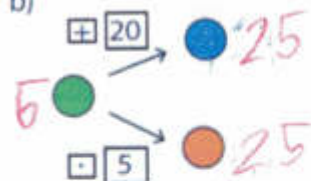
- Další ukázky řešení prezentují jiné řešitelské strategie:

Jaké číslo musíme dát do zeleného pole, aby modré a oranžové číslo bylo stejné?

a)



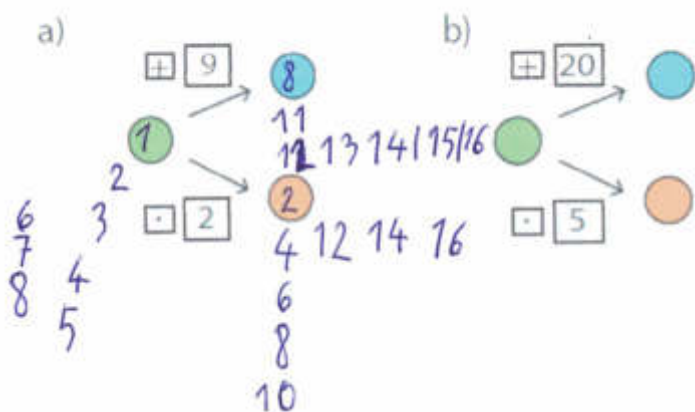
b)



$$\begin{aligned} X + 9 &= Y \\ X \cdot 2 &= Y \\ Y &= Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X + 20 &= Y \\ X \cdot 5 &= Y \\ Y &= Y \end{aligned}$$

Jaké číslo musíme dát do zeleného pole, aby modré a oranžové číslo bylo stejné?

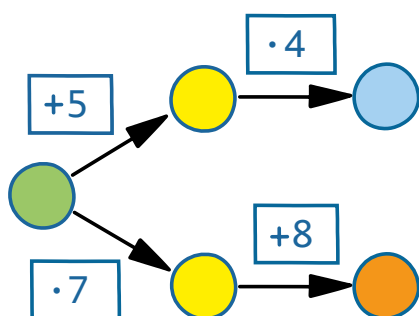


Následná diferenciacce, reedukace:

- Žákům, kterým úloha nečinila potíže, by bylo vhodné vložit do zadání větší čísla, u kterých není na první pohled viditelné řešení. To by žáky směřovalo k hledání „triku“, algoritmu.
- Můžeme rovněž zadat žákům výsledek dvou hadů s výzvou vymyslet jednu šipku na sčítání a druhou na násobení a vytvořit zadání hada, případně zadat jen prázdnou šablonu a nechat je tvořit úlohy.
- Připojit k úlohám tabulky, ve kterých by byly již evidovány nějaké hodnoty.

Úloha:

Doplň tabulku.



z	1	2	3	4	5	6
m						
o						
m-o						

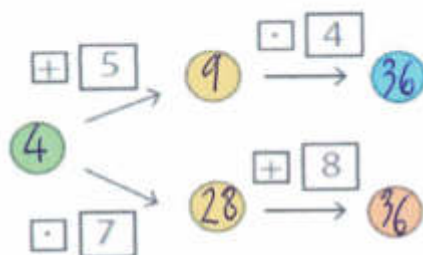
Komentář pro učitele:

Sledujeme stejné jevy, jaké jsme popisovali výše. Stěžejně nás zajímá, kdy žák začne vyplňovat tabulku bez návaznosti na hada.

Poznátky:

- Při srovnání úspěšnosti úloh výše byla úloha s tabulkou pro žáky návodná a jednodušší než dva otevření hadi bez tabulky výše. Ty žáci často ani nezkusili.

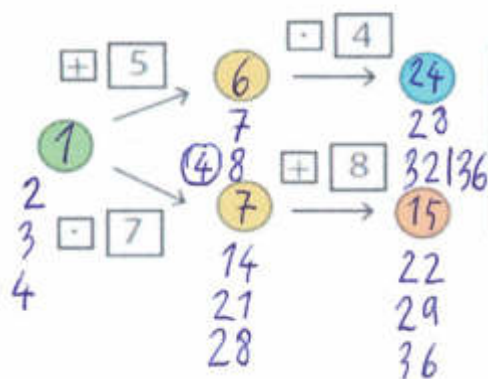
Doplň tabulku



z	1	2	3	4	5	6
m	24	28		36		
o	15	22		36		
m-o	9	6		0		

Neudělal jsem 3, protože jsem pochopil že 0 se svěřuje po 7 a m po 4

Doplň tabulku



z	1	2	3	4	5	6
m	24	28	32	36		
o	15	22	29	36		
m-o						

- Někteří žáci postupovali strategií opakovaných pokusů. Impulsem pro ukončení hledání řešení byl v některých případech nedostatek místa na pracovním listu.
- Pokud tuto strategii žáci uplatnili, často ji využívali i při řešení jiných úloh.

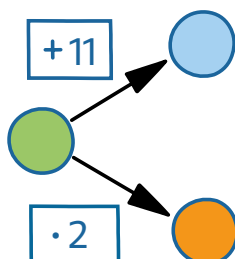
Následná diferenciacce, reedukace:

- Nejvíce se osvědčila práce ve skupině a následně společné sdílení, kdy si žáci všímali propojení mezi operátory a tabulkou, což byl důležitý krok.

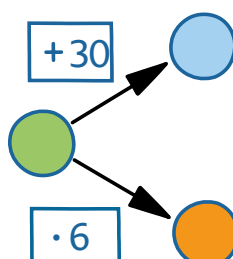
Úloha:

Doplň čísla do barevných polí tak, aby hodnoty v modrém a oranžovém poli byly stejné.

a)



b)



Poznatky:

- Úlohy nedělaly žákům potíže, objevovalo se minimum chyb.

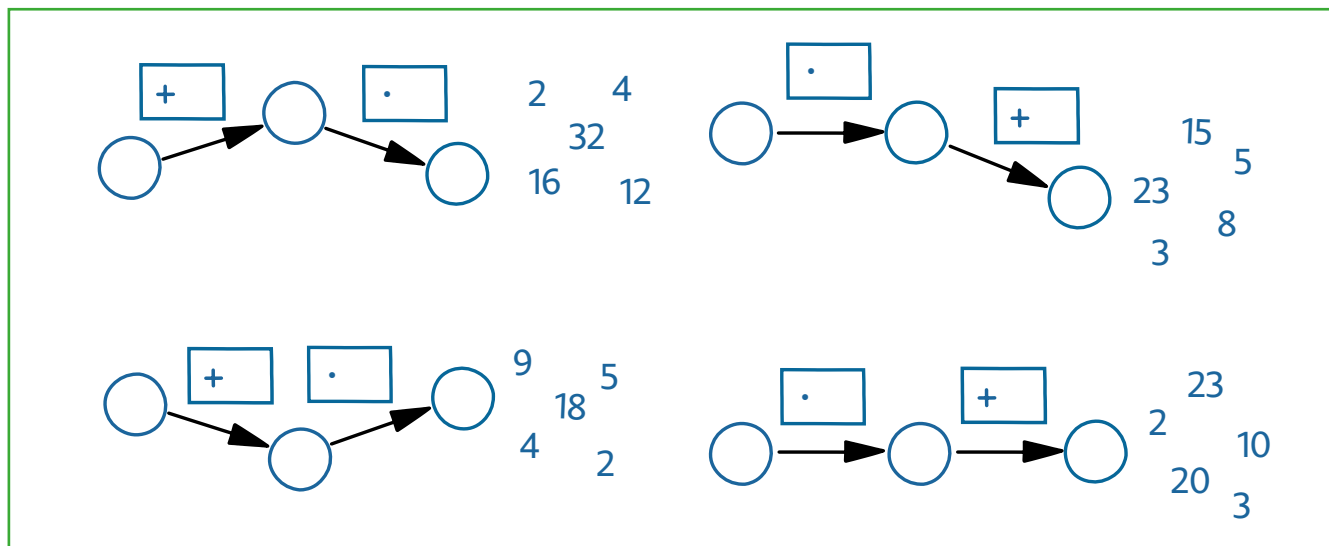


je jsem si řekl první 9 ale to mi nevyšlo tak jsem si řekl plus dva to je 11 a $11+11=22$ a $11 \times 2 = 22$

ja jsem řekl 6 nevím proč ale tak první jsem si vypočítal 6×6 to se rovná 36 a $6+30=36$

Neposedové

Úloha:



Komentář pro učitele:

U této série hadů budeme z hlediska diagnostiky sledovat, jak výsledek ovlivní změna pořadí operací v rámci a skalárů u jednotlivých hadů. U prvního hada a třetího hada je pořadí sčítání a násobení, u druhého a čtvrtého je pořadí opačné. Dá se očekávat, že používaná strategie u žáků bude směřovat přes násobilku, tedy žáky bude napřed zajímat, co mohou násobit. I toto je dobré v průběhu řešení sledovat (pořídít videozáznam z procesu řešení) nebo se na to žáků doptat.

Poznátky:

- I po mnohých zkušenostech z předchozích let mnoho žáků řeší tento typ úloh metodou metodou opakovaných pokusů.
- Žák, který řešil úlohy, kde je mezi neposedy číslo 15 a 23, začínal násobením, tedy řešil úlohu odpředu. Nejdříve uvažoval nad tím, jaké číslo doplní na místo prvního stavu. Nakonec přišel s tím, že $3 \cdot 5$ je 15 a už jen ověřil, že $15 + 8 = 23$.
- Dívka řešila úlohu, ve které je číslo 32. V tomto případě šla odzadu, ale také začínala násobením. Řekla si, že na posledním místě (stavu) bude největší číslo (32). Následně, když si prohlédla zbývajících čísla, chtěla umístit druhé největší (16). Umístila ho na pozici prostředního stavu a uvědomila si, že $32 : 2 = 16$. Poté navrhla dvě možnosti na doplnění zbývajících částí hada, konkrétně $12 + 4 = 16$, $4 + 12 = 16$.
- Žák si vybral úlohu s čísly 20 a 23. Začal od začátku od násobením. Do stavu doplnil 10. Skalár $\cdot 2$ jen řekl, ale nezaznamenal. Doplnil druhý stav 20. Následně se podíval do neposedů a přičetl 23 a do posledního stavu zapsal číslo 43, které mezi neposedy vůbec není. Následně byl tázán na obdélníčky (operátory). Chlapec řekl, že tam přijdou nějaká čísla. Následně se učitel zeptal, zda použil všechna čísla (škrtl si jen ta, co zapsal jako stavu). V tu chvíli začal chlapec doplňovat políčka operátorů a skalárů. Do druhého operátoru doplnil $+ 3$, škrtl si ho v neposedech a přepsal stav 43 na 23. Jelikož si neškrtl 3, kterou použil do operátoru, použil ji opět do prvního skaláru. V tu chvíli přepsal 20 ve stavu na 30. Učitel se zeptal, zda použil 2. Žák řekl, že ji používal v prvním operátoru, ale už se mu nikam nevešla.
- Žáci nehledali více řešení (v případě, že lze u operace násobením přehodit oba činitele), ale pravděpodobně to bylo způsobené i tím, že měli jen jedno nakopírované zadání.
- Při diskuzi po řešení zazněla myšlenka, že při násobením bude větší výsledek než při sčítání – tato hypotéza byla později vyvrácena s tím, že to neplatí vždy a že záleží na konkrétních číslech.
- Někteří řešili tak, že jako první umístili největší číslo a pak řešili buď odzadu, nebo pak využili majákové spoje a aditivní a multiplikativní triády.
- Někteří zkoušeli metodou pokusů dosazovat čísla a ověřovat, zda platí vztahy.
- Dále uvádíme statistiku z jedné třídy – přehled navzájem komutativních spojů, které žáci v řešení použili. Zde je zajímavé, že ve všech případech se častěji vyskytují ty spoje, které mají první číslo větší než druhé:

$$12 + 4 \quad ||| ||| ||| |||$$

$$4 + 12 \quad |||$$

$$5 \cdot 3 \quad ||| ||| |||$$

$$3 \cdot 5 \quad ||| ||| |||$$

$$5 + 4 \quad ||| ||| ||| |||$$

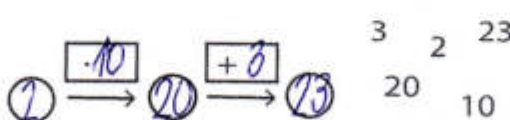
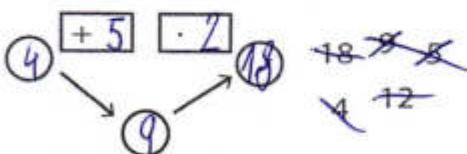
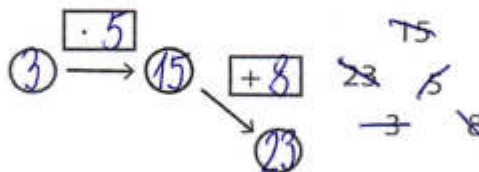
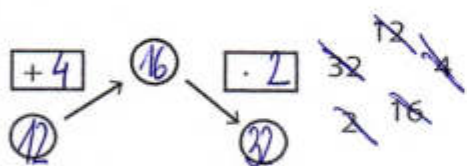
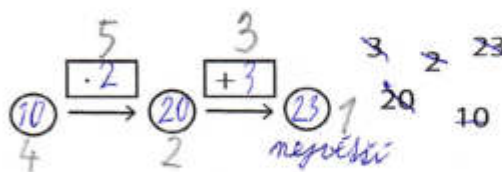
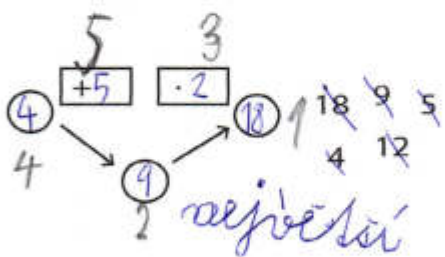
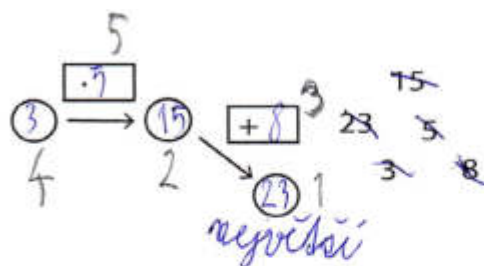
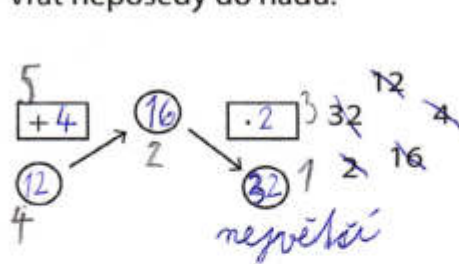
$$4 + 5 \quad ||| |||$$

$$10 \cdot 2 \quad ||| ||| ||| ||| ||| |||$$

$$2 \cdot 10 \quad ||$$

- Žáci, kteří doplnili největší číslo na konec hada, to zdůvodňují tím, že v hadovi jsou operace sčítání a násobení. Je dobře, že si uvědomují, že kdyby tam bylo dělení nebo odčítání, tak by toto pravidlo neplatilo, tedy formulují kritéria (podmínky), za kterých dané pravidlo lze použít. Toto pravidlo platí ovšem jen v přirozených číslech, protože kdybychom doplňovali i záporná čísla, tak by i v hadovi se sčítáním a násobením mohlo být na konci nejmenší číslo (námět pro následnou diferenciaci).
- Někteří žáci postupují dále tak, že k největšímu číslu hledají další dvě tak, aby společně tvořily aditivní ($a + b = c$) nebo multiplikativní ($a \cdot b = c$) triádu, jiní řeší hada dále od začátku.
- Objevila se i strategie, kdy si řešitelka nejprve dosadila malá čísla do rámečků operátorů nebo skalárů a pak dosadila větší čísla do rámečků stavů. To může být potenciálně chybná strategie, ale zde se ukázala jako vedoucí ke správnému výsledku.
- Někteří žáci si nad hada rozepisovali jednotlivé rovnosti.
- Ukázky řešení:

Vrať neposedy do hadů.

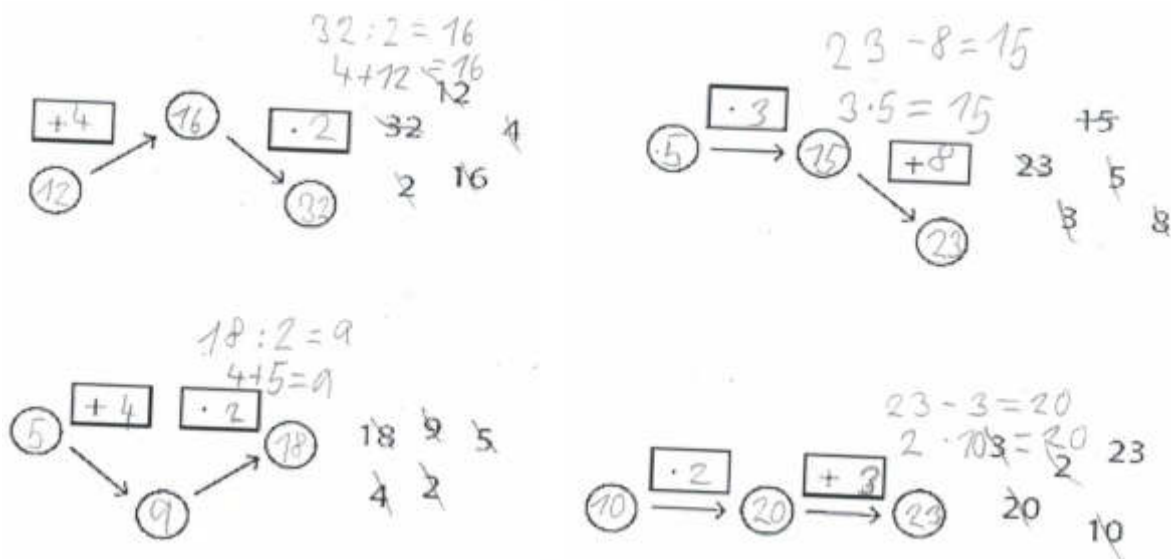


1. na konec hada jsem umístil největší číslo z rámečku

2. 2 největší číslo jsem umístil do křídka mezi výpočtu

3. potom jsem jedno z nejmenších čísel dal úplně dopředu

4. a potom jsem to nějak dopočítal

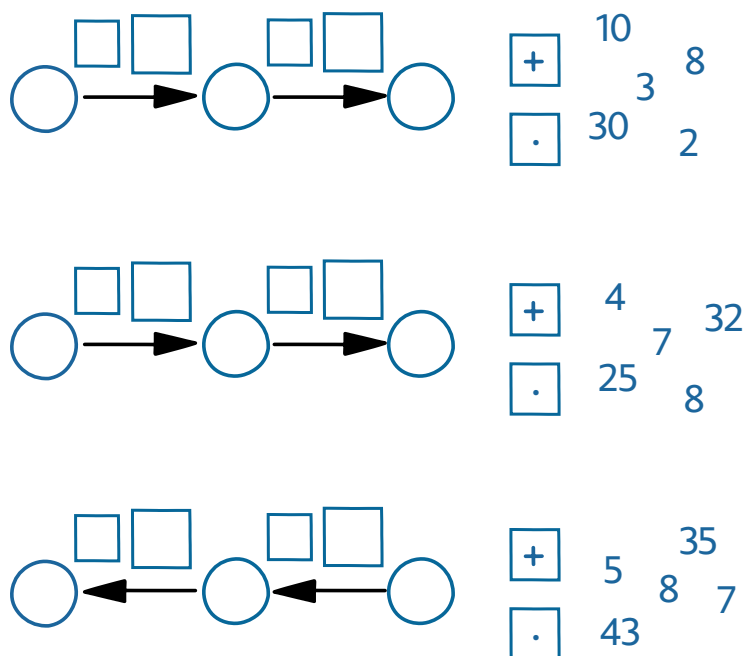


Následná diferenciaci, reedukace:

- Aby si žáci uvědomili, že u každé úlohy lze přehodit čísla v prvním kolečku a prvním obdélníku (tedy komutativita dané operace), lze jim zadat výzvu, ať u každé úlohy najdou dvě řešení.
- Žáci, kteří formulují pravidlo, že největší číslo bude na konci hada, mohou dostat úlohu, kde jsou záporná čísla. Žáci tím zjistí, že v takovém případě jejich pravidlo neplatí.

Úloha:

Vrať neposedy i znaménka do hadů.



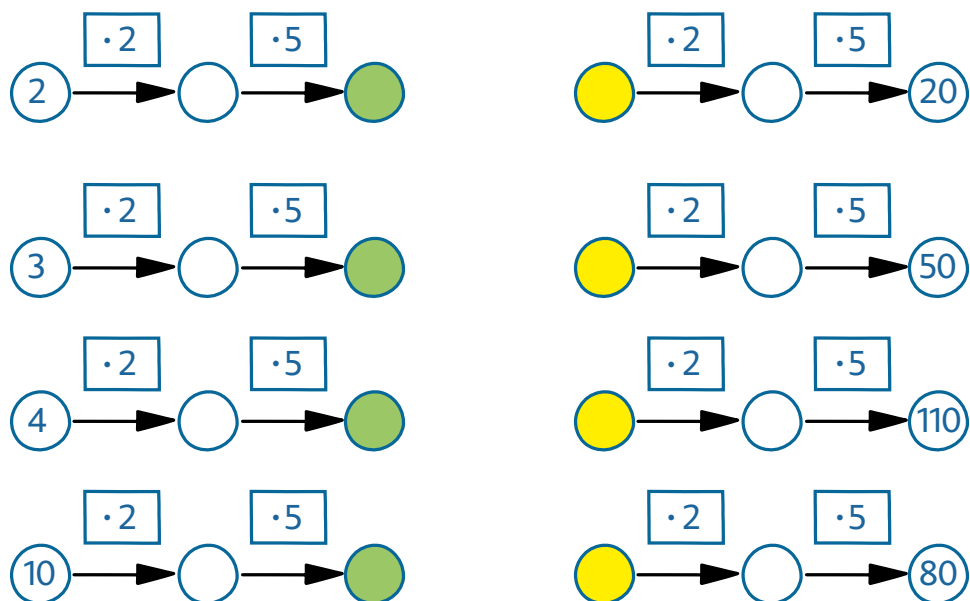
Komentář pro učitele:

U série výše je z hadů vyňato naprosto vše, včetně operátorů, skalárů a operací. Všichni hadi mají díky tomu více řešení. Pořadí čísel u násobení i sčítání je komutativní. Pro diagnostiku můžeme zvolit také hady s jinými operacemi (dělení, odčítání). Zde ale pravidlo pro komutativnost neplatí.

Proces x koncept

Úloha:

Doplň barevná pole.

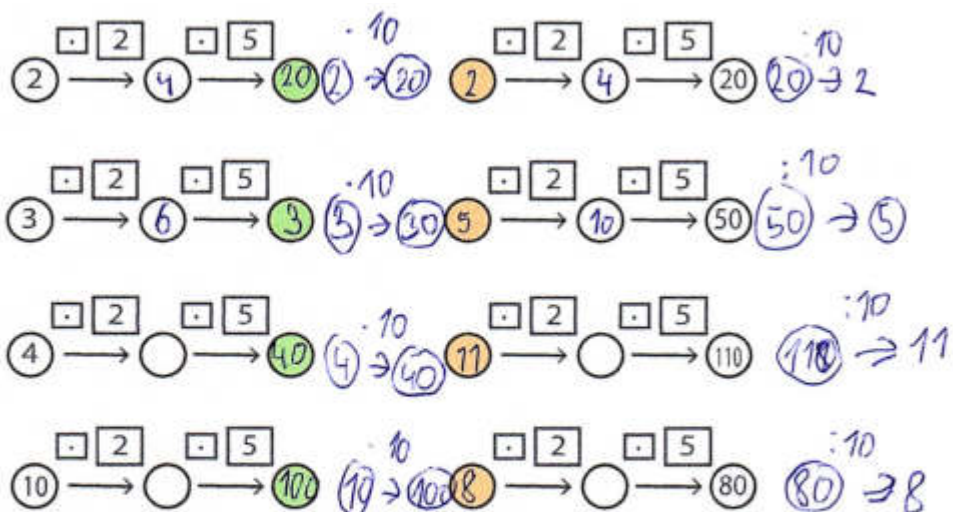


Komentář pro učitele:

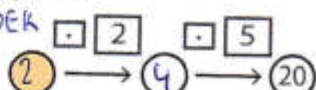
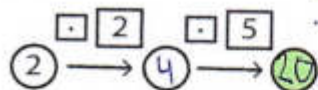
U této série hadů se můžeme zaměřit na to, jak žák danou úlohu vnímá. Jeden žák může prvního hada počítat postupně, jiný napíše rovnou koncový stav. První žák vnímá úlohu procesuálně, potřebuje si ji projít krok po kroku, druhý se dívá na úlohu jako na celek, vnímá úlohu konceptuálně.

Poznátky:

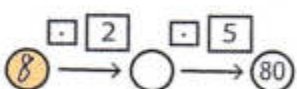
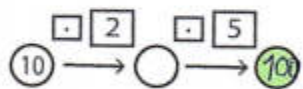
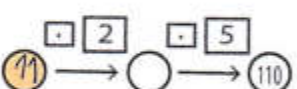
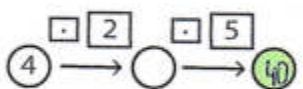
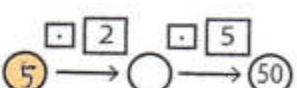
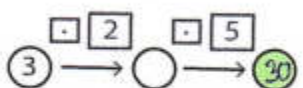
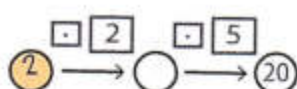
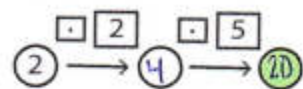
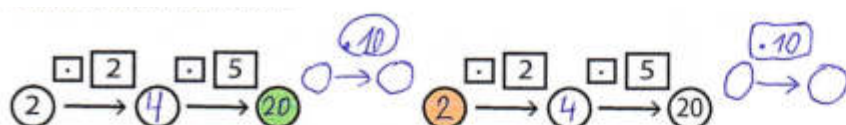
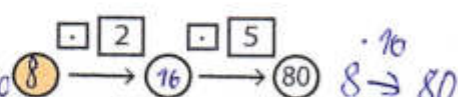
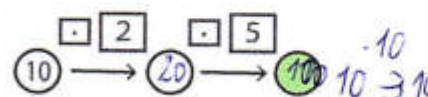
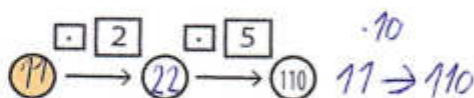
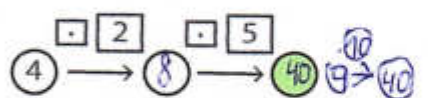
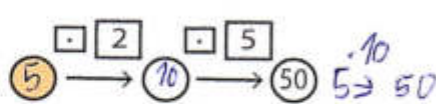
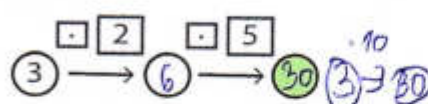
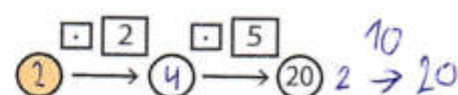
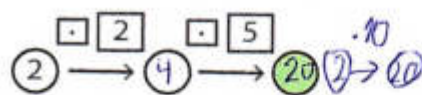
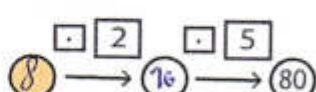
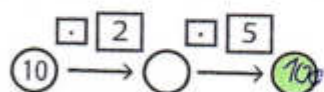
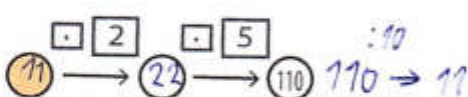
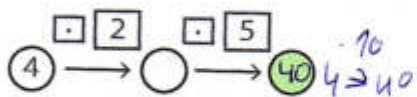
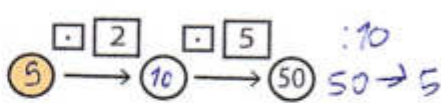
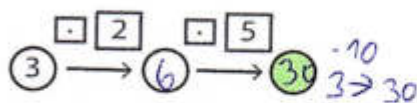
- Někdo řešil všechny úlohy procesuálně a nehlídal zjednodušení. Někdo jako proces řešil první dva hady a pak už pracoval s konceptem, s tím souvisí evidence pouze počátečního nebo koncového stavu do dlouhého hada.
- Někteří žáci si všimli, že ve všech hadech se první a poslední číslo liší o nulu, ale teprve až po návodné otázce od učitelky řekli, že stačí první číslo vynásobit 10, aby dostali poslední číslo.



Varianta 1: Dopln̄ barevn̄ pole
 V̄DĚCKÝ PRVNÍ
 ČÍSLO (2, 3, 4, 10)
 ·10 = VÝSLEDEK



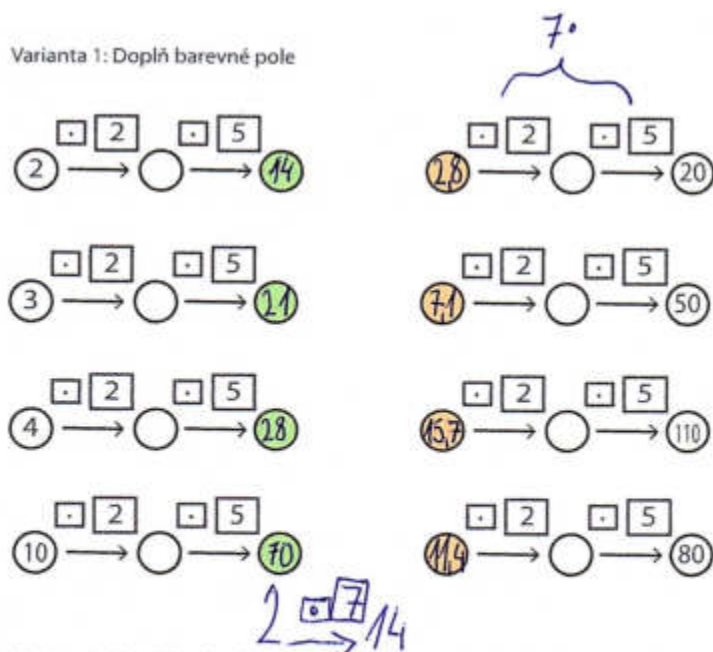
V̄DĚCKÝ POSLEDNÍ
 ČÍSLO (20, 50, 110, 80)
 :10 = VÝSLEDEK



+10
 2 → 10

V̄DĚ K
 PRVNÍMU ČÍSLO
 PŘIDÁME 0 A
 MÁME
 VÝSLEDEK

Varianta 1: Dopln barevné pole



vzal jsem si 2 a 5 z dělení
a spojil jsem je a vyšlo mi
sedm a potom jsem stou
sedmičkou dělil

- Anežka si všimla, že je na konci stejné číslo jako na začátku, jen s nulou, ale nevěděla, jakou použít operaci. Velice rychle tímto způsobem vypočítala všechny příklady (je otázka, zda si to zkontrolovala, jestli to opravdu platí u všech úloh). K propojení na správnou numerickou operaci pomohl přepis úlohy do šipkových grafů (ukázka řešení je z online výuky):

Doplň barevné pole.
Překresli do hada s jednou šipkou.

Anežka

vždy k prvnímu číslu přidáme 0 a máme výsledek

2) Anežka si nemohla zatím vybavit, jaká to je operace.

1) Anežka věděla, že tento zkrácený had vyjde jen pro prvního hada. Nevychází u všeho.

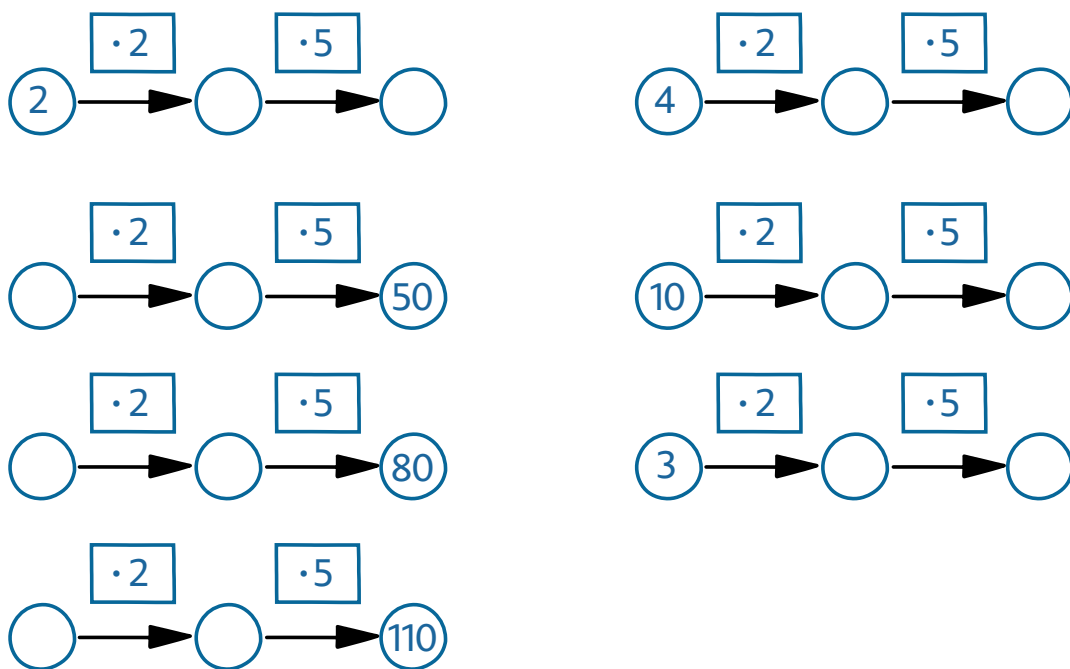
3) Během chvíle si při převádění podobných úloh do šipkových grafů operaci vybavila.

Anežka

$2 \rightarrow 14$
 $10 \rightarrow 70$
 $7 \rightarrow 14$
 $10 \rightarrow 70$
 $7 \rightarrow 14$
 $10 \rightarrow 70$

Úloha:

Přepiš hada tak, abys použil pouze jednu šipku.



Komentář pro učitele:

Tato série již přímo vybízí žáky ke konceptuálnímu uchopení úlohy, a to požadavkem na přepis do hada s použitím pouze jedné šipky (jednoho skaláru).

Poznátky:

- Někteří žáci nerozuměli, co znamená přepsat hada, tedy že první a koncový stav musí být stejné jako v původním hadovi. Těmto žákům pomohlo přiložit k úloze šablonu hada s jednou šipkou, kde byl první stav vizuálně propojený s prvním stavem v původním hadovi a stejně to platí pro koncový stav.

MYSLÍM SI ČÍSLO

Ukázka úlohy:

Myslím si číslo. Když k jeho dvojnásobku přičtu polovinu čísla 6, dostanu 15. Jaké číslo si myslím?

Řešení úlohy:

Myslím si číslo 6.

V tomto prostředí je úkolem žáků **určit neznámé číslo (nebo více čísel)**. V každé úloze je popsáno, jaké početní operace se mají s neznámým číslem provést a jaký je jejich výsledek. Efektivní strategií, kterou žáci postupem času odhalí, je **řešení úloh odzadu**. Ze známého výsledku lze určit hodnotu neznámého myšleného čísla tím, že uvedené operace budu provádět odzadu a budu provádět operace opačné. Když se v zadání hovoří o přičítání čísla 5, při řešení budu číslo 5 od známého výsledku odčítat. Díky tomu žáci získávají zkušenosti s tím, že některé dvojice matematických operací mají inverzní účinek. Než získají žáci dostatek zkušeností k odhalení této strategie, budou zřejmě řešit úlohy metodou pokusů, čímž získávají cit pro práci s čísly a zpřesňují své odhady, což je také důležité. Toto prostředí také připravuje žáky na práci s neznámou, kterou zde reprezentuje právě myšlené číslo. Nabyté zkušenosti později využijí při řešení rovnic, do kterých lze všechny úlohy z tohoto prostředí přepsat.

Předměty pod miskou

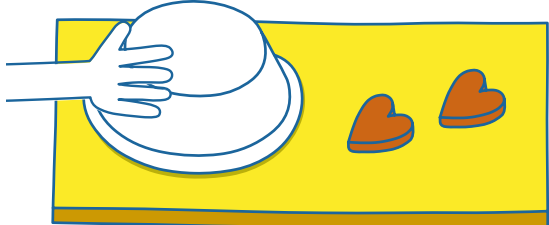
Sémantický význam čísel: Čísla vyjadřují KVANTITU – STAV – POČET. Značíme písmenem S. Sémantická situace v těchto úlohách tvoří triádu $S1 + S2 = S3$.

Diagnostické otázky:

1. Projeví se různá pozice neznámého stavu?
2. Projeví se různá hodnota stavů?
3. Projeví se různá formulace o stavech?
4. Projeví se různý způsob zadání úlohy (obrázek, slovně)?
5. Je žák schopen úlohu řešit manipulativně (při grafickém nebo slovním zadání), graficky (při slovním zadání) a mění se jeho úspěšnost?

1. ročník

Úloha:

Na stole je celkem 6 jahod. Kolik jich je pod miskou? 	Na stole jsou 4 perníčky. Kolik jich je pod miskou? 
--	---

Komentář pro učitele:

Úlohy je vhodné spojit s dramatizací a reálným modelováním situace. Úloha vlevo odpovídá schématu $2 + S2 = 6$, úloha vpravo schématu $S1 + 2 = 4$. Učitel může sérii rozšířit o podobně zadané úlohy v číselném oboru 1–6.

Chceme sledovat:

- zda je žák schopen úlohy řešit z grafického záznamu, pokud ne, zda je schopen řešit při manipulaci,
- zda se mění úspěšnost řešení v závislosti na pozici neznámého stavu a jak.

Poznátky:

- V úlohách se objevovaly numerické chyby.
- Počet žáci evidovali často přímo do obrázku, a to v podobě číslic nebo čárek.
- Žáci často neporozuměli zadání, evidovali viditelné objekty a nepracovali s celkovým počtem, který byl dán v zadání. Mohlo to být způsobeno skutečností, že se tyto úlohy testovaly v prvním pololetí 1. ročníku, kde je problém s nedostatečnou čtenářskou dovedností. V rámci testování bylo vyzkoušeno využití evidence celkového počtu pomocí číslic místo textového zadání. Ukázalo se to jako funkční cesta.
- V některých třídách učitel úlohy zadával také ústně, zde jsme evidovali problém s krátkodobou pracovní pamětí žáků.
- U žáků 1. ročníku se ukázalo jako efektivní řešit maximálně dvě takovéto úlohy, při větším počtu úloh narůstala chybovost.
- Většina žáků nevyužila manipulaci samovolně, ale až na pokyn učitele. Pro podporu manipulativní činnosti bylo důležité žákům předem připravit pomůcky přímo na lavice (nemusí být ještě vytvořené návyky dojít si kdykoli pro potřebné pomůcky).
- Pořadí zadaných úloh se na úspěšnosti neprojevilo.
- Rovněž se neprojevila odlišná úspěšnost při písemném a ústním zadání (tedy bez opory o obrázek, o vizualizaci).
- Pozice obrázku nečinila problém.

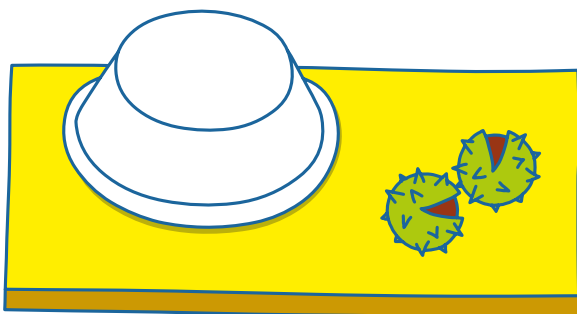
Následná diferenciaci, reedukace:

- Při potížích s tímto typem úloh vedeme žáky k manipulativnímu řešení úlohy (k využití pomůcek a modelování počtu).

1. ročník

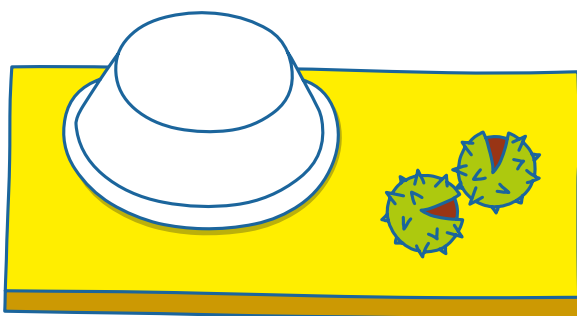
Úloha:

Polovinu kaštanů vidíme.
Kolik kaštanů nevidíme?



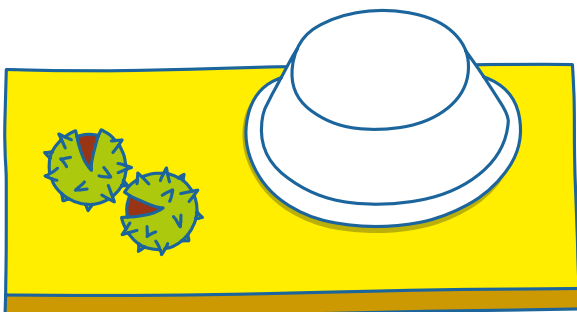
Úloha:

Třetinu kaštanů vidíme.
Kolik kaštanů nevidíme?



Úloha:

Čtvrtinu kaštanů vidíme.
Kolik kaštanů nevidíme?



Komentář pro učitele:

Učitel může sérii rozšířit o podobně zadané úlohy v číselném oboru 1–20 a potvrdit odpovědi na diagnostické otázky.

Chceme sledovat:

- zda je žák schopen úlohy řešit z grafického záznamu a pokud ne, zda je schopen řešit je při manipulaci,
- zda se mění úspěšnost řešení v závislosti na hodnotě zadaných stavů a jak (zda je polovina snazší než třetina a ta snazší než čtvrtina).

Poznátky:

- Někteří žáci evidovali řešení pomocí obrázků, jiní pomocí čárek nebo číslicí.
- Při sdílení žáci popsali, že pokud pracujeme s polovinou, bude výsledek vždy to stejné číslo.
- U poloviny: Jeden typ chyby byla evidence celkového počtu místo poloviny. Další chybou bylo rozpůlení viditelného počtu objektů u sudého počtu, u lichého počtu žáci narazili na potíže, proto evidovali buď 0, nebo viditelný lichý počet, viz následující ukázky řešení:

POLOVINU JABLEK VIDÍME. KOLIK JABLEK JE POD MÍSOU?



POLOVINU JABLEK VIDÍME. KOLIK JABLEK JE POD MÍSOU?



- Třetina a čtvrtina byla s velkou chybovostí. Chybovali i žáci, kteří měli polovinu správně. Je to dáno zejména menšími zkušenostmi z běžného života, jelikož s polovinou se žáci běžně setkávají. Navíc se zde pojmenovává zlomek. V ukázce žakovského řešení žák uvádí celek (třetina ze 6 jsou 2), nikoli zbytek do celku (4). Totéž ve čtvrtině. Je tedy otázkou, zda chápe význam pojmu třetina, čtvrtina a umí tuto část určit, jen nerozumí doplňku.

Třetinu kaštanů vidíme.
Kolik kaštanů nevidíme?



Čtvrtinu kaštanů vidíme.
Kolik kaštanů nevidíme?



- Častým jevem bylo evidování hodnoty 2, pokud se v textu objevilo slovo polovina, hodnoty 3 u třetiny a 4 u čtvrtiny.

Následná diferenciacce, reedukace:

- Úlohy, kde se pracuje s polovinou a máme na obrázku zadaný celkový počet, problémy nedělaly. Druhá varianta je pro žáky výrazně náročnější, jelikož vidí polovinu místo celkového počtu. Tento jev se potvrzoval opakovaně. Pro ilustraci uvádíme takovou dvojici úloh:

Úloha:



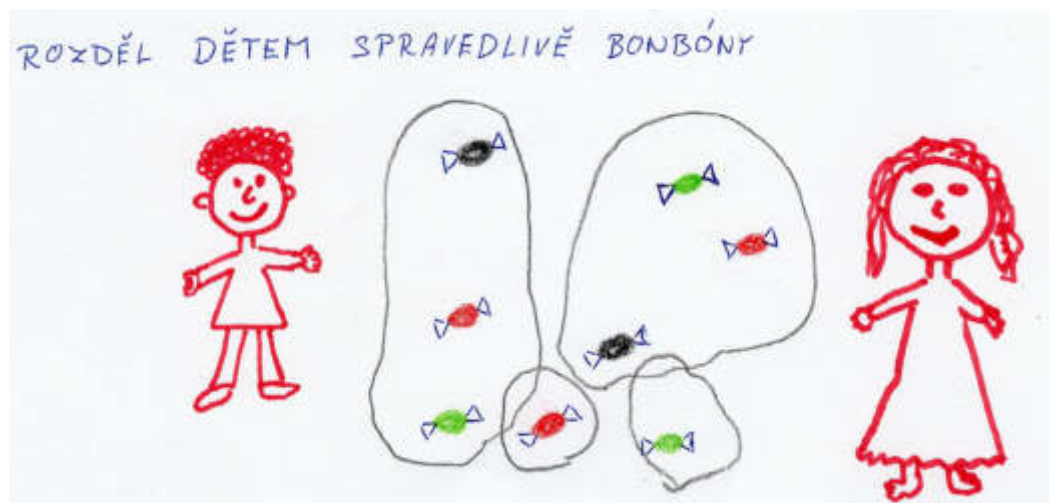
Koupil jsem 4 zmrzliny.
Polovinu ti dám.
Kolik zmrzlin ti dám?



Polovinu vánočních dárků vidíme.
Kolik dárků celkem od Ježíška dostaneme?

První úloha nečinila problémy, ptáme se na druhou polovinu. Ve spodní úloze se ale ptáme na celkový počet, tudíž je tam přidána jedna početní operace – nejprve určit druhou polovinu, poté celkový počet.

- Konkrétní reedukace chybného vnímání poloviny: Učitel připravil pracovní list, který měl následující strukturu:
 - namalovaný celkový počet předmětů (sudý) a výzva k rozdělení čarou na poloviny,
 - nakreslená polovina předmětů (3 jablíčka) a výzva dokreslit druhou polovinu,
 - úkol rozdělit dětem spravedlivě bonbóny (ty byly barevné),
 - nakreslená polovina předmětů (2 kytičky) a výzva dokreslit druhou polovinu.
- Zajímavé řešení:



Evidentní je práce s barevným parametrem, zadáno bylo „spravedlivě“. Pravděpodobně se do řešení promítá i vlastní zkušenost, tudíž trojici stejných bonbónů žák rozdělil a dva nechal samostatně.

- Reedukace u chybného vnímání třetiny a čtvrtiny vyžaduje čas a hodně zkušeností. Je důležité zařazovat aktivity jako např. spravedlivé dělení mezi tři, čtyři, později zakreslování třetin a čtvrtin apod. Zásadní je manipulace.

1. ročník

Úloha:

Na stole je 8 kaštanů. Vidíme 3 kaštany. Kolik kaštanů je pod miskou?

Komentář pro učitele:

Učitel může úlohu rozšířit o podobně zadané úlohy v číselném oboru 1–20 a potvrdit odpovědi na diagnostickou otázku.

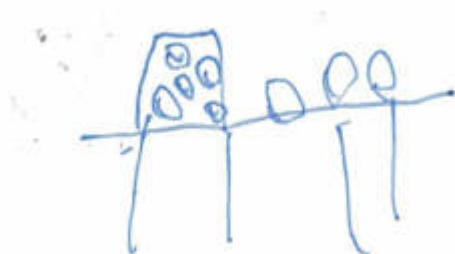
Chceme sledovat:

- zda je žák schopen úlohy řešit ze slovního zadání a pokud ne, zda je schopen přejít do grafického záznamu – úlohu si graficky znázornit.

Poznatky:

- Pokud si žáci nedokázali zadání přečíst, pomáhal učitel. Zadání četl vícekrát.
- Žáci byli překvapeni, že chybí obrázek. Tato situace je vedla k tomu, že většina z nich používala prsty. Výsledek evidovali číslicí. Někteří žáci si situaci kreslili (využili zkušenosti z předchozích úloh).

Na stole je 8 kaštanů. Vidíme 3 kaštany. Kolik kaštanů je pod miskou?



- Strategie pro řešení byla následující: Žáci si na prstech ukázali počet 3 a dopočítávali do 8 prstů.

Následná diferenciac, reedukace:

- Učitel může žákům poradit, aby si situaci znázornili obrázkem. Pokud je to nad jejich síly, může jim sám obrázek nabídnout.

1. ročník

Úloha:

Na stole je 9 kaštanů. Vidíme 3 kaštany. Kolik jich je pod miskou?

Úloha:

Na stole je 9 kaštanů. Nevidíme 3 kaštany, které jsou schované pod miskou. Kolik jich vidíme?

Komentář pro učitele:

Učitel může úlohu rozšířit o podobně zadané úlohy v číselném oboru 1–20 a potvrdit odpovědi na diagnostické otázky.

Chceme sledovat:

- zda se mění úspěšnost řešení v závislosti na použití negace v zadání úlohy (zda je úloha se slovem vidíme lehčí než se slovem nevidíme).

Poznatky:

- Žáci neměli ve většině případů potřebu využívat modelování úlohy.
- Někteří žáci nevěděli, co znamená, že něco nevidím, a jak to modelovat nebo nakreslit.

Následná diferenciacce, reedukace:

- Pro porozumění úloze s negací učitel celou situaci reálně modeloval a komentoval. Vzal 9 fazolí a ptal se dětí, kolik jich má dát do kelímku, když 3 nevidíme. Tímto způsobem proběhlo více ukázek.

2. ročník

Úloha:

Vidíme třetinu kaštanů, jaká část je pod miskou?

Úloha:

Nevidíme třetinu kaštanů, jaká část je pod miskou?

Komentář pro učitele:

Úlohy jsou pro žáky velmi obtížné. Po žácích zde požadujeme, aby odpověděli nekmenovým zlomkem, se kterým se zatím běžně nepracuje. Úlohy jsou zadány bez obrázků i počtů a cílí na porozumění, že celek tvoří 3 třetiny. Učitel může úlohu rozšířit o podobně zadané úlohy v číselném oboru 1–20 (pro příslušný ročník) a potvrdit odpovědi na diagnostické otázky. Může použít polovinu, čtvrtinu, pětinu, šestinu, ... a kombinovat s předchozí sérií.

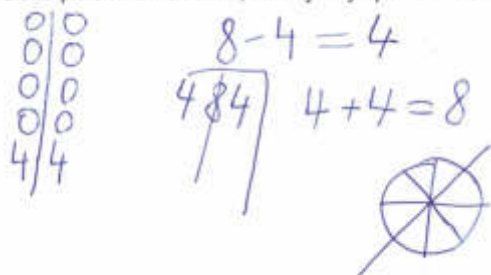
Chceme sledovat:

- zda a jak se mění úspěšnost řešení v závislosti na použití negace v zadání úlohy.

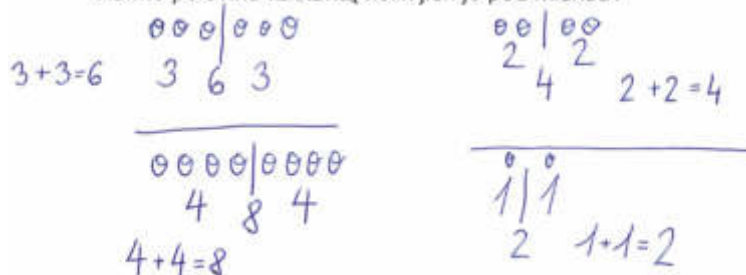
Poznátky:

- Úloha byla nejprve testována v jiné textové podobě, která využívala formulaci „kolik“ („Vidíme třetinu kaštanů, kolik jich je pod miskou?“). Ukázalo se, že toto zadání navádí žáky k nastavení konkrétního počtu, viz ukázky řešení. Pokud chce učitel cílit na odpověď, která obsahuje zlomek, musí být úloha formulována takto: „Vidíme třetinu kaštanů, jaká část je pod miskou?“
- U některých žáků došlo k propojení s předchozí úlohou – vzali si jako celkový počet 9 a úlohu řešili s tímto konkrétním počtem. Úlohu řešili většinou správně.
- Pouze minimum žáků vyřešilo obě úlohy. Nejčastěji žáci doplňovali hodnoty 3 a 1.
- Zde přikládáme zajímavá řešení, kdy žáci pracovali jednak s myšlenkou, že celkový počet může být různý, zároveň svá řešení dokladovali na více modelech. Učitel nejprve zadal do úloh práci s polovinou, následně až s třetinou.

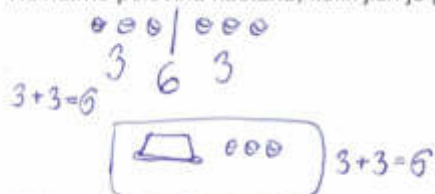
Vidíme polovinu kaštanů, kolik jich je pod miskou?



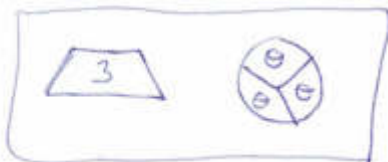
Vidíme polovinu kaštanů, kolik jich je pod miskou?



Nevidíme polovinu kaštanů, kolik jich je pod miskou?



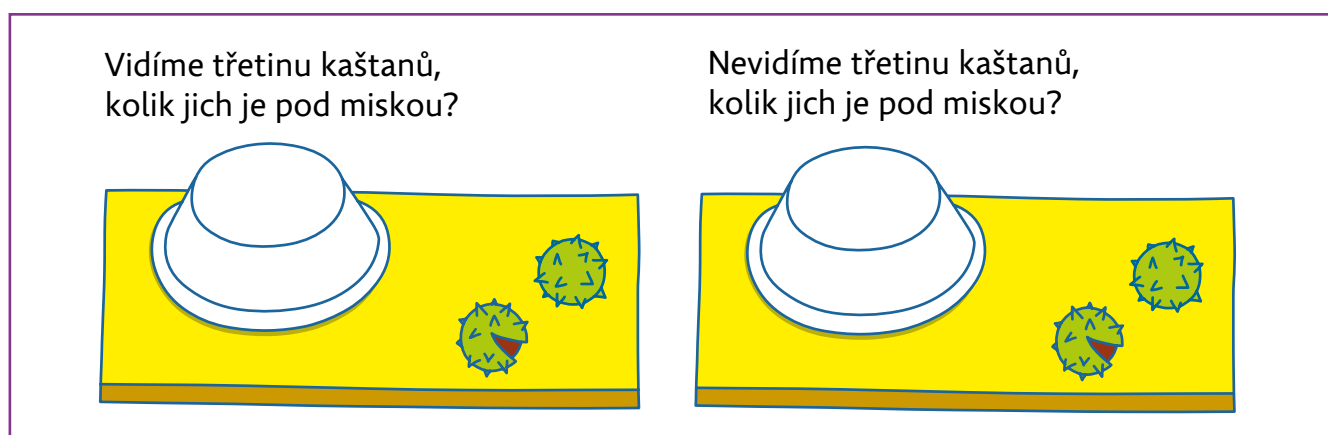
Vidíme třetinu kaštanů, kolik jich je pod miskou?



Následná diferenciacce, reedukace:

- Při reedukaci byla využívána práce s obrázkem – různé modely (koláč, bonbóny, figurky) a jejich dělení, následně i manipulace – žáci spravedlivě rozdělovali předměty na hromádky, nakonec určovali polovinu a třetinu ze zadaného čísla (abstrakce), hráli hru na kouzelníka (nebyla miska, ale něco schováno pod šátkem), kdy učitel střídal vidíme/nevidíme a různé počty a zlomky. S množstvím opakování se projevila úspěšnost žáků už během samotné práce. Po této reedukaci byly znovu zadány původní úlohy a úspěšnost žáků jednoznačně stoupla. Při hře s šátkem byli žáci motivováni, na papíře pozornost upadala.

Úloha:

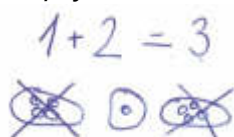


Poznátky:

- Ukázalo se, že negace činí větší potíže. Někteří žáci zvládli vyřešit první úlohu správně, ale s druhou si už nevěděli rady.
- Vyskytli se i žáci, kteří se o řešení ani nepokusili s argumentem, že nerozumí pojmu třetina.
- Častou chybou bylo propojení zlomku třetina na počet 3, viz následující ukázka řešení a argumentace žáka. Vidí dva kaštany, přičte jeden a má kaštany tři. Zaměňuje tedy třetinu za číslo tři. „Já jsem pochopil jen první úlohu. Když vidíme třetinu, musí to být jedna.“



- „Když je to třetina, tak to musí být dohromady třikrát.“



Žák si zkouší v kroužcích počty, které jsou pod miskou. Počty 5 a 4 škrtl, protože mu to nepřišlo správně. Jako správné řešení se mu jeví jeden kaštan pod miskou. Zápis $1 + 2 = 3$ má ilustrovat, že to je správně. Může mít funkci takové zkoušky. 1 pod miskou + 2 mimo misku = 3 dohromady, což bere jako správné řešení, protože třetinou asi chápe počet 3 a nerozlišuje mezi tím.

- Autor následujícího řešení komentoval, že ví, že celek tvoří 3 třetiny a že třetiny jsou 3 stejné díly:

2. Nevidíme třetinu kaštanů, kolik jich je pod miskou?



Řešení ~~6 JICH NEVÍMÍME~~
~~6 JICH NEVIDÍME~~ 4 NEVIDÍME $2+4=6$

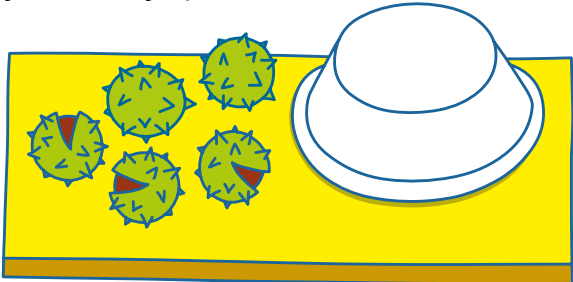
Učitel se žáka ptal, kolik třetin na obrázku vidí. Žák odpověděl, že vidí jednu. Po návratu k zadání se opravil, že dvě. Po chvíli mlčení se opravil, že pod miskou bude jenom jeden kaštan.

Následná diferenciaci, reedukace:

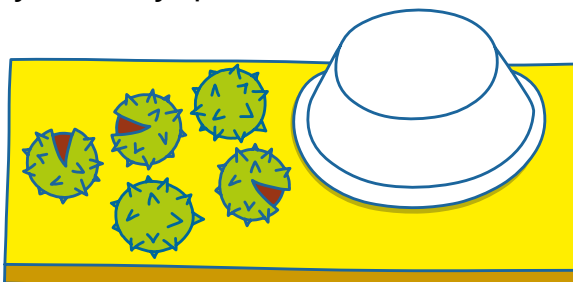
- Pokud s dvojicí úloh neměli žáci potíže, můžeme jim zadat následující série:

Úloha:

Vidíme třetinu kaštanů,
jaká část je pod miskou?



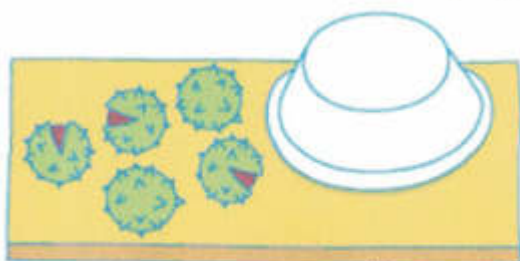
Nevidíme třetinu kaštanů,
jaká část je pod miskou?



Poznátky:

- U druhé úlohy narazil žák na obtíž, jak rozdělit 5 kaštanů, přestože předchozí úlohy zvládl. Navíc zjevně nezohledňuje, že se v úloze hovoří o třetině a má potřebu půlit:

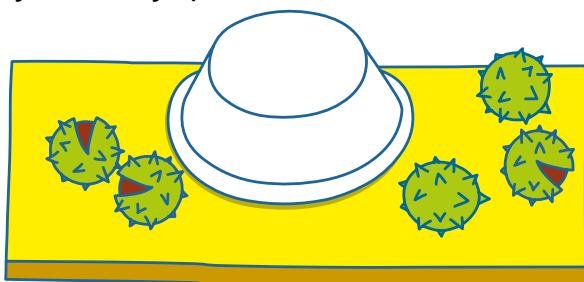
Nevidíme třetinu kaštanů, kolik jich je pod miskou?



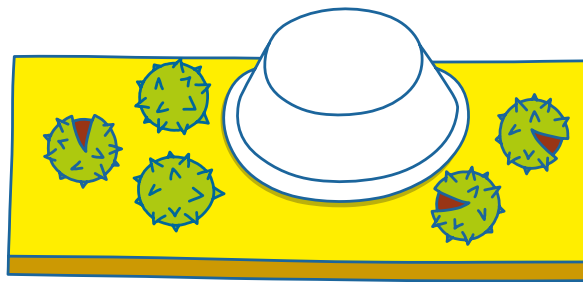
5 NEJDE ROZDĚLIT TAK JAK MAM
 5 ROZDĚLIT NA 2 ČÁSTI

Úloha:

Vidíme třetinu kaštanů,
jaká část je pod miskou?



Nevidíme třetinu kaštanů,
jaká část je pod miskou?

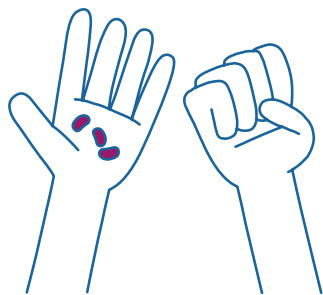


- Pokud je příčina chyby v neporozumění pojmu třetina, budujeme jej skrze manipulaci a práci s obrázkem v různých modelech (koláč, bonbóny, figurky). Pokud je příčina v tom, že žák neumí vyjádřit nekmenový zlomek, vyžaduje to zejména čas, rovněž další manipulativní zkušenosti a zároveň fakt, aby toto učitel pojmenovával. Pokud je příčina chyby v negaci, sytíme žákovy zkušenosti s negací v různých kontextech.

Alternativní činnosti – předměty v rukách z kategorie **Učitel kouzlí** (dramatizace)

1. ročník

Úloha:



Komentář pro učitele:

Jedná se o manipulativní sérii k doplnění předchozích úloh. Učitel nebo žáci zadávají počty, pozici neznámého počtu, formulují otázku.

Chceme sledovat:

- zda má vliv na úspěšnost řešení, která ruka je zavřená (souvisejlost s aditivní triádou, lateralitou), jak se liší výsledky diagnostiky v manipulaci s miskou, grafickém záznamu, slovním zadání a manipulaci v rukou.

Poznatky:

- V 1. ročnících bylo zkoušeno jednak manipulativně, jednak jako statická úloha na pracovním listu. Při manipulaci se objevovalo pouze minimum chyb oproti úloze na pracovním listu (tam byl zadán vždy celkový počet kuliček). V jedné třídě došlo k zajímavému poznatku – úlohy s předměty pod miskami žákům potíže nečinily, proti tomu určit počet kuliček v zavřené dlani bylo pro žáky obtížnější.

- Odlišnost v úspěšnosti ve vztahu k zavřené dlani (zda to byla pravá, nebo levá) se neprojevila. (Pozn.: U součtových trojúhelníků s využitím symetrie byla úspěšnost odlišná – situace, kde byly nejprve utajené stavy a pak zadané hodnoty, byla pro žáky náročnější než naopak.)

Myslím si číslo (neřetězené operace)

Sémantický význam čísel: Číslo vyjadřují KVANTITU – dva STAVY a jeden OPERÁTOR (změny nebo porovnání) nebo SKALÁR (změny nebo porovnání). Sémantická situace tvoří triádu $S1 + O1 = S2$ nebo $S1 \cdot s = S2$.

Diagnostické otázky:

1. Projeví se různá pozice neznámého operátoru/skaláru a jak?
2. Projeví se různá formulace procesu a jak?
3. Projeví se různá hodnota stavů?
4. Projeví se různá formulace stavů?
5. Jaké strategie žák při řešení používá?

ad 1) pozice neznámého operátoru/skaláru

2. ročník

Úloha:

Myslím si číslo, když ho přičtu k číslu 5, dostanu číslo 12.
Jaké číslo si myslím?

Úloha:

Myslím si číslo, když k němu přičtu číslo 6, dostanu číslo 11.
Jaké číslo si myslím?

Komentář pro učitele:

Učitel může úlohu rozšířit o podobně zadané úlohy v číselném oboru 1–20 a získat odpovědi na diagnostickou otázku.

Chceme sledovat:

- zda a jak se mění úspěšnost řešení podle pozice neznámého operátoru, skaláru, tedy zda se projeví, když myšlené číslo je operátor a ten se přičítá k zadanému stavu, nebo je myšlené číslo stav a k němu se přičítá nebo násobí zadané číslo,
- jaké strategie řešení žáci používají (kdy a na základě čeho přejdou od dopočítávání k jiným strategiím, např. k operaci odčítání, ke strategii „odzadu“ ($? + 6 = 11 \rightarrow 11 - 6 = 5$, tedy použijeme opačnou operaci),
- jaké pomůcky žákům usnadní porozumění (žetony, kaštiny, fazole, krokovací pás, počítadlo).

Poznátky:

- Žáci vnímají obě úlohy jako stejné, nepocítují odlišnost v obtížnosti. To může být způsobeno tím, že sčítání je komutativní, takže je jedno, v jakém pořadí se v zadání vyskytuje. Teprve u úloh s odčítáním nebo dělením, která komutativní nejsou, se ukáže, kdo z žáků vnímá pozici neznámého čísla správně.
- Někteří učitelé úlohy zadávali ústně, někteří v písemné podobě. Na úspěšnost tento fakt neměl zásadní vliv.
- Většina žáků využívala dopočítávání, pouze minimum žáků použilo odčítání.
- V řešení žáci často neoznačovali, které číslo je to myšlené.
- Ukázky řešení:

Myslím si číslo. Když ho přičtu k číslu 5, dostanu 12. Myslím si číslo

$$5 + 7 = 12$$

Myslím si číslo. Když k němu přičtu číslo 6, dostanu 11. Myslím si číslo

$$5 + 6 = 11$$

- Někteří žáci si úlohy přepisují pomocí opačných početních operací:

Myslím si číslo. Když ho přičtu k číslu 5, dostanu 12. Myslím si číslo

7

$$12 - 5 = 7$$

Myslím si číslo. Když k němu přičtu číslo 6, dostanu 11. Myslím si číslo

5

$$11 - 6 = 5$$

Objevila se i taková řešení, kdy žáci zapisovali inverzní početní operace, dostali se k myšlenému číslu a následně tento postup vygumovali a zapsali tak, aby jejich početní operace korespondovala se slovem v zadání (slovo přičtu, tedy použijí znaménko plus), viz další ukázka:

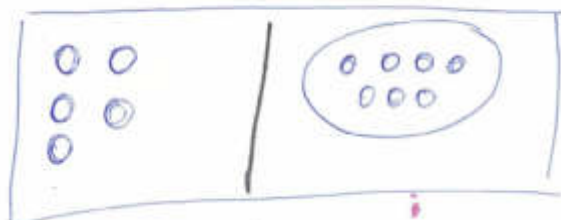
$$6 + 5 = 11$$

$$11 - 5 = 6$$

$$11 - 5 = 6$$

Další ukázka prezentuje vizualizaci řešení a potřebu sémantizace pro dopočítání do požadovaného počtu (žák místo abstraktních číslic využil konkrétní počet předmětů):

Myslím si číslo, když k němu přičtu 5, dostanu 12. Jaké číslo si myslím?



- Nejčastější chybou bylo vyjmutí čísel ze zadání a zaměření pozornosti na slovo „přičtu“ (žák tedy vezme hodnoty 5, 12 a sečte je):

Myslím si číslo, když ho přičtu k číslu 5, dostanu 12. Jaké číslo si myslím? 17

- Mnoho žáků zapisuje úlohu procesuálně a následně doplní myšlené číslo:

$$5 + \textcircled{7} = 12$$

Myslím si číslo. Když ho přičtu k číslu 5 dostanu číslo 12. Jaké číslo si myslím?

VÝSLEDEK

$$5 + \textcircled{7} = 12$$

Následná diferenciaci, reedukace:

- V řešení nezáleží, zda žák dopočítává, nebo odčítá. Odčítání přijde až mnohem později (jinak je formální). Cesta, kdy žák obě čísla sečte je reakcí na signální slovo – roli tedy hraje buď nižší čtenářská gramotnost, nebo formální řešení slovních úloh (vidím dvě čísla a signální slovo).
- Reedukace je nejvhodnější formou manipulace (např. dáme žákům žetony k modelování úlohy). Vhodné je rovněž vést žáky ke kontrole řešení (zda je v souladu se zadáním).

ad 2) formulace procesu – aditivní operace

2. ročník

Úloha:

Myslím si číslo. Když k němu přičtu číslo 5, dostanu číslo 12.
Jaké číslo si myslím?

Úloha:

Myslím si číslo. Když od něho odečtu číslo 5, dostanu číslo 6.
Jaké číslo si myslím?

Úloha:

Myslím si číslo. Když ho zvětším o 7, dostanu číslo 12.
Jaké číslo si myslím?

Úloha:

Myslím si číslo. Když ho zmenším o 7, dostanu číslo 6.
Jaké číslo si myslím?

Komentář pro učitele:

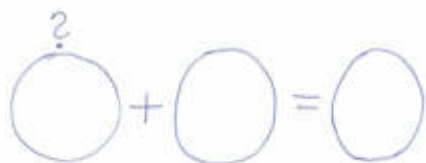
Učitel může úlohy rozšířit o podobně zadané úlohy v číselném oboru 0–20 a získat odpovědi na diagnostickou otázku.

Chceme sledovat:

- zda a jak se mění úspěšnost řešení podle charakteru operace (přičítání, odečítání),
- zda a jak se mění úspěšnost řešení podle formulace operace (přičtu – zvětším, odečtu – zmenším).

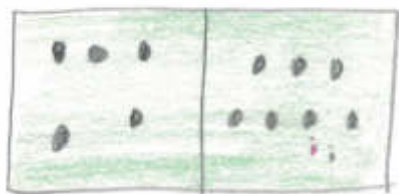
Poznátky:

- Úlohy s pojmy přičtu, odečtu nedělaly problém, přesto mírně vyšší chybovost se objevovala u odčítání.
- Odečítání je pro žáky náročnější i na představu. Několikrát se objevil jev, kdy neuměli svůj myšlenkový proces převést do písemného záznamu, ačkoli u sčítání to zvládli.
- Úlohy s pojmy zvětším a zmenším byly již s výraznější chybovostí. Žáci rozuměli, s jakou početní operací je slovo spjaté, ale úlohu řešili postupem, kdy vzali ze zadání čísla a propojili je s početní operací, kterou určilo dané slovo.
- Při následné diskuzi mezi žáky a sdílení řešitelských strategií se objevil tento návrh na grafický způsob záznamu, kterou část spolužáků ve třídě přejala:

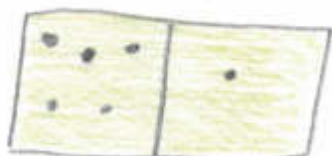


- Žákovské řešitelské strategie: Žáci zapisují úlohu v pořadí, jak odpovídá textovému zadání ($? + 7 = 12$), někdo eviduje otazník, někdo prázdný rámeček. Objevují se i opačné početní operace (řeší odzadu). Někteří žáci řešili pomocí obrázků (např. nakreslené ruce s prsty), pravděpodobně řešili dopočítáváním.
- Někteří žáci ve 3. ročníku neměli stále propojené slovo zmenším s operací odčítání.
- Někteří žáci využívali vizualizaci počtu a strategii postavenou na součtu, ale nevěděli, jak toto aplikovat do odčítání, viz další ukázky:

Myslím si číslo, když k němu přičtu 5, dostanu 12. Jaké číslo si myslím? 17



Myslím si číslo, když od něho odečtu číslo 5, dostanu číslo 6. Jaké číslo si myslím?



Následná diferenciacie, reedukace:

- Při potížích s tímto typem úloh žákům pomáhalo identické úlohy přenést do jiného prostředí (vytvořit izomorfní úlohy). Učitelé často využívali prostředí Hadů a následně se s žáky vraceli k těmto úlohám.
- Další podporou pro žáky, kteří měli s úlohami potíže, bylo sémantické ukotvení (např.: Na míse bylo 15 koláčů. Po obědě se jejich počet zmenšil o 7. Kolik koláčů zbylo na míse?) a následný návrat k úlohám o myšleném čísle.
- Obtížnost snížíme také snížením číselného oboru, žáky podporujeme v manipulaci.

Aditivní operace v kombinaci s polovinou

Úloha:

Jaké číslo si myslím?

a) Když k němu přičtu polovinu z čísla 6, dostanu 8.

b) Když od něho odečtu polovinu čísla 10, dostanu 10.

c) Když k němu přičtu polovinu z čísla 8, dostanu 16.

d) Když od něho odečtu polovinu čísla 12, dostanu 14.

Komentář pro učitele:

Předchozí úloha ($? + 5 = 12$) vyžaduje jeden krok (např. $12 - 5$). Oproti tomu tato série vyžaduje určení poloviny nějakého čísla (gradace použitím zlomku) a teprve poté další krok. Pokud bychom chtěli takové úlohy připravit, můžeme zařadit úlohy typu: „Myslím si číslo. Když udělám jeho polovinu, dostanu 7.“ apod.

Chceme sledovat:

- zda a jak se mění úspěšnost řešení v souvislosti s více krokovým postupem řešení,
- zda žáci určí polovinu z daného čísla.

Poznátky:

- Žáci zapisují buď úlohu, nebo rovnou výsledek. Podle slov učitelů je pro některé žáky obtížné svůj postup zapsat, často i ústně vysvětlit, a to i tehdy, kdy řešili správně.
- Objevovaly se tyto chyby: Žák sčítal čísla, která viděl v zadání bez porozumění textu. Několik žáků nepracovalo s polovinou, někdy to bylo způsobeno nepozorností při čtení zadání, někdy to bylo spojené s neporozuměním pojmu polovina (zjištěno následně při výzvě o modelování tohoto pojmu).

Následná diferenciacie, reedukace:

- Jedná se o řetězenou úlohu, žák tedy musí udělat více dílčích úkonů (určit část celku, pak ji odečítat/přičítat). Reedukací může být úloha bez zlomků (tím ověříme, zda žák uchopil zadání), dra-

matizace (myšlené číslo mám jako kouzelník na kartičce, tedy číslo „existuje“). Toto použijeme v případě, že žák nemá problém se zlomky, ale s uchopením. Také je důležitá zkouška, zda číslo, které mi vyšlo, podmínku splňuje.

- Úspěšnost podobných úloh zde naráží kromě matematické gramotnosti také na čtenářskou gramotnost. Učitelé se snažili, aby žáci porozuměli textu. Nejprve volili cestu vysvětlování skrze žáky, kteří úlohu rozumí, tedy aby svými slovy vysvětlili ostatním, o co se v úloze jedná. Dále pak pracovali s textem. Snažili se, aby si ho žáci mohli rozdělit na jednotlivé dílčí kroky, případně společně se třídou hledali cesty, jak např. graficky označit jednotlivé kroky, které se odehrávají v mentální rovině.

ad 2) formulace procesu – multiplikativní operace

2.–3. ročník

Úloha:

Myslím si číslo. Když ho vynásobím 5, dostanu číslo 15.
Jaké číslo si myslím?

Komentář pro učitele:

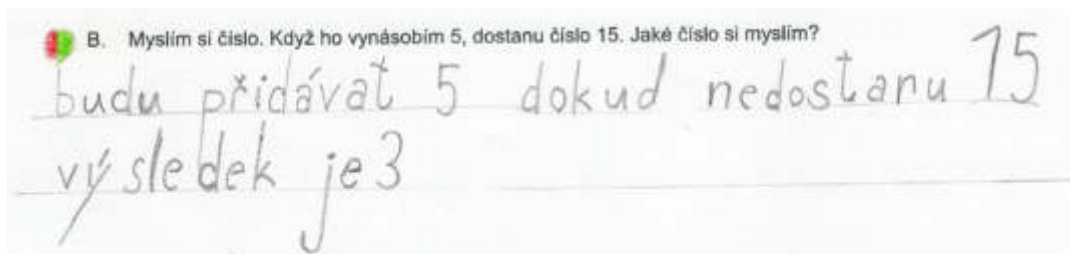
Úlohy s násobením (dělením) mají stejné řešitelské strategie jako úlohy se sčítáním (odčítáním). Podobné zkušenosti jsou velmi cenné, žáci např. používáním strategie od konce zlepšují své porozumění inverzním operacím. V úlohách s násobením se objevuje ještě jedna nová myšlenka – znalost násobilky. Učitel si tak může diagnostikovat úroveň násobilkových spojů jednotlivých žáků. Pokud žáci mají potíže, mohou používat např. násobilkovou tabulku.

Chceme sledovat:

- zda žáci rozumí operaci násobení,
- zda některé spoje znají žáci z paměti,
- jaké strategie žáci při násobení používají (např. opakované sčítání).

Poznatky:

- V násobení žáci viděli opakované přičítání, úlohy dokázali modelovat či vizualizovat.



- Někteří druháci úlohu řešili s oporou o násobilkovou tabulku.

Následná diferenciacie, reedukace:

- Reedukace je podobná jako u sčítání (odčítání). Je třeba zjistit, kde je lokalita chyby žakovského řešení. Může být např. v řešitelské strategii. K tomu je nejsnadnější třídní diskuze s žáky, kteří mají nějakou strategii vybudovanou. Často se objevuje zmíněná strategie od konce. Nabízí se i propojení s izomorfními úlohami z prostředí Hadi (čili přepsání úlohy do hada a vzájemné porovnávání úloh). Pokud je chyba v násobkových spojích, je třeba se zaměřit na ně – pomoc násobkové tabulky, propojení spojů na opakované sčítání, využívání tzv. majákových spojů (to jsou ty, které žák již rychle určí sám, které umí).

Multiplikativní operace v kombinaci s aditivní operací

Úloha:

Myslím si číslo, když ho vynásobím 2 a přičtu 3, vyjde mi 11.

Úloha:

Myslím si číslo, když ho vynásobím 2 a odečtu 3, vyjde mi 11.

Komentář pro učitele:

Tyto úlohy jsou formulovány procesuálně pomocí slovesa značícího operaci, kdežto následující série je formulována konceptuálně pomocí podstatného jména značícího celek. Většina žáků je zaměřena spíše na proces, takže obecně tyto úlohy budou asi pro většinu z nich jednodušší.

Poznátky:

- Ukázky řešení:

Myslím si číslo, když ho vynásobím 2 a přičtu 3, vyjde mi 11.

$$2 \times (4) + 3 = 11$$



Myslím si číslo, když ho vynásobím 2 a pak odečtu 3, vyjde mi 11.

$$(14) - 3 = 11$$

zapomněl, že 14 je dvojnásobkem.

Následná diferenciacie, reedukace:

- Několik žáků dostalo k řešení zároveň úlohu následující, kde byla obtížnost zvýšena formulací (ze zadání byly odstraněny číslice a došlo k jejich nahrazení slovním vyjádřením).

Úloha:

Myslím si číslo, když ho vynásobím dvěma a přičtu sedm, vyjde mi sedmnáct.

Myslím si číslo, když ho vynásobím 2 a přičtu 3, vyjde mi 11.

$$(4) + 4 + 3 = 11$$



Myslím si číslo, když ho vynásobím ² dvěma a přičtu ⁷ sedm, vyjde mi ¹⁷ sedmnáct.

$$5 + 5 + 7 = 17$$



Poznátky:

- V tomto řešení je viditelná strategie opakovaného sčítání místo využití násobení, u druhé úlohy přepis číslovek do podoby číslic (žák tímto způsobem uchopoval úlohu).
- Tato verze úlohy se ukázala jako náročnější.

Úloha:

Jaké číslo si myslím?

a) Když k jeho dvojnásobku přičtu 1, dostanu 11.

b) Když k jeho trojnásobku přičtu 2, dostanu 11.

c) Když od jeho trojnásobku odečtu 4, dostanu 11.

d) Když od jeho dvojnásobku odečtu 1, dostanu 11.

Komentář pro učitele:

Učitel může sledovat, jak jsou žáci úspěšní při řešení těchto úloh. Obdobně jako u předchozí série se zlomky (polovinou) je k řešení úlohy třeba více kroků. Namísto zlomků se zde objevují pojmy dvojnásobek a trojnásobek. Tam nejspíše může být kámen úrazu. V praxi se častěji vyskytla např. následující žakovská chyba. Ilustrativní úloha: Urči dvojnásobek čísla 6. Řešení žáka: „Dvakrát šest je 12, takže dvojnásobek čísla 6 je $6 + 12 = 18$.“ Chyba je očividná, žák má dobře v mysli násobení dvěma, ale z nějakého důvodu přičte původní číslo ještě jednou. Proto je třeba zaměřit pozornost na tyto pojmy a v případě potíží zadat snazší úlohy.

Poznátky:

- Násobení žáci často řešili opakovaným sčítáním, viz ukázka:

- a) Když k jeho dvojnásobku přičtu 1, dostanu 11. Myslím si číslo 5
 $5+5+1=11$
- b) Když k jeho trojnásobku přičtu 2, dostanu 11. Myslím si číslo 3
 $3+3+3+2=11$
- c) Když od jeho trojnásobku odečtu 4, dostanu 11. Myslím si číslo 5
 $5+5+5-4=11$
- d) Když od jeho dvojnásobku odečtu 1, dostanu 11. Myslím si číslo 6
 $6+6-1=11$

- Někteří žáci nepracovali s násobky, nezohlednili zadanou početní operaci:

- a) Když k jeho dvojnásobku přičtu 1, dostanu 11. 10 $+1=11$
- b) Když k jeho trojnásobku přičtu 2, dostanu 11. 9 $+2=11$
- c) Když od jeho trojnásobku odečtu 4, dostanu 11. 8 $+4=11$
- d) Když od jeho dvojnásobku odečtu 1, dostanu 11. 10 $+1=11$

- Objevovaly se také chyby popisované již u předchozích úloh (žáci vyjmou čísla ze zadání a provedou s nimi takovou početní operaci, ke které nabádá slovo přičtu/odečtu):

- a) Když k jeho dvojnásobku přičtu 1, dostanu 11. 5
- b) Když k jeho trojnásobku přičtu 2, dostanu 11. 13
- c) Když od jeho trojnásobku odečtu 4, dostanu 11. 8
- d) Když od jeho dvojnásobku odečtu 1, dostanu 11. 10

- Další ukázka prezentuje strategii řešení od konce a využití opačných početních operací. Zároveň zde můžeme vidět velmi častý jev, kterým je chybné využití rovnosti (žák zapisuje proces lineárně za sebe):

- Jaké číslo si myslím?
- a) Když k jeho dvojnásobku přičtu 1, dostanu 11. 5 $11-1=10:2=5$ A
- b) Když k jeho trojnásobku přičtu 2, dostanu 11. 3 $11-2=9:3=3$ B
- c) Když od jeho trojnásobku odečtu 4, dostanu 11. 5 $15-4=10$ C
- d) Když od jeho dvojnásobku odečtu 1, dostanu 11. 6 $12-1=11$ D

3.–4. ročník

Úloha:

Myslím si číslo. Když ho vydělím 4, dostanu číslo 6.
Jaké číslo si myslím?

Poznátky:

- Tento typ úloh se ukázal pro žáky jako obtížný.

Následná diferenciaci, reedukace:

- V rámci snížení obtížnosti dostali někteří žáci 3. ročníku modifikované zadání:

Úloha:

Myslím si číslo. Když ho vydělím 2, dostanu číslo 5.
Jaké číslo si myslím?

Poznátky:

- První myšlenkový proces vedl přes nalezení poloviny z 5. Vzápětí si žák toto myšlené číslo dosadil do zadání a došlo k opravě.

(A) MYSLÍTE SI ~~24~~
 ~~$24 : 2 = 12$~~ 10

Úloha:

Myslím si číslo. Jeho šestinásobek je číslo 12. Jaké číslo si myslím?

Poznátky:

- Objevuje se opakované sčítání jako strategie pro násobení.
- Opakovaně se objevil výsledek 72 (postupem $12 + 12 + 12 \dots 6 \cdot 12$). Jedná se o signální řešení (vezmu čísla ze zadání, tedy 6, 12, dále slovo násobek, tudíž budu násobit).

Myslím si číslo. Jeho šestinásobek je číslo 12. Jaké číslo si myslím?

- Stejný poznatek potvrzen i ve 3. ročníku.
- Někteří třetáci řešili inverzně.

Následná diferenciaci, reedukace:

- Možnou reedukací může být dramatizace s kartou, na kterou napíšeme číslo od žáků (chybné), vložíme kartu do zadání úlohy a pak provedeme zkoušku. Rozvíjíme také čtenářskou gramotnost, zadáváme žákům častěji antisignální úlohy.
- Více pracovat s pojmy šestinásobek a podobnými (pětinásobek apod.) v rámci matematických rozvíček.
- Zařazovat pravidelně tento typ úloh. Jedná se o izolované modely, a tedy důležité zkušenosti pro žáky.

Úloha:

Myslím si číslo. Jeho třetina je číslo 7. Jaké číslo si myslím?

Komentář pro učitele:

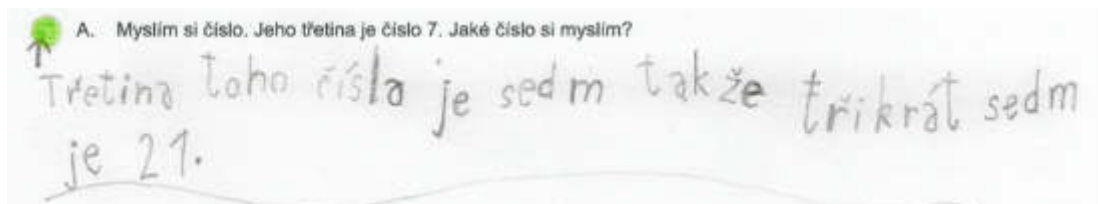
Násobení a dělení jsou formulovány jako proces, násobek a část jako koncept. Lze tedy usuzovat na převažující procesuální nebo konceptuální chápání úlohy.

Chceme sledovat:

- zda a jak se mění úspěšnost řešení podle charakteru operace (násobení, dělení),
- zda a jak se mění úspěšnost řešení podle formulace operace (vynásobím – násobek, vydělím – část).

Poznátky:

- Třetinu žáci vnímali jako jeden díl ze tří stejných.



- Často se objevovalo opakované sčítání.

$$7+7+7=21$$

- Žáci neoznačovali ve svých výpočtech myšlené číslo.

Následná diferenciac, reedukace:

- Učitel může úlohu rozšířit o podobně zadané úlohy v číselném oboru malé násobilky a získat odpovědi na diagnostickou otázku.

Úloha:

Myslím si číslo. Když k němu přičtu dvojnásobek čísla 8, dostanu číslo 23. Jaké číslo si myslím?

Chceme sledovat:

- zda žák rozumí pojmu dvojnásobek čísla 8,
- jakou strategii žák zvolí k řešení úlohy.

Poznátky:

- Obecně je největším problémem to, že si žáci neuvědomují neznalost počátečního čísla.
- Někteří žáci, kteří řeší odzadu, a tedy otáčejí operace, upravují i dvojnásobek na polovinu.
- Někteří žáci chybovali v tom, že úloha mluví o dvojnásobku, ale žáci řešili s polovinou.

Následná diferenciac, reedukace:

- Reedukací může být kontrolní dosazení určeného čísla do zadání.
- Jinou reedukační cestou je zadat úlohy v jiných prostředích (Hadi, Obálky).

Úloha:

Myslím si číslo. Když k od něho odečtu trojnásobek čísla 4, dostanu číslo 15. Jaké číslo si myslím?

Komentář pro učitele:

Typově se jedná o stejnou úlohu jako výše. Pro některé žáky může být tato náročnější trojnásobkem a namísto sčítání je zde operace odčítání.

Poznátky:

- Několikrát se objevil výsledek 3. Možná úvaha řešitelů je taková, že vynásobili $3 \cdot 4$, výsledek 12, toto pak odečetli na základě slova rozdíl od 15 a tím vyšla hodnota 3.
- Následující řešení ilustruje řešitelskou strategii s využitím inverzních početních operací:

D. Myslím si číslo. Když k od něho odečtu trojnásobek 4, dostanu číslo 15. Jaké číslo si myslím?

Trojnásobek 4 je 12

neznámé číslo minus 12 rovná se 15

$12 + 15 = 27$

Úloha:

Myslím si číslo. Když k němu přičtu třetinu čísla 9, dostanu číslo 14. Jaké číslo si myslím?

Poznátky:

- Mnoho žáků využívalo inverzní početní operace, viz následující ukázka:

Myslím si číslo. Když k němu přičtu třetinu čísla 9, dostanu číslo 14.

$9 : 3 = 3$ $14 - 3 = 11$ *tak odečtu*

- V dalším řešení je vidět, že v první etapě řešitelského procesu žák určil třetinu čísla 9 a následně od tohoto výsledku odečetl 14. Správným výsledkem by mělo být záporné číslo, které ovšem žák nezohlednil a hodnotu uvedl jako kladnou.

Myslím si číslo. Když k němu přičtu třetinu čísla 9, dostanu číslo 14. Jaké číslo si myslím? 11

$9 : 3 = 3$
 $3 - 14 = 11$

- Problematický je pro některé žáky pojem třetina – i když v jiných úlohách (např. dělení tyče) jim třetina potíže nedělá, zde je to zřejmě v náročnějším kontextu delšího slovního zadání. Není to tedy o tom, že by žáci neuměli rozdělit provázek na třetiny, ale spíš zatím neumí pracovat se třetinou na strukturální úrovni (tedy třetina čísla).

Následná diferenciaci, reedukace:

- Někteří učitelé využili jako reedukační nástroj rozstříhané úlohy (zadání o myšleném čísle a k nim příslušné rovnice). Úkolem žáků bylo najít správné dvojice.

Úloha:

Myslím si číslo. Když od něho odečtu čtvrtinu čísla 12, dostanu číslo 14. Které číslo si myslím?

Komentář pro učitele:

Řetěžená úloha, stejný typ jako úlohy předchozí, gradace zlomkem nebo x-násobkem.

Poznátky:

- Řešitelská strategie: Místo myšleného čísla mnoho žáků nejdříve zapsalo otazník nebo prázdné políčko a při vyřešení za něj zapsali výsledek. Při sdílení ve třídě tento způsob zápisu přebralo poměrně hodně spolužáků.

$$? - 3 = 14$$

$$12 : 4 = 3$$

- Objevilo se i upravení zápisu ve smyslu znázornění operace, nad slovo přičtu zapisovali žáci +, nad slovo dostanu =.
- Někteří žáci chybovali v pojmu čtvrtina, pracovali s ním jako se třetinou, čtvrtina z 12 je pak podle nich 4 ($12 : 3 = 4$).

Následná diferenciacce, reedukace:

- Ně kterým žákům pomohlo rozfázování, tedy nejprve si určit danou část celku a teprve poté pokračovat se získanou hodnotou.
- Pokud žákům úlohy nečinily potíže, můžeme jim zadat následující náročnější sérii. Stejně jako v předchozích se v těchto úlohách objevují pojmy dvojnásobek a trojnásobek, ale nyní jde např. o dvojnásobek neznámého, nikoli konkrétního čísla.

Úloha:

Myslím si číslo. Když k jeho dvojnásobku přičtu číslo 5, dostanu číslo 29. Jaké číslo si myslím?

Úloha:

Myslím si číslo. Když od jeho trojnásobku odečtu číslo 7, dostanu číslo 32. Jaké číslo si myslím?

Úloha:

Myslím si číslo. Když k jeho polovině přičtu číslo 2, dostanu číslo 13. Které číslo si myslím?

Úloha:

Myslím si číslo. Když od jeho třetiny odečtu číslo 3, dostanu číslo 6. Jaké číslo si myslím?

Poznátky:

- V této řešitelské sérii je zjevné, že řešitel odhalil strategii řešení odzadu. Vzhledem k tomu, že se dosud nesetkal se závorkami, je neeviduje do svého postupu.

a) Myslím si číslo. Když k jeho dvojnásobku přičtu číslo 5, dostanu číslo 29. Jaké číslo si myslím? *12*
$$29 - 5 \div 2 = 12$$

b) Myslím si číslo. Když k jeho trojnásobku odečtu číslo 7, dostanu číslo 32. Jaké číslo si myslím? *13*
$$32 + 7 \div 3 = 13$$

c) Myslím si číslo. Když k jeho polovině přičtu číslo 2, dostanu číslo 13. Jaké číslo si myslím? *22*
$$13 - 2 + 11 = 22$$

d) Myslím si číslo. Když od jeho třetiny odečtu číslo 3, dostanu číslo 6. Jaké číslo si myslím? *9*
$$6 - 3 \cdot 3$$

← to je pro třetina

4.–5. ročník

Komentář pro učitele:

V následujících úlohách využíváme různé gradační parametry, úlohy mají ilustrativní charakter a dle potřeby je možné je různě modifikovat a tím rozšiřovat jejich nabídku. Mezi využití **gradační parametry** patří **velikost čísel, čtenářská gramotnost (náročnost textu), řetězení operací, náročné pojmy a myšlenky (dvojnásobek, trojnásobek, polovina, třetina), doplňování operátoru, skaláru nebo stavu, využití zlomků**. V některých úlohách se tyto parametry prolínají.

Úloha:

Myslím si číslo. Když k jeho třetině přičtu polovinu čísla 10, dostanu číslo 12. Jaké číslo si myslím?

Úloha:

Myslím si číslo. Když k jeho dvojnásobku přičtu trojnásobek čísla 6, dostanu číslo 22. Jaké číslo si myslím?

Úloha:

Myslím si číslo. Když od jeho čtvrtiny odečtu šestinu čísla 18, dostanu číslo 3. Jaké číslo si myslím?

Úloha:

Myslím si číslo. Když od jeho sedminásobku odečtu pětinasobek čísla 6, dostanu číslo 12. Jaké číslo si myslím?

Komentář pro učitele:

Nyní zlomky i násobky určujeme z neznámého čísla. Zároveň se zde mimo řetězení početních operací silněji objevuje čtenářská gramotnost. To je obrovské téma. V praxi se objevují např. slovní úlohy, např. slovní úlohy, které žáci vyřešit neumí, i když mají k dispozici veškeré potřebné matematické znalosti. Pokud se ale rozdělí na menší části, žáci sami pojmenují, že jednotlivé podúlohy vlastně obtížné nejsou a z hlediska počítání jsou nenáročné. Pro žáky je náročné orientovat se v textu. Proto myšlenka rozdělit komplexní úlohu na menší části je dobrou učitelskou strategií i možností reedukace.

Poznátky:

- U první úlohy se objevila strategie hledání násobků tří (poněvadž se v zadání vyskytuje třetina myšleného čísla).
- Nejčastější chyba v první úloze byla taková, že žáci našli číslo 7, ale zapomněli ho vynásobit třemi, aby zjistili myšlené číslo.
- Postupně klesala řešitelská úspěšnost v rámci série.
- Častou chybou bylo to, že žáci pracovali hlavně s čísly zapsanými číslicemi a nepracovali s některými zlomky zapsanými slovně.
- Ukázka řešení:

Úloha 32: $6 \cdot x = 18$ $18:6=3$ ✓
Myslím si číslo. Když od jeho sedminásobku odečtu pětinasobek čísla 6, dostanu číslo 12. Jaké číslo si myslím?

Úloha 33: $6 \cdot 5 = 30$ $x \cdot 7 = x$ $30 - x = 12$ $18 \cdot 7 = 18$ ✓

Pětinasobek čísla 6 žák určil správně. Zajímavá je rovnice $x \cdot 7 = x$ – žák chce zřejmě vyjádřit sedminásobek neznámého čísla, což je pro něj také neznámé číslo. Uvědomuje si však, že je to číslo jiné, protože ho značí jinak stylizovaným písmenem x. Zřejmě žáka nenapadlo, že může použít i jiné písmeno. To ukazuje, že je důležité nefixovat žákům jen jednu podobu neznámé, ale vést je k poznání, že neznámou můžu obecně značit jakýmkoli písmenem nebo symbolem. Žák poté špatně zapsal odečtení čísla 30 od sedminásobku neznámého čísla – prohodil pořadí menšence a menšitele. Nicméně i přes tento špatný zápis se zřejmě ke správnému výsledku 6 dopracoval (pozn.: $18 \cdot 7$ a 18 již nepatří k tomuto řešení).

Následná diferenciaci, reedukace:

- Pokud měli žáci se sérií potíže, lze jim zadávat úlohy slovně. Tento přístup žákům pomohl.
- Při obtížích můžeme žákům úlohy rozfázovat, zjednodušit je, rozdělit zadání, zařadit méně kroků nebo řetězit úlohy tak, aby řešení jedné úlohy pomohlo řešení další. Některým žákům sice vyřešení jednoduchých úloh nepomohlo k vyřešení úloh obtížnějších, ale vyřešili alespoň ty jednoduché – což vidíme jako klíčové, protože díky tomu není žák frustrovaný nepřiměřenou výzvou, ale zažije alespoň nějaký úspěch. Ne všichni žáci si umí z náročné úlohy vytáhnout něco jednoduchého a vyřešit alespoň dílčí úkol, ale když to za ně takto udělá učitel, tak si s jednoduchou úlohou poradí.

Úloha:

Myslím si číslo. Když k jeho třetině přičtu dvojnásobek čísla 7, dostanu číslo 16. Jaké číslo si myslím?

Poznátky:

- Ukázky řešení:

Myslím si číslo. Když k jeho třetině přičtu dvojnásobek čísla 7, dostanu číslo 16. Jaké číslo si myslím?

$$x:3+2\cdot7=16 \quad x=2$$

První řešení ukazuje na bezproblémové uchopení úlohy matematickým aparátem. Žák rozumí jazyku písmen a čísel a umí do něj převést situaci zadanou slovně. Nicméně žák chyboval v určení neznámého čísla. Můžeme se domnívat, že žák pracoval s třetinou neznámého čísla (což je 2) a zapomněl z této třetiny následně určit ono neznámé číslo.

Myslím si číslo. Když k jeho třetině přičtu dvojnásobek čísla 7, dostanu číslo 16. Jaké číslo si myslím?

$$\begin{array}{l} 7 \cdot 2 = 14 \\ 14 + ? = 16 \\ 14 + 2 = 16 \end{array} \quad \text{Myslím si číslo 6.}$$

Druhé řešení ukazuje, že žák rozumí zlomkům a umí je i znázornit. Jazyk písmen mu zatím není blízký, protože neznámé číslo znázornil třemi kolečky a neznámý mezivýsledek v rovnici $14 + ? = 16$ označil otázkou. Žák celý svůj myšlenkový proces zachytil sérií výpočtů a rovnic. Nevíme, zda tomu je tak proto, aby nic nezapomněl, nebo zda chtěl učiteli ukázat celý svůj myšlenkový proces.

Úloha 33:

Myslím si číslo. Když k jeho třetině přičtu dvojnásobek čísla 7, dostanu číslo 16. Jaké číslo si myslím?

Žák nemá potřebu řešitelský proces zaznamenávat. Může to být z toho důvodu, že úloha je pro něj snadná, ale důvodů může být více.

Úloha 33:

Myslím si číslo. Když k jeho třetině přičtu dvojnásobek čísla 7, dostanu číslo 16. Jaké číslo si myslím?

Z analýzy řešitelského procesu žáka můžeme pravděpodobně usuzovat, že je silně procesuální typ. Zapisuje si početní operace v pořadí, v jakém se objevují v zadání úlohy. Netvoří přímo rovnosti nebo rovnice (což by bylo konceptuální uchopení úlohy), a pokud ano, tak nejsou zcela správně zapsané. Například rovnost $7 \cdot 2 = 14 = 16$ není správně, protože neplatí, že $7 \cdot 2 = 16$. Nicméně žák má i přes chybný zápis správnou představu o úloze, a protože je procesuální typ, zapisuje to, jak mu v hlavě běží myšlenky. To, že zápis jako celek není správný, mu nevadí.

Úloha:

Myslím si číslo. Když k jeho dvojnásobku přičtu čtvrtinu čísla 8, dostanu číslo 22. Jaké číslo si myslím?

Úloha:

Myslím si číslo. Když od jeho čtvrtiny odečtu trojnásobek čísla 2, dostanu číslo 3. Jaké číslo si myslím?

Úloha:

Myslím si číslo. Když od jeho čtyřnásobku odečtu pětinu čísla 20, dostanu číslo 8. Jaké číslo si myslím?

Myslím si číslo – řetězené operace (aditivní, multiplikativní)

Sémantický význam čísel: Čísla vyjadřují KVANTITU – dva STAVY a jeden OPERÁTOR (změny nebo porovnání) nebo SKALÁR (změny nebo porovnání). Sémantická situace tvoří triádu $S1 + O1 = S2$ nebo $S1 \cdot s = S2$.

Diagnostické otázky:

1. Projeví se různá pozice neznámého operátoru/skaláru a jak?
2. Projeví se různá formulace procesu a jak?
3. Projeví se různá hodnota stavů?
4. Projeví se různá formulace stavů?
5. Jaké strategie žák při řešení používá?
6. Je žák schopen přepsat úlohu do jiných prostředí a chápe mezi nimi souvislosti? Usnadní tento přepis řešení úlohy? Preferuje žák nějaké konkrétní prostředí?

3.–4. ročník

Úloha:

Když od mého čísla odečtu 7 a přičtu 3, dostanu 1. Mé číslo je

Úloha:

Dvojnásobek (trojnásobek, čtyřnásobek, pětinasobek) mého čísla je Mé číslo je

Úloha:

Polovina, třetina, čtvrtina, pětina, šestina mého čísla je 7.
Mé číslo je

Poznátky:

- Zde je zajímavé, jakým způsobem žák s úlohou pracoval. Graficky si rozdělil slova x-násobek a pak také výsledek napsal jako odpovídající úlohu:

Dvojnásobek mého čísla je 16. Mé číslo je $2 \cdot 4 = 16$
Trojnásobek mého čísla je 18. Mé číslo je $3 \cdot 6 = 18$
Čtyřnásobek mého čísla je 32. Mé číslo je $4 \cdot 8 = 32$
Pětinasobek mého čísla je 30. Mé číslo je $5 \cdot 6 = 30$

- Ukázky řešení:

1. Když od mého čísla odečtu 7 a přičtu 3, dostanu 1. Mé číslo je 5
2. Dvojnásobek mého čísla je 16. Mé číslo je 8
Trojnásobek mého čísla je 18. Mé číslo je 6
Čtyřnásobek mého čísla je 32. Mé číslo je 8
Pětinásobek mého čísla je 30. Mé číslo je 6
3. Polovina mého čísla je 7. Mé číslo je 14
Třetina mého čísla je 10. Mé číslo je 30
Čtvrtina mého čísla je 4. Mé číslo je 16
Pětina mého čísla je 7. Mé číslo je 35
Šestina mého čísla je 7. Mé číslo je 42

Úloha 1, ve které se v mezivýpočtu dostaneme do záporných čísel, žákovi problém zřejmě nedělala. Lze tak usuzovat z toho, že zde není připsán žádný výpočet, pouze správný výsledek. Aditivní operace (sčítání a odčítání) jsou pro žáka zřejmě jednodušší než operace multiplikativní (násobení a dělení), protože v dalších úlohách, kde se tyto operace vyskytují, můžeme vidět jeho potřebu zápisu nebo vizualizace řešitelského procesu.

Úloha:

Když k mému číslu přičtu jeho dvojnásobek, dostanu číslo 21.
Mé číslo je

Úloha:

Třetina myšleného čísla je o 4 menší než jeho polovina.
Jaké číslo si myslím?

Úloha:

Polovina z třetiny myšleného čísla je o 1 větší než jeho sedmina.
Jaké číslo si myslím?

Myslím si dvě (tři, ...) čísla

Od 2. ročníku se objeví úlohy „Myslím si dvě čísla“, které otevírají myšlenku **soustavy rovnic**. Dále se objevují úlohy s podmínkou a úlohy, které mohou mít více řešení.

Diagnostické otázky:

1. Projeví se počet myšlených čísel v úspěšnosti řešení a jak?
2. Jaké strategie žák při řešení používá (opakované pokusy, pomůcky, přepis do jiných prostředí apod.)?
3. Zajímá žáka další řešení úlohy, pokud již jedno odhalil? Co ho motivuje k hledání dalších řešení?
4. Pokouší se žák o zobecnění řešení? Co ho k tomu motivuje?

2.–3. ročník

Úloha:

Myslím si dvě čísla, jejich součet je 5, jejich součin je 6.
Která čísla si myslím?

Modifikace v příslušném oboru a operacích (součet, rozdíl, součin, podíl).

Komentář pro učitele:

Tyto pojmy jsou pro mnohé žáky ve 2. ročníku nové a zpočátku neznají jejich význam. Je potřeba, aby je učitel přirozeně používal během hodin a pojmenovával jimi výsledky příslušných operací. Kromě toho u těchto pojmů platí také didaktická zásada neučit všechny tyto pojmy najednou. Nejprve se zaměříme například na součet, a teprve když mají žáci tento pojem zažitý, můžeme učit rozdíl. Podobně to platí u všech duálních pojmů (nejdříve učíme pravá ruka, teprve potom levá, protože pokud je učíme zároveň, bude se to žákům spíš plést).

Poznátky (z modifikované úlohy):

- Třetákům byla zadána tato dvojice úloh s cílem vyjasnit skrze úlohu klíčové pojmy součet a součin:

Mám dvě čísla 4 a 5. PROTOŽE $4 \cdot 5 = 20$
Jejich součet $4+5$ je 9. Jejich součin $4 \cdot 5$ je 20.
PROTOŽE $4+5=9$

Myslím si dvě čísla.
Jejich součet je 5 a jejich součin je 6.
Jaká čísla si myslím? 3, 2 PROTOŽE $3 \cdot 2 = 6$ $3+2=5$

Pro některé žáky nebyla podobnost úloh hned viditelná, pomohlo společné komentování a sdílení. Bylo by možné vyzkoušet druhou úlohu zadat číselně shodně s první úlohou a sledovat zde, zda si toho žáci všimnou a zda to bude reedukační cesta pro žáky, kterým druhá úloha nešla. Při sdílení postupů někteří žáci zmínili, že je pro ně jednodušší začít přes součet, pro některé přes součin. Zaznělo také, že záleží na zadané hodnotě, např. pokud je součin 15, rovnou je napadala čísla 3 a 5.

3.–4. ročník

Úloha:

Myslím si dvě čísla, jejich součet je 15 a součin 54.
Jaká čísla si myslím?

Modifikace v příslušném oboru a operacích (součet, rozdíl, součin, podíl).

Komentář pro učitele:

Podobné úlohy lze modifikovat do jiných prostředí, kontextů. Žáci si takovým porovnáváním těchto kontextů rozšiřují možnosti řešitelských strategií. Mohou úlohu převést do pro ně výhodnější situace. Níže je uvedeno řešení, kde žák úlohu zapsal do dvou hadů. Jiný žák zase úlohu přeformuloval do obálky. Podobně mohou žáci využít např. součtové trojúhelníky s podmínkou apod.

Poznátky:

- Úloha se ukázala jako problematická, mnoho žáků chybovalo. Po řešení následovala diskuze, ve které došlo k porozumění díky přepisu slovního zadání do úlohy (tím tedy k přepisu slov součet a součin do odpovídající matematické operace).
- Zajímavé řešení, kdy žák využil izomorfního přepisu do prostředí Obálky:

Myslím si dvě čísla. Jejich součet je 15 a součin 54. Jaká čísla si myslím?

$9 + 5 = 14$ $9 \cdot 5 = 45$
 ~~$9 + 6 = 15$ $9 \cdot 6 = 54$~~

- Jinou strategií byl izomorfní přepis do prostředí Hadi:

Myslím si dvě čísla, jejich součet je 15 a součin 54. Jaká čísla si myslím? 6, 9
 $6 \rightarrow 75$ $9 \rightarrow 54$

Následná diferenciaci, reedukace:

- Pro reedukaci můžeme úlohu obrátit: Žáci dostanou zadaná (nebo si je zvolí) dvě čísla. Určí jejich součet a součin. Toto provedou několikrát u různých čísel. To by jim mělo usnadnit řešení stejné situace „z druhé strany“, kdy znají součet a součin.
- Obecně není úloha pro žáky triviální, i když jednotlivým pojmům většinou rozumí. Potíž přichází v tom, že se často soustředí např. jen na jeden pojem (součet) a k tomu nějakým způsobem využijí dostupná čísla v zadání. Nedělají zkoušku a ověření, zda řešení vyhovuje zadání, případně si zadáním nejsou jisti a to jim znemožňuje provést zkoušku a ověřit si výsledek.

Úloha:

Myslím si dvě čísla, jejich podíl je 2 a zbytek 1. Najdi další řešení.

Modifikace v příslušném oboru (různé podíly a zbytky). Zobecnění.

Komentář pro učitele:

Úloha obsahuje hlubokou myšlenku. Počet řešení je nekonečný. K jejich nalezení můžeme jít úvahou. Pokud je podíl dvou čísel 2, musí být druhé číslo polovinou prvního. Protože máme ještě zbytek 1, zvětšíme o tento zbytek první číslo. Dvojice čísel, která jsou řešením úlohy, lze evidovat tabulkou:

dělitel	2	3	4	5	6	7	8	9	10
dělenec	5	7	9	11	13	15	17	19	21

Vidíme, že nejmenší dvojice čísel je 5 a 2. Dělitel nemůže být roven 1, protože v takovém případě by zbytek nemohl být 1. První řádek tabulky tvoří posloupnost lichých čísel začínající číslem 5, druhý řádek tabulky tvoří posloupnost přirozených čísel začínajících číslem 2. Žák, který dovede tímto způsobem v tabulce pokračovat, má vztah v tabulce zachycený procesuálně. Učitel může diagnostikovat, kdo z žáků dokáže vztah uchopit konceptuálně: „Pokud je dělitel 20, jaké číslo je na místě dělence?“ Pokud žák ví, že stačí číslo 20 vynásobit dvěma a přičíst jedna, má vztah uchopený jako koncept.

Poznátky:

- Nejčastější problém byl ten, že žáci nezvládli udržet dvě podmínky zároveň (podíl a zbytek).
- Podle žákovských řešení je vidět, že žáci většinou rozuměli, co mají dělat, ale buď se objevily numerické chyby, nebo nedodržení jedné z podmínek.
- Ukázka řešení:

$(6): (13) = 2(1)$ $(7): (15) = 2(1)$ $(8): (17) = 2(1)$ $(9): (19) = 2(1)$
 $(10): (21) = 2(1)$ $(11): (23) = 2(1)$ $(12): (25) = 2(1)$ $(13): (27) = 2(1)$
 $(14): (29) = 2(1)$ $(15): (31) = 2(1)$ $(16): (33) = 2(1)$ $(17): (35) = 2(1)$
 $(18): (37) = 2(1)$ $(19): (39) = 2(1)$ $(20): (41) = 2(1)$ $(21): (43) = 2(1)$
 $(22): (45) = 2(1)$ $(23): (47) = 2(1)$ $(24): (49) = 2(1)$ $(25): (51) = 2(1)$
 $(26): (53) = 2(1)$ $(27): (55) = 2(1)$ $(28): (57) = 2(1)$ $(29): (59) = 2(1)$
 $(30): (61) = 2(1)$ $(31): (63) = 2(1)$ $(32): (65) = 2(1)$ $(33): (67) = 2(1)$
 $(34): (69) = 2(1)$ $(35): (71) = 2(1)$ $(36): (73) = 2(1)$ $(37): (75) = 2(1)$
 $(38): (77) = 2(1)$ $(39): (79) = 2(1)$ $(40): (81) = 2(1)$ $(41): (83) = 2(1)$
 $(42): (85) = 2(1)$ $(43): (87) = 2(1)$ $(44): (89) = 2(1)$ $(45): (91) = 2(1)$
 $(46): (93) = 2(1)$ $(47): (95) = 2(1)$ $(48): (97) = 2(1)$ $(49): (99) = 2(1)$

Ukázka žákovského řešení, které není nijak systematizováno ani řazeno podle velikosti čísel. Nicméně dokládá, že žák úlohu rozumí a uvědomuje si velký počet řešení úlohy. Vhodná reakce učitele by v tomto případě byla zeptat se žáka, zda našel všechna řešení. Pravděpodobně odpoví, že ne a že to ani nelze. Učitel tedy může zúžit obor řešení a zeptat se, zda má všechna řešení třeba do čísla 100. Tyto otázky by měly žáka přivést k myšlence uspořádat nalezená řešení nějakým systematickým způsobem.

Následná diferenciací, reedukace:

- Můžeme snížit obtížnost úlohy tím, že budou žáci nejprve řešit úlohy na dělení se zbytkem. Také jim lze zadat několik úloh na dělení v jednom sloupci a několik výsledků v druhém sloupci a jejich úkolem bude přiřadit úlohu k výsledkům.
- Pokud je úloha pro žáka obtížná, lze obě podmínky v zadání rozdělit a nechat žáka nejdříve vyřešit tyto dvě úlohy odděleně:
 1. Myslím si dvě čísla. Jejich podíl je 2. Která dvě čísla si myslím? Hledej víc řešení.
 2. Myslím si dvě čísla. Jejich podíl vyjde se zbytkem 1 (alternativní formulace: Když první číslo vydělím druhým, výsledek bude se zbytkem 1). Která dvě čísla si myslím? Hledej více řešení.

Pokud obě tyto úlohy vyřeší žák bez problémů, zadá učitel žákovi původní úlohu s oběma podmínkami současně.

Úloha:

Myslím si tři po sobě jdoucí čísla, jejichž součet je a) 9, b) 21, c) 33.
Jaká tři čísla si myslím? Modifikace s jinými součty.
Jaký musí být součet, aby vyšla celá (přirozená) čísla? Zobecnění.

Poznátky:

- Žáci rozuměli pojmu po sobě jdoucí čísla, ale někdo se ptal, zda záleží na pořadí (tedy, zda jsou to čísla 1, 2, 3 a také 3, 2, 1), ale objevilo se i chybné porozumění, kdy si to žák vyložil jako tři po sobě jdoucí násobky tří.
- Pro slabší žáky ve čtení bylo potřeba, aby učitel zadání přečetla a rozdělil ho na části a s žáky si ujasnili význam všech instrukcí a podmínek.
- Žáci nepřišli na trik s dělením součtu třemi, řešili metodou pokusů většinou od nejmenších čísel 1, 2 a 3 (izomorfní úlohu lze zadat např. s parketou 3l ve stovkové tabulce nebo s třemi komíny krychlí, kde lze krásně vizualizovat přesunutím jedné krychle, že tři po sobě jdoucí čísla mají součet rovný trojnásobku prostředního čísla).
- Žáci přišli s hypotézou, že součet tří po sobě jdoucích čísel je vždy lichý (protože v zadání tomu tak bylo), ale když společně prověřili jiné součty, zjistili, že to tak není.
- Žáci úlohu nezobecnili (tedy že součet musí být násobek 3, aby vše vycházelo v celých číslech), nerozuměli formulaci otázky.

Úloha:

Myslím si dvě zrcadlová čísla. Když od většího odečtu menší a rozdíl vydělím devíti, vyjde mi číslo 5. Jaká čísla si myslím?
Najdi další řešení. Zobecnění.

Poznátky:

- Úlohu žáci řešili jednotlivě i ve skupinách.
- Před řešením si žáci v celotřídní diskuzi povídali o tom, co je to zrcadlové číslo (tento pojem se v učebnici vyskytuje s malou četností a žáci by tak díky neznalosti tohoto pojmu nemohli úlohu vyřešit).
- Žáci většinou začali řešit úlohu od konce – věděli, že nějaké číslo mají vydělit 9 a vyjde 5. Tedy našli 45. Pak hledali taková zrcadlová čísla, jejichž rozdíl je 45.
- Někteří udělali tu chybu, že za výsledek nejprve považovali přímo číslo 45. Teprve v okamžiku, kdy je učitel navedl, ať vyzkouší, zda to odpovídá zadání, zjistili, že to není dobře.
- Objevila se řešení 05, 50.
- Úloha žáky bavila, aktivně se snažili přijít na řešení, motivační byla zřejmě i práce ve skupině, protože kdyby byli na úlohu sami, tak by se brzy vyčerpali – takto mohl každý přispět svým dílem ke společnému úsilí – na žakovských řešeních je vidět, že se žáci mnohdy hodně napočítali a vyvinuli značné kognitivní úsilí při hledání řešení. Už toto je cenné, i kdyby se jim řešení najít nepovedlo.

Poznátky z modifikované úlohy:

- V jedné třídě byla zadána modifikovaná úloha v tomto znění: „Myslím si dvě zrcadlová čísla. Když od většího odečtu menší a rozdíl vydělím devíti, vyjde mi číslo 2. Jaká čísla si myslím?“
- Nejčastější řešení žáků byla dvojice čísel 13 a 31. Nejspíš je to proto, že se jedná o řešení s nejmenšími dvojicifernými čísly (přípustné by bylo i řešení 02 a 20, ale žáci si nemuseli být jisti tím, zda je 02 správné řešení).
- Někteří žáci dokázali úlohu zobecnit, respektive našli více takových dvojic a z řešení bylo patrné, že postupovali systematicky. Jeden žák dokonce zmínil, že největší taková dvojice je 97 a 79, ale už následně nikdo neřekl, že rozdíl čísel musí být 2. Místo toho argumentovali, že když mají jednu dvojici nalezenou, tak další najdou tak, že obě čísla zmenší o jedna – tedy jejich objev je zatím na procesuální úrovni, ale ne na konceptuální.

Matematická kouzla

Matematická kouzla mají velký didaktický potenciál. Učitel v roli kouzelníka cílí na **motivaci** žáků. Ti mají snahu kouzlo „rozlousknout“ a sami se stát kouzelníkem. To mívá i silný sociální potenciál. Často se podaří, že žáci na princip kouzla přijdou po několika konkrétních situacích (tzv. izolovaných modelech). Ale zároveň bývá také často zakryto, proč kouzlo funguje tak a tak. To bývá dobrá příležitost pro expertní žáky. Kromě toho se nezdá stávat, že kouzlo neodhalí jeden žák, ale že se podaří jeho podstatu odhalit díky třídní diskuzi a dílčímu přispění většího počtu žáků. Je dobré, když takovou situaci učitel ve třídě zve-domí žákům komentářem, že žáci kouzlo odhalili díky společné týmové spolupráci. Takové situace posilují pozitivní klima ve třídě.

3.–4. ročník

Úloha:

Mysli si číslo. Zaznamenej ho. Odečti od něj 1. Zaznamenej toto číslo. Přičti k němu 1. Zaznamenej i toto číslo. Tato 3 čísla sečti a řekni mi výsledek. Já ti řeknu, na jaké číslo jsi myslel.

Komentář pro učitele:

Tato úloha úzce souvisí s úlohou, kterou jsme zmiňovali výše:

Myslím si tři po sobě jdoucí čísla, jejichž součet je a) 9, b) 21, c) 33.
Jaká tři čísla si myslím? Modifikace s jinými součty.
Jaký musí být součet, aby vyšla celá (přirozená) čísla? Zobecnění.

Jedná se vlastně o úlohu, která je formulovaná opačně. Zde mají žáci určit součet tří po sobě jdoucích čísel. V úloze výše měli součet tří po sobě jdoucích čísel zadán a úkolem bylo čísla najít. Pokud je úloha s hledáním těchto tří čísel pro žáky obtížná, může jim učitel zadat nejdříve tuto úlohu, kde žáci určují součet tří čísel, což bývá jednodušší.

Poznatky:

- Ukázka řešení:

④ $1213 + 14 = 39$
Když přidám jedničku z 14 do 12 bude to vypadat takhle:
 $13 + 13 + 13 = 39$
Takže $39 : 3 = 13$
11 10 9 8 4 2 8 3 4
8 7 6 3

Toto řešení ukazuje, že žák odhalil podstatu kouzla. Uvědomuje si, že součet tří po sobě jdoucích čísel se rovná trojnásobku prostředního čísla, což dokládá odečtením jedničky od největšího čísla a přičtením této jedničky k nejmenšímu číslu. Na závěr žák přikládá postup, jak najít prostřední číslo trojice ze známého součtu: stačí tento součet vydělit třemi ($39 : 3 = 13$).

Následná diferenciacce, reedukace:

- Pokud žákům úlohy nečinily potíže a jsou motivováni k řešení obdobných úloh, můžeme jim zadat následující úlohy:

Úloha:

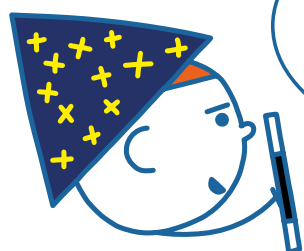
Mysli si číslo. Odečti od něj 10. Přičti k němu 10. Tato 3 čísla sečti a řekni mi výsledek. Já ti řeknu, na jaké číslo jsi myslel.

Úloha:

Najdi zrcadlovou dvojici čísel (AB, BA). Urči rozdíl obou čísel. Ten vyděl devíti. Když mi řekneš jedno číslo tvé dvojice, hned ti řeknu výsledek.

Úloha:

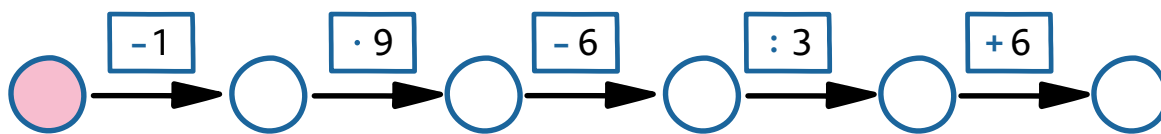
Kouzlo Kira



Mysli si číslo, odečti od něj 1, výsledek vynásob 9, odečti 6, vyděl 3, přidej 6. Řekni mi, co ti vyšlo, a já ti hned řeknu, které číslo si myslíš.

Jak to Kira uhodne?

Vlož si do růžového pole číslo. Hada vypočítej. Když mi řekneš, jaké číslo vyšlo na konci hada, uhodnu rychle, jaké číslo sis dal do růžového pole.



Komentář pro učitele:

Série dvou úloh Myslím si číslo a Hadi jsou izomorfní. Učitel ideálně s žáky ve třídě udělá nejprve kouzlo. Žáci říkají své výsledky a učitel kouzlí. Často se žáci snaží princip kouzla objevit. Tím provedou hodně výpočtů a dostávají se také více do hloubky problému. K zobecnění úlohy často pomůže tabulka výsledků. Obě úlohy vedou ke stejným matematickým závěrům.

Chceme sledovat:

- zda si žáci všímají stejnosti obou úloh,
- zda a kolik žáků je schopno úlohy zobecnit.

Přepis do rovnic a mezi prostředím

Úlohy „Myslím si číslo“ lze řešit užitím rovnic, od 4. ročníku jsou zařazeny v učebnicích výzvy, aby žáci úlohy do rovnic přepsali. Díky těmto zkušenostem nejen z prostředí Myslím si číslo jsou žáci úspěšnější v porozumění rovnicím a práci s nimi.

Zde je několik různě obtížných rovnic, které lze formulovat v jazyce prostředí Myslím si číslo. Učitel je může využít jako diagnostickou baterii úloh, ale nemusí použít všechny.

Úloha:

$$2 + x = 6$$

$$x + 2 = 6$$

$$3 + x = 8$$

$$x - 5 = 6$$

$$x \cdot 5 = 15$$

$$x : 4 = 6$$

$$x + 2 \cdot 8 = 23$$

$$x - 3 \cdot 4 = 15$$

$$x + 9 : 3 = 14$$

$$x - 12 : 4 = 14$$

$$2 \cdot x + 5 = 29$$

$$3 \cdot x - 7 = 32$$

$$x : 2 + 2 = 13$$

$$x : 3 - 3 = 6$$

Komentář pro učitele:

Učitel se při přepisování úloh do rovnice zaměřuje na didaktický problém, který se objevuje běžně v praxi, např. v rovnosti $2x = 2 \cdot x$. Některým žákům je takový vztah jasný a nemají s ním potíže. Ale objevují se i žáci, kteří např. pro $x = 1$ zapíší po dosazení do výrazu $2x$ jako 21 (dvacet jedna). Stává se to proto, že práce s proměnnou a neznámou je obtížná, navíc žákům v tomto nepomáhají úlohy s Algebrogramy, kde

se takové myšlenky používají (AB je dvouciferné číslo, A je řád desítek, B řád jednotek). V rovnicích je ale situace jiná. Zadáním konkrétní úlohy učitel lehce zjistí, jak žáci tento problém vnímají. Jak ho reedukovat? Je třeba vrátit se k sémantice:

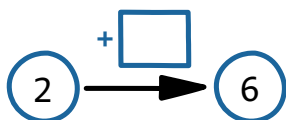
$2 \cdot \text{pes} = 2 \text{ psi}$, $2 \cdot \text{jablko} = 2 \text{ jablka}$ apod. Ideální je situace, kdy dostanou prostor pro vysvětlení žáci, kteří se v problému dobře orientují.

Rovnice je možné přepisovat do různých prostředí, což zvyšuje porozumění. Např. zde řešíme rovnici $2 + x = 6$. Asi vhodnější strategie je nejprve žáky učit vázat rovnici s konkrétními prostředími, až později přepisovat úlohy z jednoho prostředí do jiného. Konkrétně s rovnicí $2 + x = 6$ nejprve s žáky přecházíme z rovnice do prostředí Hadi, Děda Lesoň, Vlázky, Váhy a naopak. Pak teprve převádíme např. úlohu z Dědy Lesoně do Vah apod.

Úloha:

$$2 + x = 6$$

Hadi: Vyřeš.



Vlázky: Dopln jeden vagónek tak, aby byly vlázky stejně dlouhé.



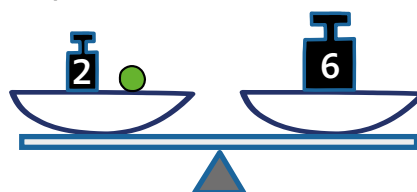
Myslím si číslo

Když myšlené číslo přičtu k číslu 2, dostanu číslo 6. Jaké číslo si myslím?

Děda Lesoň: Které zvířátko se skrývá pod maskou?



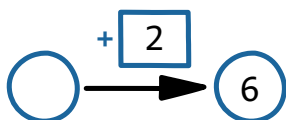
Váhy: Kolik váží kulička?



Úloha:

$$x + 2 = 6$$

Hadi: Vyřeš.



Vlázky: Dopln jeden vagónek tak, aby byly vlázky stejně dlouhé.



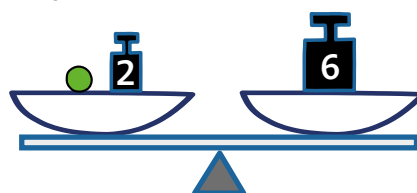
Myšlené číslo

Myslím si číslo. Když k němu přičtu 2, dostanu číslo 6. Jaké číslo si myslím?

Děda Lesoň: Které zvířátko se skrývá pod maskou?



Váhy: Kolik váží kulička?



Komentář pro učitele:

Další myšlenkou, kterou může učitel sledovat při práci s žáky, je změna pozice neznámé v rovnici. Když místo rovnice $2 + x = 6$ napíšeme rovnici $x + 2 = 6$, můžeme sledovat, zda s tím žáci budou mít potíže, nebo ne. Stejně tak např. pokud zaměníme v úloze s Dědou Lesoněm na levé straně masku a kočku nebo na váze zaměníme neznámé a dvoukilové závaží. Dokonce v hadovi se mění význam čísla – v hadovi k rovnici $2 + x = 6$ žáci hledají operátor, v rovnici $x + 2 = 6$ hledají stav. Rozdíl v obou situacích je ještě viditelnější, pokud použitá operace není komutativní, tedy pokud využijeme odčítání a dělení (je velký rozdíl, zda řeší úlohu $2 - x = 6$ a $x - 2 = 6$).

Diagnostické otázky:

1. Řeší žák úlohu přepisem do jiného prostředí? Preferuje stále jedno prostředí a které? (Nutno myslet na odlišnosti prostředí a skutečnost, že nepůjde přepsat vše.)
2. Přepisuje žák do jiného prostředí jen rovnice (strukturální zadání do sémantických), nebo i úlohy z jiných prostředí (např. Vláčky přepíše do Hadů apod., sémantické prostředí do jiného sémantického prostředí)?
3. Projeví se různá pozice neznámé a jak?
4. Projeví se neznámá v součinu (např. $2x$, $3x$)?

4.–5. ročník

Jedna rovnice o jedné neznámé

Přínosné pro žáky je převádět úlohy z různých prostředí do prostředí Myslím si číslo a naopak. Je zajímavé sledovat, kolik žáků začne používat rovnice v okamžiku, kdy se ve třídě zavedou, a kolik žáků zůstává např. u strategie od konce.

Úloha:

Myslím si číslo. Když k jeho čtyřnásobku přičtu 6, dostanu číslo 14. Které číslo si myslím? Úlohu o myšleném čísle přepiš do rovnice. Tuto rovnici pak přepiš do a) hada, b) vláčeků, c) dědy Lesoně, d) vah. Úlohy vyřeš. Modifikace v příslušném oboru.

Úloha:

Vyřeš rovnice. Přepiš je do prostředí Myslím si číslo.

- a) $x + 7 = 15$
- b) $12 - x = 9$
- c) $2x + 5 = 11$
- d) $20 - 3x = 8$

Komentář pro učitele:

Chceme sledovat, zda žák řeší přímo rovnice, nebo zda si úlohy přepisuje do jiných prostředí (třeba Myslím si číslo).

Úloha:

Doplň hada. Převeď na úlohu o myšleném čísle.
Modifikace v příslušném oboru a operacích.



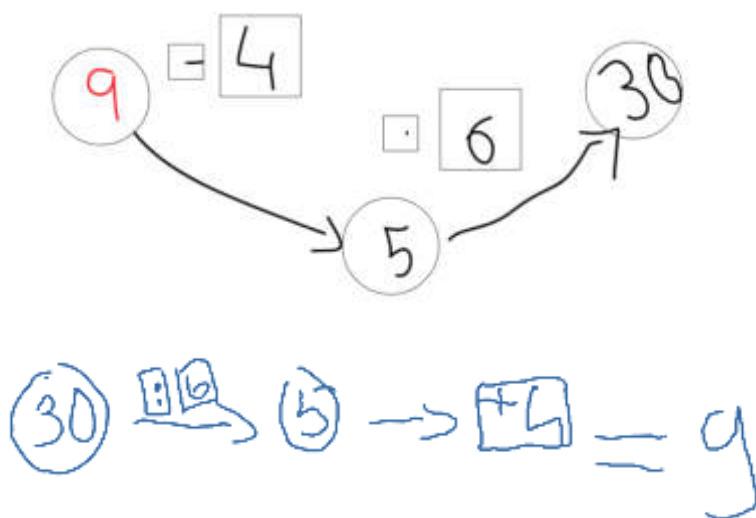
Úloha:

Modifikace: Zadána úloha o myšleném čísle, žáci mají přepsat do hada. Myslím si číslo. Když od něj odečtu 4 a výsledek vynásobím 6, dostanu 30. Přepiš úlohu do hada.

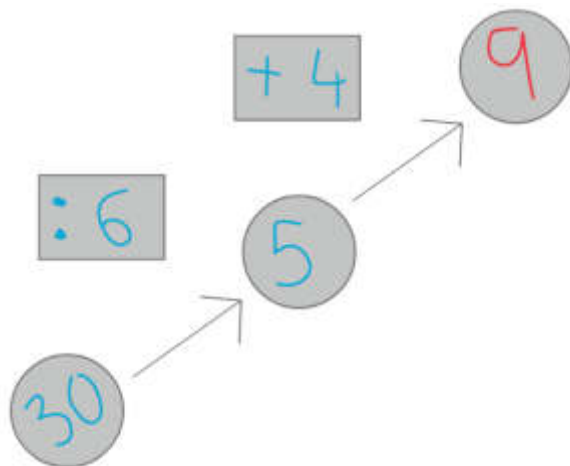
Poznátky:

- Ukázky řešení a řešitelských strategií:

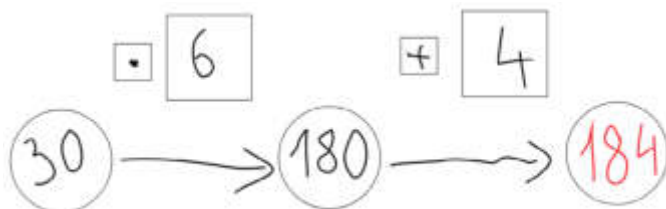
„Myslím si číslo. Když od něj odečtu 4 a výsledek vynásobím 6, dostanu 30.
Jaké číslo si myslím?“



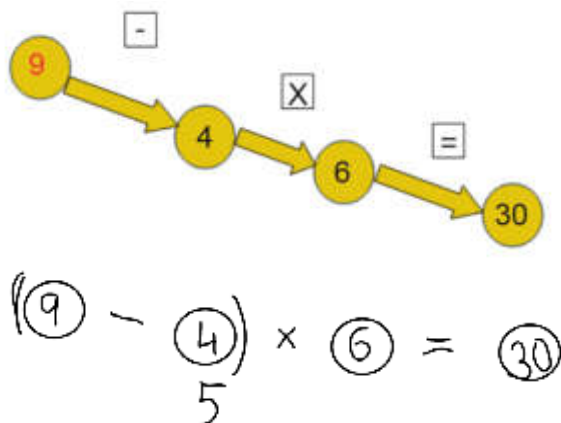
Postup odzadu a využití inverzních operací.



Chyby: Nerespektování inverzních operací



Někteří žáci měli potíže úlohu zaznamenat v hadovi, ačkoli myšlené číslo vyřešili. U některých je postup takový, že řeší myšlené číslo nejprve mentálně a pak teprve tvoří hada, u někoho probíhá řešitelský proces přímo při tvorbě hada.



Úloha:

Zjisti, který vagónek se skrývá pod plachtou.

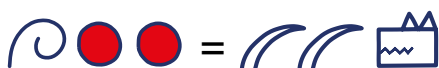
Převed' na úlohu o myšleném čísle. Modifikace v příslušném oboru.



Úloha:

Zjisti, které zvířátko se skrývá pod maskou.

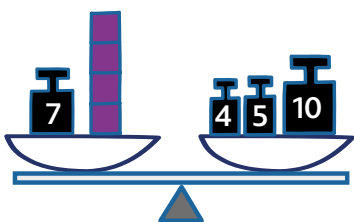
Převed' na úlohu o myšleném čísle. Modifikace v příslušném oboru.



Úloha:

Zjisti hodnotu neznámého závaží.

Převed' na úlohu o myšleném čísle. Modifikace v příslušném oboru.



Soustavy dvou rovnic o dvou neznámých

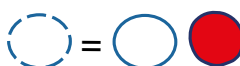
4.–5. ročník

Úloha:

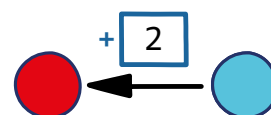
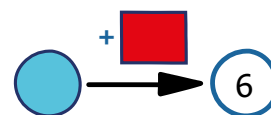
Děda Lesoň:



Vlášky:



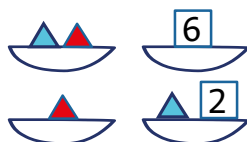
Hadi:



Myslím si číslo:

Myslím si dvě čísla.
Když je sečtu, dostanu 6.
Když k prvnímu číslu přičtu 2,
dostanu druhé číslo.

Váhy:



Ovoce:



Komentář pro učitele:

V úlohách Myslím si číslo lze cílit i na obtížnější myšlenky – např. soustavy rovnic se dvěma neznámými. Žákům nenabízíme soustavy rovnic v abstraktní podobě, např. $x + y = 6$ a $y = x + 2$, ale využíváme mnoha zkušeností se stejným zadáním v různých prostředích. Např. v této sérii úloh lze vidět izomorfní úlohy ke zmíněné soustavě rovnic. Tím, že žáci získávají postupně zkušenosti, se dá očekávat, že v budoucnu lépe porozumí i rovnicím s čísly a písmeny a budou je umět sestavit k reálné situaci. Důležité je s žáky hledat strategie řešení úloh.

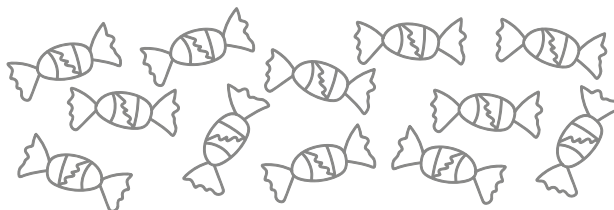
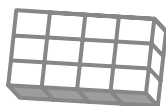
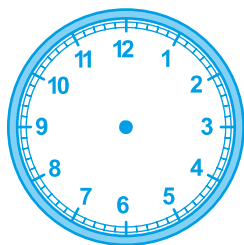
Chceme sledovat:

- v jakých prostředích jsou žáci úspěšnější,
- jak se liší strategie v různých prostředích.

ZLOMKY

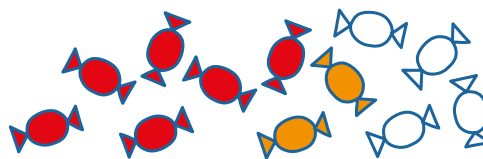
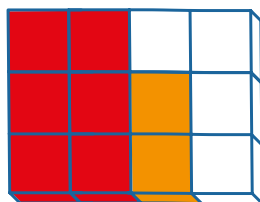
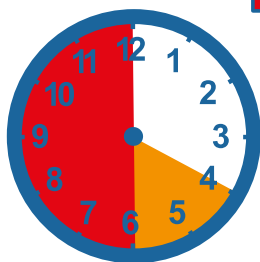
Ukázka úlohy:

Znázorni na každém ze čtyř různých modelů a vypočítej $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$.



Řešení úlohy:

Znázorni na každém ze čtyř různých modelů a vypočítej $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$.

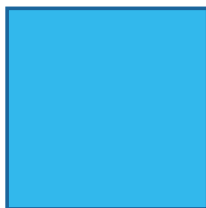


Zlomky se od ostatních uvedených prostředí odlišují tím, že prostředím vlastně nejsou. Jedná se spíše o **oblast matematiky**, která zasahuje nejen celou školní docházku, ale i reálný život. Se zlomky se seznamují již děti v mateřské škole, když **dělí spravedlivě počet předmětů na poloviny** a poznávají, že **poloviny musí být stejné**. Kvalitní představa o zlomcích musí být budována přes **manipulativní zkušenosti žáků** s dělením různých předmětů (dělíme například provázek, papír nebo počty krychlí). Postupem času, jak budou žáci získávat se zlomky zkušenosti, budou oporu v podobě manipulace sami opouštět. Důležité je, aby měli zkušenosti se **čtyřmi základními modely zlomků**, které můžeme vidět v uvedené úloze – **ciferník, tyč, obdélník a model počet**. Každý z modelů má své výhody i nevýhody při použití, ne každý se hodí pro řešení každé úlohy. Teprve tehdy, když mají žáci dostatek zkušeností, představíme jim způsob, jak zlomky zapisovat. Nejprve pracujeme s kmenovými zlomky, tj. které mají v čitateli 1, teprve později se v úlohách vyskytují i zlomky nekmenové. Čtyři výše uvedené modely jsou vhodné nejen pro znázorňování zlomků a budování představ o nich, ale také pro výuku početních operací se zlomky (v uvedené úloze vidíme vizualizaci operace sčítání).

1. ročník

Úloha:

Přelož na polovinu.



Lze zadat i další úlohy na překládání čtverce (přelož na čtvrtiny, třetiny, ...).

Komentář pro učitele:

Žáci se pomocí manipulace setkávají s pojmem polovina v kontextu obsahu rovinného útvaru. V úloze žáci pravděpodobně najdou čtyři řešení podle čtyř os souměrnosti (osy rovnoběžné se stranami čtverce – myšleno vodorovná a svislá, dvě úhlopříčné). Úloha má však nekonečně mnoho řešení, protože každá úsečka procházející středem čtverce jej rozdělí na dva útvary se stejným obsahem. Najít takové řešení je však pro žáky obtížné a může se stát, že na to nikdo ve třídě nepřijde. Pokud chce učitel žáky navést, může jim dát výzvu, že existuje ještě další řešení (např. i jako dlouhodobý úkol na nástěнку).

Chceme sledovat:

- jaké řešení žáci nejčastěji objeví jako první (jaké je pro žáky nejpřirozenější),
- zda se žák spokojí s nalezením pouze jednoho řešení, nebo sám od sebe hledá další,
- jakým způsobem žáci argumentují, že jejich nalezené řešení je správné (jak zdůvodní, že přeložením vznikly poloviny – např. tak, že se části kryjí, od oka vidí, že mají stejný tvar...),
- zda žáci použijí manipulaci, nebo se najde žák, který řeší v představě a rozdělí útvar např. čarou.

Poznátky:

- Většina žáků přeložila čtverec rovnoběžně se stranou (vodorovná a svislá osa).
- Ve chvíli, kdy žáci našli jedno řešení, většinou se s ním spokojili a nehledali již další.
- Při překládání na čtvrtiny a vytváření třetin postupovali žáci metodou opakovaných pokusů. Někteří popsali, jak skládali. Někteří na jednotlivé části napsali názvy částí.
- Hledání třetiny na čtverci bylo pro žáky nejnáročnější.
- Několik žáků přeložilo papír na čtvrtiny, pak ještě přidali jedno přeložení navíc a tvrdili, že jde o třetiny.

Následná diferenciacce, reedukace:

- Pokud žáci nerozumí pojmu polovina, učitel může přeformulovat úlohu: „Přeložte čtvercový papír na dvě stejné části.“
- Pokud žáci úloze nerozumí nebo mají s řešením úlohy (např. u třetiny) potíže, je to signál, že úloha přišla příliš brzy. Jinou možností je místo čtvercového papíru zkusit použít provázek.

Úloha:

Přelož na polovinu.



Komentář pro učitele:

Po zkušenosti s překládáním čtverce na polovinu zadáme žákům překládání obdélníku. Úloha má nekonečně mnoho řešení, protože obdélník lze rozdělit na polovinu jakoukoli úsečkou procházející středem (průsečíkem úhlopříček). Očekáváme 2 nejčastější řešení rovnoběžně se stranami (svisle a vodorovně).

Chceme sledovat:

- jaké řešení žáci nejčastěji objeví jako první (jaké je pro žáky nejpřirozenější),
- zda se žák spokojí s nalezením pouze jednoho řešení, nebo sám od sebe hledá další,
- jakým způsobem žáci argumentují, že jejich nalezené řešení je správné (jak zdůvodní, že přeložením vznikly poloviny – např. tak, že se části kryjí, od oka vidí, že mají stejný tvar...),
- zda žáci použijí manipulaci, nebo se najde žák, který řeší v představě a rozdělí útvar např. čarou.

Poznatky:

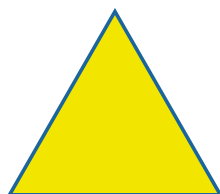
- Žáci zpravidla přeložili papír rovnoběžně s kratší stranou.
- Pouze výjimečně se objevil žák, který přeložil papír rovnoběžně s delší stranou. Ostatní jeho řešení přijali.

Následná diferenciacce, reedukace:

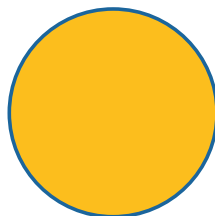
- Pokud žáci nerozumí pojmu polovina, učitel může přeformulovat úlohu: „Přeložte obdélníkový papír na dvě stejné části.“
- Úloha pro motivované žáky: Těmto žákům může učitel zadat další rovinné útvary, které budou překládat na poloviny – např. rovnostranný trojúhelník, rovnoramenný trojúhelník, kruh apod. S tím je dobré začít v momentě, kdy s takovými útvary mají žáci již zkušenosti.

Úlohy – výzvy:

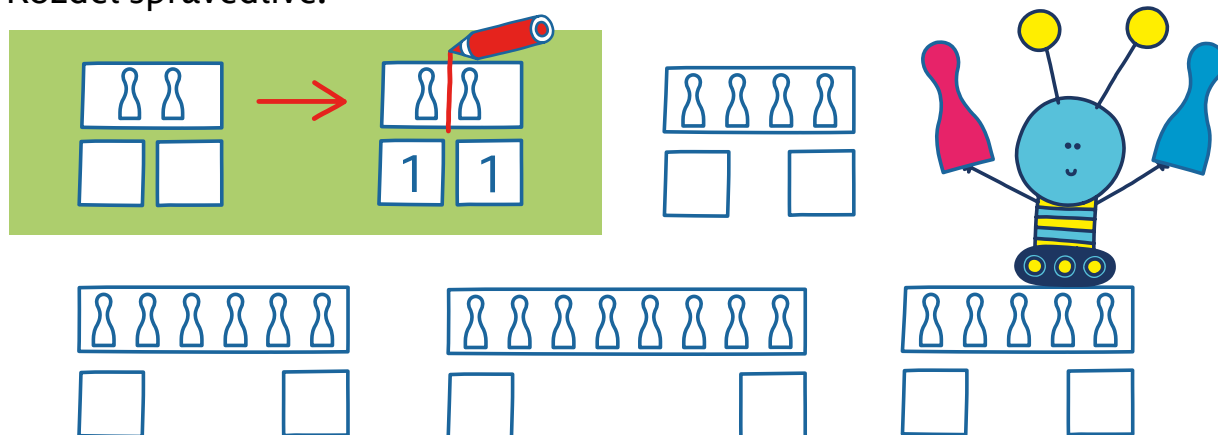
Přelož na polovinu.



Přelož na polovinu.



Rozděl spravedlivě.



Komentář pro učitele:

Žáci se setkávají s úlohami se spravedlivým dělením známého celku, zde konkrétně figurek. V této úloze dělí do dvou stejně početných skupin – na poloviny. Žáci poznávají, že na „spravedlivé“ dělení je třeba mít sudý počet objektů. To neplatí pro poslední úlohu. Někteří žáci řeknou, že úloha nejde vyřešit. Někteří rozdělí jednu figurku na polovinu a někteří řeknou, že jedna figurka zbyde. Tím mj. získávají první zkušenosti s dělením se zbytkem, konkrétně zde $5 : 2 = 2 \text{ (1)}$. Podobné zápisy ale přijdou mnohem později.

Chceme sledovat:

- zda žáci zapíší nejprve počty figurek do každého z polí, nebo nejprve rozdělí soubor figurek,
- jakým způsobem vyřeší poslední úlohu s lichým počtem figurek (rozdělí pouze 4 figurky a 1 zbyde, nebo rozpůlí figurku, nebo figurku přimalují, nebo pátou figurku škrtnou, nebo všechny figurky rozdělí vodorovnou čarou na polovinu, ...),
- jakým způsobem žáci dělí figurky do skupin (např. buď zakroužkují figurky po dvou – konceptuální řešení, nebo si vezmou dvě různé pastelky a budou vybarvovat figurky střídavě – procesuální řešení).

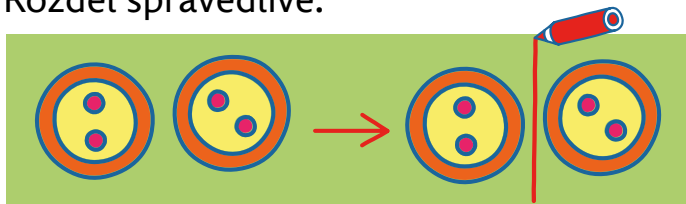
Poznátky:

- Většinou žáci neměli potřebu manipulace pro vyřešení úlohy.
- U sudého počtu figurek žáci nechybovali.
- Tam, kde je lichý počet figurek, žáci často figurku rozpůlili a zapsali polovinu (tedy 2 a půl).
- U lichého počtu figurek se také objevila řešení, kdy žáci přebytečnou figurku škrtnli, aby dostali sudý počet, který uměli rozdělit na polovinu.
- Někteří žáci si s lichým počtem figurek neporadili vůbec.

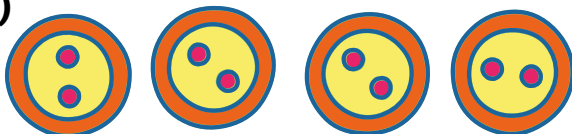
Následná diferenciac, reedukace:

- Pokud si žáci neporadili s půlením lichého počtu figurek, můžeme využít společného třídního sdílení a ukázkou řešení od žáků, kteří situaci zvládli vyřešit. Jestliže je toto řešení pro některé žáky nepřijatelné, rozhodně na ně nenaléháme s přijetím tohoto postupu a respektujeme jejich dané nastavení, které může být silně ovlivněno sémantikou (v reálném životě figurku nepůlíme).
- Celou situaci můžeme rovněž přenést do jiné sémantické situace, např. půlení koláčů (viz následující úloha), která bude žákům bližší. Kontext s koláči může být pro žáky snazší, protože koláče v životě není problém půlit. Pak se možná ve třídě ozve žák: „To je dva a půl koláče.“

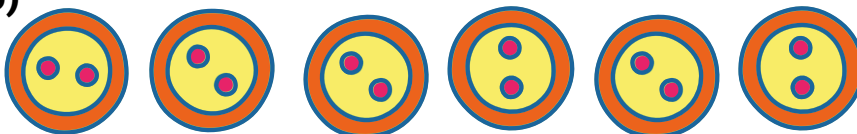
Rozděl spravedlivě.



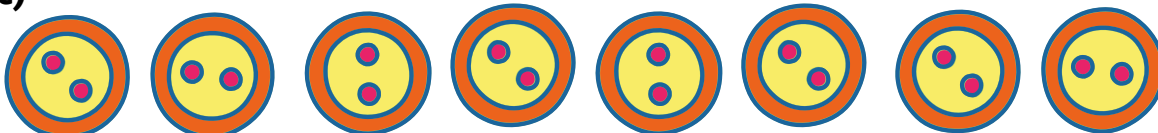
a)



b)



c)



d)



Komentář pro učitele:

Dělení počtu objektů se nejprve s žáky provádí v sémantickém kontextu. Žáci by měli vyřešit větší množství úloh s objekty typu koláče, figurky, kaštiny apod. předtím, než dostanou úlohu typu „Rozděl číslo 18 na polovinu“. Stejně tak poté řeší podobné úlohy se čtvrtinou, třetinou a dalšími kmenovými zlomky.

Zajímavou zkušenost učiteli přinese situace, kdy zadá dvě výše prezentované úlohy společně (figurky i koláče). Žáci vlastně řeší stejné úlohy, z hlediska řešení se ale mohou lišit. Dělení figurek spíše směřuje k dělení se zbytkem (jedna figurka zbyde), dělení koláčů spíše k dělení na zlomky (2 a půl koláče). K tomu žáky vede životní zkušenost, protože koláče se běžně pólí, ale figurky ne.

Chceme sledovat:

- zda žáci používají manipulativa (figurky, víčka, dřívka, ...), nebo řeší úlohu pouze na papíru (učitel by neměl do výběru způsobu práce žáka zasahovat),
- jakým způsobem vyřeší poslední úlohu s lichým počtem koláčů (rozdělí pouze 4 koláče a 1 zbyde, nebo rozpólí koláč, nebo koláč přimalují, nebo pátý koláč škrtnou, nebo všechny koláče rozdělí vodorovnou čarou na polovinu, ...) a zda bude rozdíl v řešení úlohy s figurkami a koláči.

Poznátky:

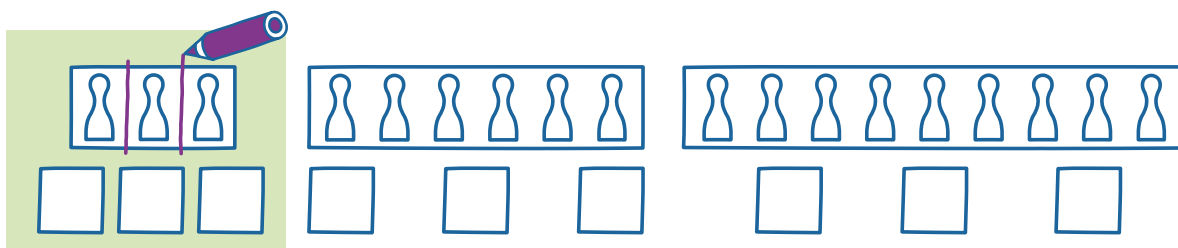
- U sudého počtu koláčů neměli žáci problém rozdělit počet na polovinu.
- U lichého počtu koláčů buď jeden koláč rozpůlili, nebo ho škrtili.

Následná diferenciacce, reedukace:

- Pokud žáci mají s úlohou potíže, je nutné vrátit se k manipulaci se skutečnými objekty (koláče, papírové kruhy, ...). Zde může probíhat diskuze o přesnosti půlení (např. půlí koláč „od oka“ nebo koláč překreslí na papír, vystřihnou, přeloží kruh přesně, přiloží na koláč a rozpůlí).
- Pokud žáci mají potíže s dělením lichého počtu koláčů (zde pět), reedukace není potřeba. Podobné myšlenky se objeví ještě mnohokrát. Ideální je zde třídní diskuze s žáky, kteří úlohu nějak uchopili (dělení se zbytkem, dělení na polovinu koláče, ...).
- Motivovaným žákům lze nabídnout úlohu: „Rozděl 1 a půl koláče spravedlivě mezi dva.“ Úloha směřuje žáky k tomu, aby dělili koláče na menší části (zde čtvrtiny).
- V rámci diferenciacce lze nabídnout také následující úlohu:

Úloha:

Rozděl na třetiny.



Komentář pro učitele:

Učitel si může všimnout, kolika žákům dělá pojem třetina potíže, a porovnat to s potížemi u stejných úloh s polovinou. Pro motivované žáky lze zadat úlohu: „Jaké další počty figurek lze spravedlivě dělit mezi tři děti tak, aby žádná figurka nezbyla?“ Žáci získávají zkušenosti se spravedlivým dělením na stejně velké části, což pomůže předcházet chybám, kdy žáci vnímají třetiny jako tři různě velké části celku.

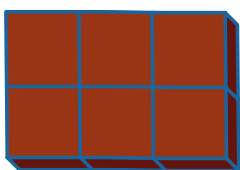
Chceme sledovat:

- jakým způsobem žáci dělí figurky do skupin (např. ve druhé úloze buď zakroužkují figurky po dvou – konceptuální řešení, nebo si vezmou tři různé pastelky a budou vybarvovat figurky střídavě Č, M, Ž, Č, M, Ž – procesuální řešení).

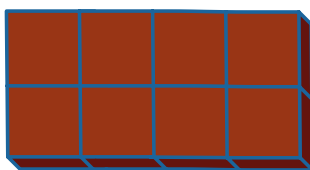
Úloha:

Urči, kolik kostiček je polovina čokolády.

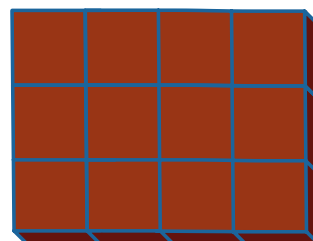
a)



b)



c)



Komentář pro učitele:

Podle zkušeností učitel může zařadit další podobné úlohy, kde žáci určují čtvrtinu nebo třetinu čokolády.

Chceme sledovat:

- zda žák dokáže rozdělit čokoládu na polovinu z různě velkého celku,
- zda bude hledat více řešení pro půlení.

Poznatky:

- Žáci většinou chybovali v numerice.
- Žáci většinou dokázali rozdělit čokoládu na polovinu a určit správný počet kostiček.
- U zadání a) dělili žáci nejčastěji vodorovně, u zadání b) a c) svisle.
- Nesnažili se hledat více možných řešení.
- V jednom případě si žák nedokázal představit, jak přepůlí čokoládu v zadání a). Chtěl ji dělit svisle a zmátlo ho, že by mu nevyšel počet celých kostiček. Nedokázal vyjít z představy svislého dělení. Neviděl možnost rozpůlit čokoládu vodorovně.
- U zadání c) se objevovaly numerické chyby.
- Výjimečně se objevila zajímavá řešení, viz ukázka:

Urči, kolik kostiček ji



Následná diferenciacce, reedukace:

- Pokud by půlení čokolády dělalo žákům větší potíže, mohou si ho vyzkoušet na reálném modelu, což je pro ně velmi přitažlivé a většinou i účinné. Na reálném modelu mohou čokoládu nalámat na přesný počet kostiček a ty pak různě dělit a poté se vrátit opět k modelu na papíru a vyřešit úlohu tam. Tato cesta může žákům pomoci uvědomit si více možností řešení.

Úloha:

Kolik kostiček má celá čokoláda?



Komentář pro učitele:

Žáci se již v 1. ročníku setkávají s modely zlomků. Oblíbený mezi žáky bývá model čokolády.

Chceme sledovat:

- zda žáci řeší úlohu manipulativně, s oporou o obrázek (např. sčítají kostičky obou postavíček), nebo jen pamětně,
- zda určí správně celek, když znají jeho polovinu.

Poznátky:

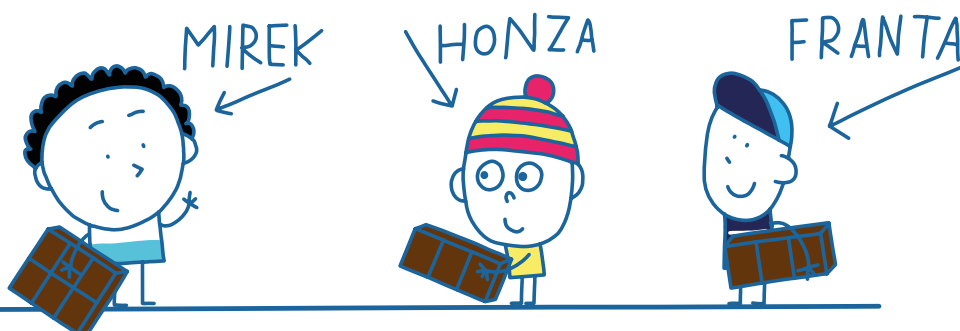
- Většina žáků dokázala správně určit polovinu čokolády, kterou drží chlapec v růžovém.
- Část žáků pouze odpověděla, kolik je polovina čokolády a už se nevrátili k otázce v zadání a neurčili počet kostiček celé čokolády.
- Někteří žáci napsali celkový počet kostiček čokolády do žlutého pole, kde měli určit počet kostiček poloviny čokolády.

Následná diferenciac, reedukace:

- Pokud žákům úloha činí potíže, je účinné vrátit se zpátky k manipulaci a zároveň pracovat na porozumění textu a orientaci v textu.

Úloha:

Mirek si nechal polovinu čokolády, druhou polovinu dal Honzovi s Frantou. Ti se o čokoládu spravedlivě rozdělili.



Jakou část čokolády dostal Franta?

Komentář pro učitele:

Na úloze je náročná čtenářská gramotnost. Pokud mají žáci v 1. ročníku potíže se čtením zadání, přečte ho učitel. Úloha zde je zadána obrázkem – konceptem, což může být pro některé žáky náročnější. V úloze se zároveň objevuje pojem čtvrtina. Žáci často před tímto pojmem dávají přednost formulaci poloviny z poloviny. Učitel může sledovat, kdy a kolik žáků čtvrtinu začne používat.

Chceme sledovat:

- zda žáci řeší úlohu manipulativně, s oporou o obrázek (např. sčítají kostičky obou postavíček), nebo jen pamětně,
- zda pojmenují polovinu z poloviny jako čtvrtinu původní celé čokolády,
- zda žáci odpoví zlomkem (Franta dostal čtvrtinu čokolády), nebo počtem kusů (tři kostičky čokolády),
- zda žáci porozumí obrázkovému znázornění situace (zda pochopí, že na obrázku je celá čokoláda rozdělená mezi chlapce, nebo si zadání vysvětlí tak, že např. Mirek drží celou čokoládu).

Poznátky:

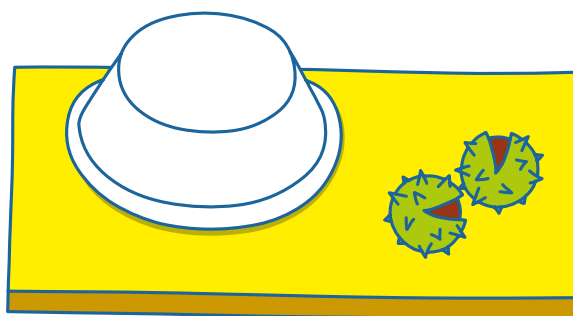
- Žáci k řešení úlohy nevyužili manipulaci.
- Žáci na otázku „Jakou část čokolády dostal Franta?“ neodpovídali zlomkem, ale počtem kostiček.
- Obrázkové znázornění nedělalo žákům problém, dokázali ho správně interpretovat.

Následná diferenciacce, reedukace:

- Pokud žáci odpovídali počtem dílků, nikoli zlomkem, učitel může zařadit úlohy typu: „Čokoláda má 12 dílků, Mirek dostal 6 dílků. Jakou část čokolády Mirek dostal?“
- Pokud zde měli žáci potíže, učitel může nejprve zařadit úlohy typu: „Čokoláda má 12 kostiček. Mirek dostal polovinu čokolády. Zbytek si spravedlivě rozdělil Honza s Frantou. Jakou část čokolády dostal Franta?“ Pro žáky bude jednodušší nejprve úlohu řešit procesem, tedy skutečným dělením.

Úloha:

Polovinu kaštanů vidíme.
Kolik kaštanů nevidíme?



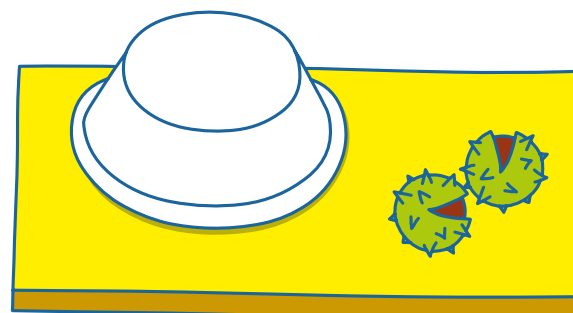
Komentář pro učitele:

Učitel může zadat úlohu bez dramatizace (manipulace). Lze sledovat, kolik žáků si poradí bez této opory. V případě obtíží může učitel žákům napomoci otázkami typu: „Kolik je všech kaštanů?“ nebo „Jakou část kaštanů vidíme?“.

Stejně tak může zadat podobnou úlohu s třetinou:

Úloha:

Třetinu kaštanů vidíme.
Kolik kaštanů nevidíme?



Chceme sledovat:

- zda žáci řeší úlohu manipulativně, s oporou o obrázek (např. dokreslují chybějící kaštany k misce), nebo jen pamětně,
- zda žákům dělají větší potíže otázky s negací („nevidíme“) a zda je nutné položit doplňující otázky.

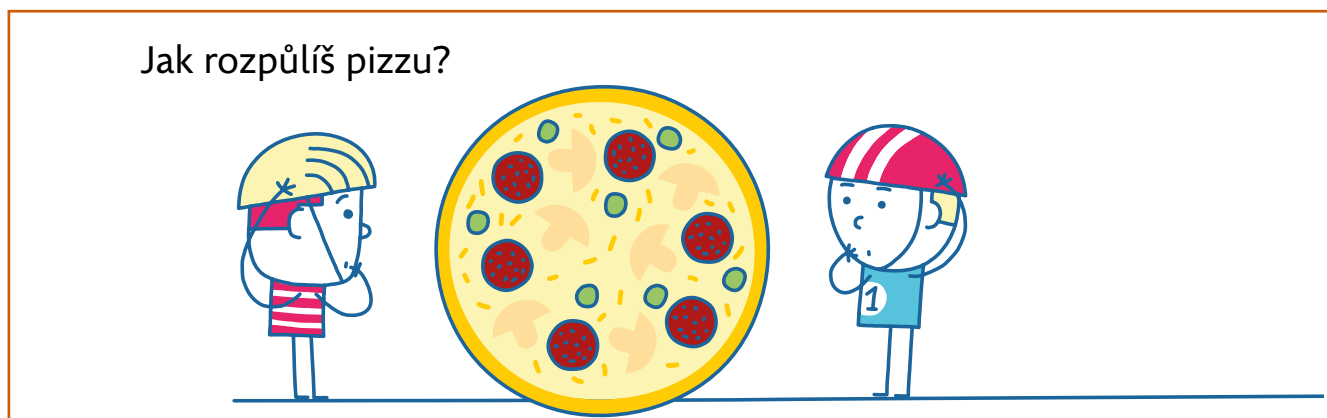
Poznatky:

- Někteří žáci evidovali řešení pomocí obrázků, jiní pomocí čárek nebo číslicí.
- Bez cílené pobídky učitelem žáci nevyužívali manipulaci.
- Při sdílení žáci popsali, že pokud pracujeme s polovinou, bude výsledek vždy to stejné číslo.
- U poloviny se často opakoval jeden typ chyby a tou byla evidence celkového počtu místo poloviny.
- Třetina byla s vysokou chybovostí. Chybovali i žáci, kteří měli polovinu správně. Je to dáno zejména menšími zkušenostmi z běžného života, jelikož s polovinou se žáci běžně setkávají. Navíc se zde pojmenovává zlomek.

Následná diferenciaci, reedukace:

- Konkrétní reedukace chybného vnímání poloviny: Učitel připravil pracovní list, který měl následující strukturu:
 - namalovaný celkový počet předmětů (sudý) a výzva k rozdělení čarou na poloviny,
 - nakreslená polovina předmětů (3 jablíčka) a výzva dokreslit druhou polovinu,
 - úkol rozdělit dětem spravedlivě bonbóny (ty byly barevné),
 - nakreslená polovina předmětů (2 kytičky) a výzva dokreslit druhou polovinu.
- Důležité je podporovat žáky v modelování úlohy (předložit před ně misku a pár kaštanů nebo jiných stejných předmětů), aby si to mohli zkoušet.
- Pokud chybují v pojmu třetina, je důležité sytit žáky dalšími zkušenostmi a navázat ten termín na synonymní vyjádření, kterému budou žáci rozumět: Rozděl na třetiny, tedy na tři stejné části.
- Opět při prohlubování pojmu třetina vycházíme z manipulace, izolovaných modelů, tedy zadáváme série úloh s různými objekty a dělením na tři skupiny a gradujeme následně úlohami, které jsou zde (známe třetinu a dopočítáváme celek).

Úloha:



Komentář pro učitele:

Žáci se setkávají s oblíbeným modelem zlomků – kruhem (později ciferníkem), zde opět v sémantickém kontextu (pizza). Učitel může sledovat, jaké dělení žáci upřednostňují. Dá se očekávat, že bude převažovat dělení vodorovnou nebo svislou čarou. V úloze není jasné, jak přesně najít střed pizzy, žáci to budou řešit na intuitivní úrovni. Učitel může sledovat, jak přesné jsou jejich představy.

Chceme sledovat:

- zda se žáci spokojí s nalezením jednoho řešení, nebo budou hledat další, případně řeknou, že řešení je (nekonečně) mnoho,
- zda si žáci uvědomí, že každá úsečka, která dělí pizzu na poloviny, prochází středem,

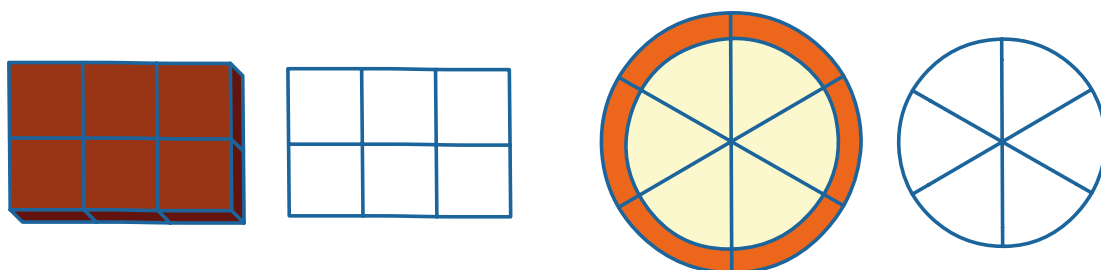
- zda budou zohledňovat sémantickou rovinu úlohy (např. budou pizzu dělit tak, aby na každé polovině byl stejný počet salámů a hub), nebo od toho dokáží odhlédnout,
- které úsečky se v řešení v rámci třídy objeví nejčastěji (vodorovná a svislá, nebo jiné).

Poznátky:

- Většina žáků půlila pizzu svisle.
- Někteří se snažili půlit přesně s ohledem na ingredience (tedy zohlednili sémantickou rovinu úlohy).
- Žáci se spokojili vždy jen s jedním řešením, nehledali další.
- Někteří žáci postupovali „od oka“ (půlení naznačili do obrázku), objevila se ale také potřeba přesnosti, tudíž obrázek vystříhli a následně přeložili.

Úloha:

Rozděl čokoládu a koláč spravedlivě mezi Danu, Patrika a Samuela.
Vybarvi, kolik dostane každý.



Komentář pro učitele:

Žáci řeší stejnou úlohu na dvou různých modelech. Učitel může sledovat, zda žáci tuto stejnost vnímají, nebo ne, tedy zda je pro ně bez rozdílu řešit úlohu na čokoládě nebo na kruhu.

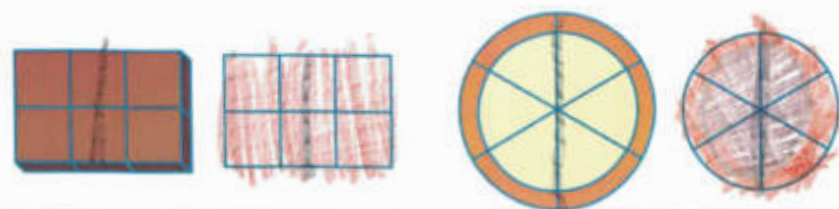
Chceme sledovat:

- zda žáci dokáží čokoládu a kruh rozdělit na třetiny,
- zda se ve třídě objeví pojem třetina,
- zda si žáci všimnou, že je pro oba modely řešení stejné co do počtu dílků.

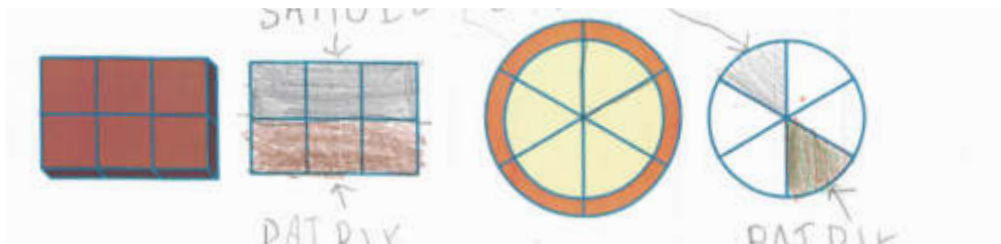
Poznátky:

- Většina žáků řešila stejně úlohu s čokoládou jako úlohu s koláčem, ale uvědomění, že jsou úlohy stejné, z úst žáků nevyšlo.
- Část žáků řešila úlohu tak, že dělila pouze mezi 2 žáky.
- Na tomto řešení je patrné, že má žák zafixováno půlení na poloviny ve svislé pozici.

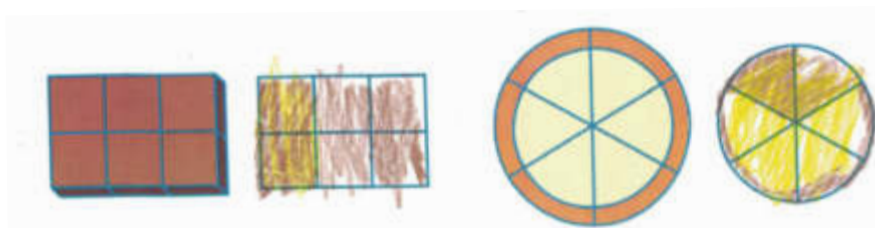
Rozděl čokoládu a koláč spravedlivě mezi Danu, Patrika a Samuela.
Vybarvi, kolik dostane každý?



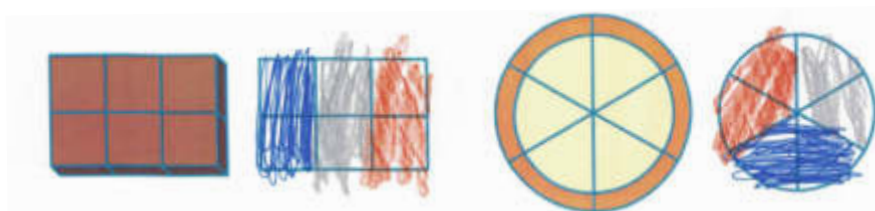
- Další ukázky řešení:



V tomto řešení žák dělil čokoládu i koláč pouze mezi dvě děti (Patrika a Samuela), což komentuje i ve svém řešení. Je zajímavé, že čokoládu řešitel rozdělil celou, kdežto u koláče rozdělil mezi 2 kluky pouze 2 díly a zbývající nijak neřešil.



V tomto řešení můžeme vidět správné rozdělení čokolády, u koláče je však chyba.



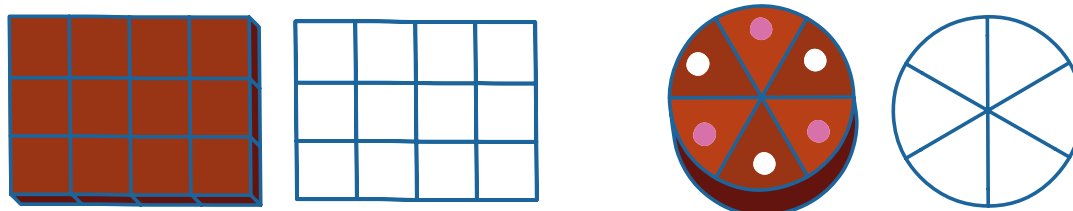
Tímto řešením ilustrujeme správné řešení.

Následná diferenciac, reedukace:

- Učitel může podobné úlohy zadávat s dalšími kmenovými zlomky – např.:

Úloha:

Šest kamarádů si dělilo spravedlivě čokoládu a dort.
Vybarvi, kolik dostane každý. Jaká to je část?



Komentář pro učitele:

Žáci řeší stejnou úlohu na dvou různých modelech. Učitel může sledovat, zda žáci tuto stejnost vnímají, nebo ne.

Chceme sledovat:

- zda žáci řeší úlohu manipulativně, s oporou o obrázek, nebo jen pamětně,
- jakým způsobem vybarví jednotlivá pole (budou dílky pro jedno dítě u sebe, nebo odděleně),
- zda žáci rozumí idiomu „spravedlivě rozděl“ tak, že každý dostane stejně,
- zda žáci odpoví na otázku „Jaká část...?“ zlomkem (šestina), nebo počtem kusů.

Úloha:

Mona utratila polovinu svých peněz. Zůstalo jí 6 Kč.
Kolik korun měla původně? Kolik korun utratila?



Komentář pro učitele:

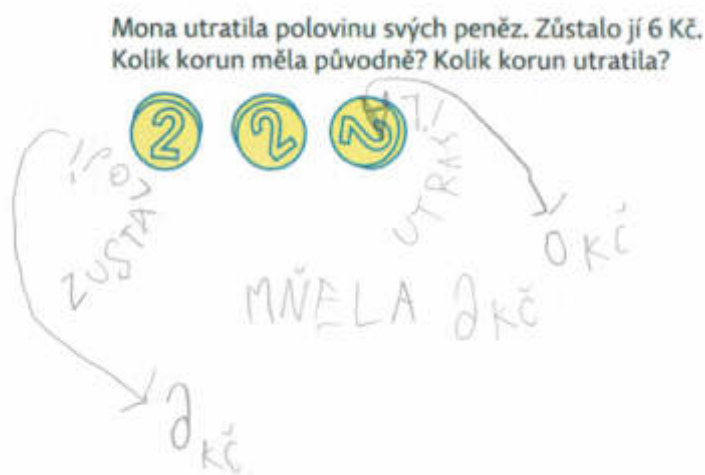
Žáci se s polovinou setkávají v dalším modelu – peněz. Číslo se zde vyskytuje jako počet (počet mincí), ale především jako veličina (suma peněz).

Chceme sledovat:

- zda žáci řeší úlohu manipulativně, s oporou o obrázek, nebo jen pamětně,
- zda některého žáka zmate antisignál v úloze (signální slovo je polovina a žák při povrchním řešení úlohy může chtít rozdělit 3 mince na polovinu a následně tvrdit, že to nelze).

Poznatky:

- Žáci pracovali bez manipulace pouze pamětně s oporou o obrázek.
- Většina žáků odpověděla správně.
- Ukázka řešení:

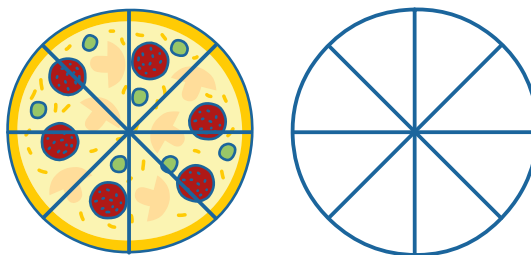


Zde si žák správně určil tu druhou polovinu, kterou utratil (6 Kč), ale špatně to interpretoval – napsal, že původně měl 6 Kč, a ne 12. Zvláštní je šipka od slova „utratila“ k 0 Kč. Interpretace žáka tedy byla takto: „měla 6, utratila 0, zůstalo 6“, což je matematicky v pořádku, ovšem nevyhovuje to zadání.

2. ročník

Úloha:

Alenka snědla polovinu pizzy.
Vašek snědl polovinu z toho, co zbylo.
Jaká část pizzy zůstala Honzíkovi?



Komentář pro učitele:

V úloze se objevuje **opakované půlení**. Polovina, kterou snědla Alenka, tvoří čtyři kusy pizzy, ale polovina (z poloviny), kterou snědl Vašek, jsou jen dva kusy. Žáci si mohou uvědomit, že **polovina z poloviny je čtvrtina**. K poznání, že tomu je tak vždy, pomůže více izolovaných modelů s různě velkým celkem (dělení čtverce nebo pizzy rozdělené na jiný počet částí atd.).

Chceme sledovat:

- zda žáci řeší úlohu s oporou o obrázek, nebo bez této opory,
- zda se u některých žáků objeví chybné řešení, že nezbyde žádný kus pizzy,
- zda je pro žáky srozumitelný idiom „jaká část pizzy“ bez dalšího objasňování učitelem nebo spolužáky (tedy zda žáci chápou, že se na tuto otázku má odpovědět zlomkem, nebo odpoví počtem kusů).

Poznatky:

- Většina žáků pracovala s oporou o obrázek.
- Žáci vyznačovali na modelu nejčastěji pouze odpověď. Jen několik žáků si vyznačilo ostatní části zadání (proces řešení).
- Objevila se řešení, kde žák maloval dílky pizzy i s ingrediencemi.



- Pouze ojediněle žáci použili v odpovědi pojem čtvrtina. Drtivá většina žáků pojem čtvrtina sama od sebe nepoužívala.



- Kromě vyjádření řešení číslem žáci zapisovali odpovědi slovně.
- Mezi nejčastější chybné odpovědi patřila polovina, 0 a 3 kousky.

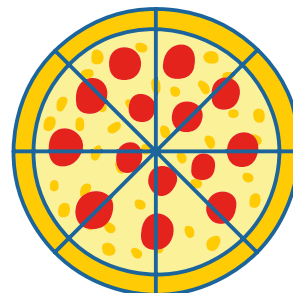
Následná diferenciacie, reedukace:

- Pro reedukace je vhodné pracovat s papírovým modelem pizzy (s takovým, jaký je na obrázku), ale rozstříhat ho, aby žák mohl manipulovat s jednotlivými částmi.
- Naopak žákům, pro které je toto snadné, můžeme dát pizzu nerozdělenou na části s výzvou, aby ji rozdělili žáci sami. Následně mohou díly lepit zpět do kruhu s vyznačením, koho je jaký díl. Touto cestou mohou žáci dojít až k zobecnění.

Úloha:

Tatínek snědl polovinu pizzy.
Maminka snědla polovinu ze zbytku.
Z toho, co zbylo, si polovinu vzal jejich syn.

- a) Jaká část pizzy zbyla na jejich dceru?
- b) Má větší porci tatínek, nebo maminka se synem dohromady?



Komentář pro učitele:

V úloze se objevuje opakované půlení. Žáci by si na úloze měli uvědomit, že vždy zjišťujeme **polovinu z jiného celku**. Jak se zmenšuje celek, zmenšuje se i velikost poloviny (počet dílků pizzy).

Chceme sledovat:

- zda žáci využijí k řešení úlohy obrázek,
- zda je pro žáky srozumitelný idiom „jaká část pizzy“ bez dalšího objasňování učitelem nebo spolužáky (zda chápou, že se na tuto otázku má odpovědět zlomkem, nebo odpoví počtem kusů).

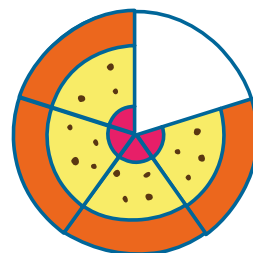
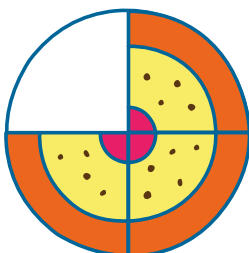
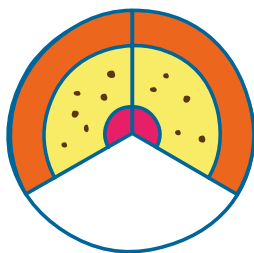
Poznátky:

- Žáci nejčastěji zapisovali odpověď slovem „jeden kousek“, „jeden dílek“, „jeden trojúhelník“ nebo 1.
- Někteří žáci pracovali přímo s obrázkem a do něj si zakreslovali a odškrtovali dílky podle zadání.
- Mezi odpověďmi se ve větší míře objevovalo i vyjádření zlomkem – jedna osmina. Formální zápis zlomku ale použilo jen málo žáků, převažovalo slovní vyjádření.
- Část žáků dokázala správně odpovědět na otázku za b), ale na otázku za a) neznali odpověď.

Následná diferenciacie, reedukace:

- Pokud žákům dělala úloha potíže, nejvhodnější reedukací je návrat k manipulaci, tedy připravit papírový kruh (pizzu) a úlohu s žáky řešit postupným procesem dle zadání a komentováním dílčích kroků.
- Vhodné je zařadit úlohy, kde se otázkou s počtem ptáme na část celku, např.: „Pizzu jsme rozdělili na 8 stejných dílů, dcera snědla 2, jakou část pizzy snědla?“

Jaká část koláče chybí?



Komentář pro učitele:

Úloha se týká důležitého konceptu, který se v matematice nazývá **doplňěk (komplement)**. Komplementem dvou třetin, které zbyly z prvního koláče, je jeho jedna třetina, která chybí. Pokud žák odpoví počtem kusů v každé úloze (chybí jeden dílek), učitel se dál ptá, jestli je vždy ten jeden dílek stejný a kolik stejně velkých dílků má daný koláč celkem. Tím žáka přivede k tomu, aby řekl např. „chybí jeden dílek ze tří“. Tím si buduje představu pojmu třetina. Pojem třetina pak může použít učitel a žák bude vědět, co to znamená.

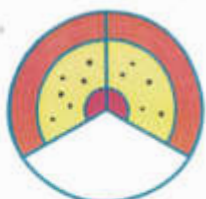
Chceme sledovat:

- zda je pro žáky srozumitelný idiom „jaká jeho část“ bez dalšího objasňování učitelem nebo spolužáky (zda chápou, že se na tuto otázku má odpovědět zlomkem, nebo odpoví počtem dílků),
- zda žáci řeší úlohu manipulativně, s oporou o obrázek, nebo jen pamětně,
- zda žák odpoví zlomkem, nebo jen počtem kusů (1 dílek).

Poznátky:

- Většina žáků volila zápis slovně zlomkem nebo jen číslem (počet dílků).
- Formální zápis zlomku žáci většinou nepoužili.
- Objevil se i výraz půl, půlka, polovina.
- Ukázky žákovských řešení:

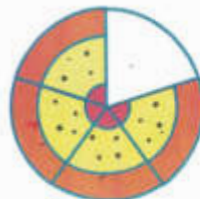
Jaká část koláče chybí?



třetina

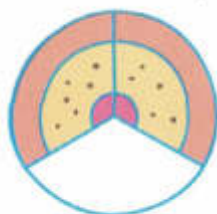


čtvrtina

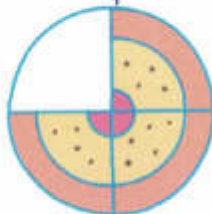


pětina

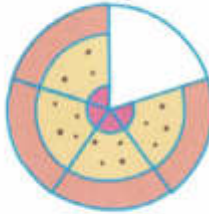
Jaká část koláče chybí?



$\frac{2}{4}$



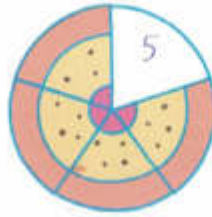
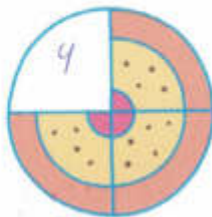
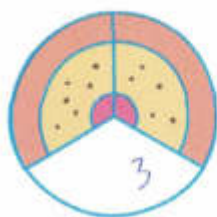
$\frac{1}{4}$



$\frac{1}{5}$

V tomto řešení žák použil formální zápis zlomku, v první situaci chybně, ale v dalších dvou již správně.

Jaká část koláče chybí?



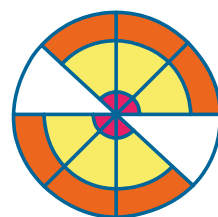
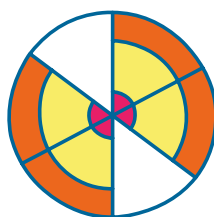
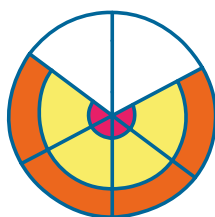
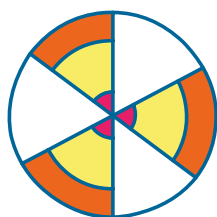
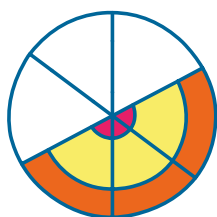
V tomto řešení žák zapisoval počet dílků v celku.

Následná diferenciaci, reedukace:

- Jako reedukaci využijeme manipulaci a diskuzi.
- Také může pomoci opačná úloha: Zadat celý koláč rozdělený třeba na čtvrtiny a výzva: „Adam snědl jednu čtvrtinu koláče. Zakresli do obrázku.“
- Reedukace odpovědi (žák odpovídá počtem namísto částí): „Koláč je rozdělen na 3, 4, 5, ... stejných částí, chybí 1 jeho část. Jaká část koláče chybí?“
- Reedukace řešení (chyba v určení počtu): viz výše.

Úloha:

Jaká část koláče chybí?



Komentář pro učitele:

Žáci pracují s myšlenkou doplňku (komplementu). Doplňkem části koláče, která zůstala, je chybějící část. Žáci na úloze poznávají, že nezáleží na tom, odkud danou část z celku vezmeme nebo že ani nemusí být celá část tvořena jedním souvislým kusem.

Chceme sledovat:

- zda je pro žáky srozumitelný idiom „jaká jeho část“ bez dalšího objasňování učitelem nebo spolužáky (zda chápou, že se na tuto otázku má odpovědět zlomkem, nebo odpoví počtem dílků koláče),
- zda žáci řeší úlohu manipulativně, s oporou o obrázek, nebo jen pamětně,
- zda si žáci uvědomí některá ekvivalentní vyjádření chybějících částí (např. u a) jedna polovina = tři šestiny atd.).

Poznátky:

- Většina žáků zapisovala chybějící část slovně nebo číslem.
- Vyjádření chybějících částí zlomkem se téměř neobjevilo.
- Pro žáky bylo jednodušší vyřešit koláče, které měly vybarvené kousky u sebe.
- Objevil se i takový záznam, kde to na první pohled vypadalo jako zápis části zlomku slovem, ale v podstatě žák popsal počet dílků, které nejsou vyznačené. Zde je také záměna poloviny za 2 díly, třetiny za 3 díly, viz následující řešení:

Jaká část koláče chybí?

KUBA RAK

6. května



TŘETINA

TŘETINA

PŮLKA

PŮLKA

PŮLKA

- Objevilo se také chybné pojmenování zlomků (dvojtina, dvoutina). Pojem „polovina“ je nepřirozený, vznikl před objevem zlomků a neurčuje počet částí (jako všechny další zlomky, např. třetina = 3, čtvrtina = 4). Pokud tedy žák použije „dvoutina“, velmi dobře pochopil princip zlomků.

4.

Jaká část koláče chybí?

0. května

z dvou lina

z dvou lina



- V následující ukázce můžeme vidět další zajímavé řešení. U žáků jsme často zaznamenali využití slova „půlka“ místo „polovina“. Je velmi důležité, aby učitel správně pracoval s pojmy a dával žákům dobré zkušenosti.

Jaká část koláče chybí?



PŮLKA

PŮLKA

2 ČASTI

2 ČASTI

2 ČASTI

- V dalším řešení můžeme vidět chybu, kdy žák do zlomku zapisuje nejprve číslo, které vyjadřuje počet chybějících dílů, druhé číslo za lomítkem vyjadřuje počet zbývajících dílů.

Jaká část koláče chybí?



3 KUSY Z ŠESTI

1 TŘETINA Z ŠESTI

2 KUSY Z ŠESTI

2 KUSY Z ŠESTI

2 KUSY Z OSMY

Následná diferenciacce, reedukace:

- Pro reedukaci potřebujeme pracovat s modelem, aby bylo možné dílky přeskupovat. Využijeme šablonu (kruh s výsečemi) a do ní žáci vkládají barevné dílky. Modelujeme a povídáme si o tom, co děláme. Využíváme např. otázky: „Kolik dílů má koláč?“, „Kolik dílů musím doplnit do celého koláče?“, „Jaká je to část, co musíme doplnit?“.
- Můžeme využít také dřevěnou pomůcku (dřevěný model zlomků).

Úloha:



Komentář pro učitele:

Žáci pracují s myšlenkou doplňku (komplementu). Doplňkem části koláče, která zůstala, je chybějící část. Žáci na úloze poznávají, že nezáleží na tom, odkud danou část z celku vezmeme nebo že ani nemusí být celá část tvořena jedním souvislým kusem.

Chceme sledovat:

- zda je pro žáky srozumitelný idiom „jaká jeho část“ bez dalšího objasňování učitelem nebo spolužáky (zda chápou, že se na tuto otázku má odpovědět zlomkem, nebo odpoví počtem dílků koláče),
- zda žáci řeší úlohu manipulativně, s oporou o obrázek, nebo jen pamětně,
- zda si žáci uvědomí některá ekvivalentní vyjádření chybějících částí (např. u a) jedna polovina = pět desetin atd.).

Poznátky:

- Většina žáků pracovala s oporou o obrázek.
- Žáci zapisovali výsledek číslem (počet kousků) nebo slovem, číslem jako vyjádření zlomku nebo jako slovní vyjádření zlomku. Někteří zapisovali počet dílků, které chybí (např. chybí 2 kousky, 5 částí apod.).
- Žáci občas zaměňovali počet chybějících kousků za zlomek. Např. chybí 5 kousků vyjádřili tak, že chybí pětina.
- Ukázky zajímavých řešení:

a) $10 - 5 = 5$ dvojčinné
c) $10 - 6 = 4$ koláč
b) $10 - 6 = 4$ dvojčinné
d) $9 - 10 = -1$ jednosinné
e) $10 - 12 = -2$ dvojčinné

V tomto řešení je patrná záměna počtů dílů za zlomek ($4 =$ čtvrtina).

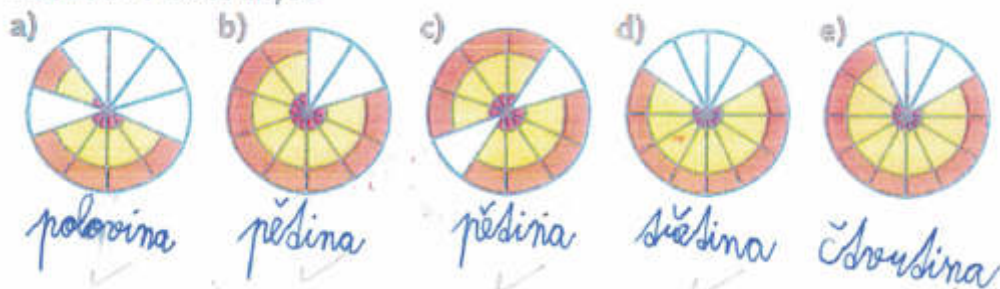
Žák nemá upevněné pořadí čísel v operaci odčítání.

Žák každý dílek dělil na 3 části. Bral to podle barvy – tzn. jeden dílek je ze tří částí a ze tří barev. Takže např. u zadání a) chybí 5 dílů, které jsou podle něj rozdělené na 3, takže $5 \cdot 3 = 15$. Zároveň to ale odečítá od všech dílů, které už neroznásobuje. Takže počítá 10 dílů – $5 \cdot 3 = 5$.



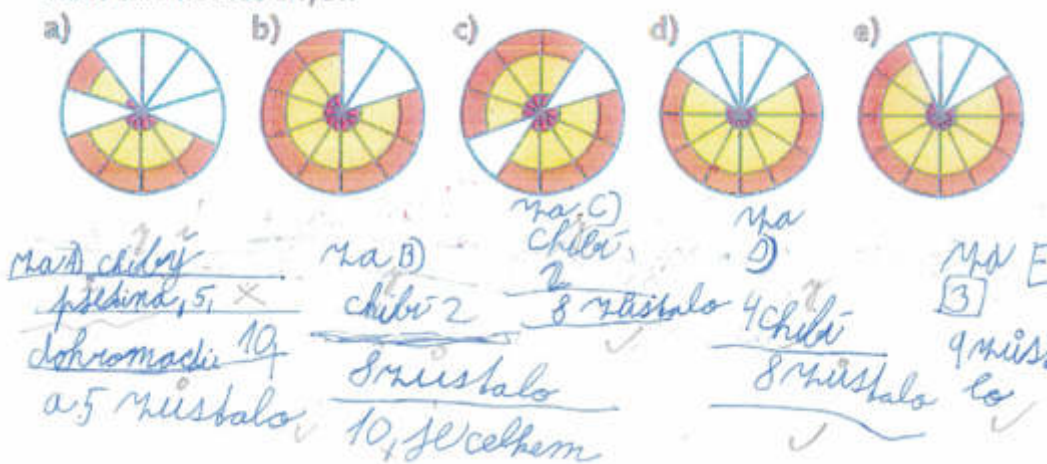
U tohoto obrázku je zase vidět dobrý nástup ke zlomkům, pokud tedy o ně už nejde. Žák zapisoval počet dílků z daného počtu (chybí 2 z 10). Má tedy velmi dobré porozumění a opravdu jen krůček k tomu zapsat řešení formálním zlomkem.

Jaká část koláče chybí?



Zde má žák jasný vhled.

Jaká část koláče chybí?



V poslední úloze žák zapisoval počet dílků, což není úplně špatně, ale neodpovídal tím na otázku, protože v zadání se ptáme na zlomek.

Následná diferenciaci, reedukace:

- Pokud žák odpovídá počtem kusů a ne zlomkem, učitel může položit otázku: „Kolikrát se chybějící část vejde do celého koláče?“ Tím ho navede na ten zlomek.

Úloha:

Jaké číslo si myslím?

a) Jeho polovina je 10.

b) Jeho polovina je 17.

c) Když k jeho polovině přičtu 1, dostanu 11.

Komentář pro učitele:

Žáci určují velikost celku ve strukturální rovině (čísla zde již nezastupují žádné objekty reálného světa). V úloze je přítomný antisignál (polovina je signální slovo, ale žák má při řešení násobit dvěma), což může některé žáky vést k tomu, že 10 rozdělí na polovinu. Úloha c) je náročná, protože se v ní počítá s polovinou neznámého čísla.

Chceme sledovat:

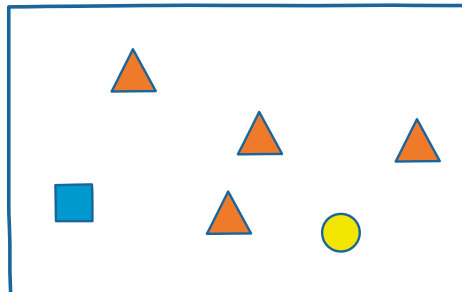
- zda některého žáka zmate antisignál v úloze,
- jakým způsobem žáci úlohu řeší (např. uchýlí se někdo k tomu, že si číslo zobrazí jako počet čárek nebo teček, vezme si manipulative).

Úloha:

Dokresli ● tak, aby jich bylo dvakrát více než ▲.

Dokresli ■ tak, aby počet ▲ byl polovinou počtu ■.

Počet ■ je . Počet ● je .



Komentář pro učitele:

Úloha je náročná na čtenářskou gramotnost. Náročné je také to, že žáci zjišťují velikost celku (dokreslují čtverečky), když znají jeho polovinu. Je zde přítomen **antisignál**, což může některé žáky splést a mohou dokreslit jen jeden čtverec, takže čtverce budou polovinou počtu trojúhelníků.

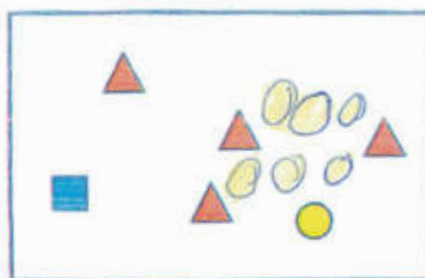
Chceme sledovat:

- zda žáci zvládnou přečíst text úlohy a zjistit z něj všechny důležité informace,
- zda si žáci přečtou po dokreslení ještě jednou text úlohy a provedou ověření podmínek z textu,
- zda se objeví chyba, že čtverce jsou celkem 2.

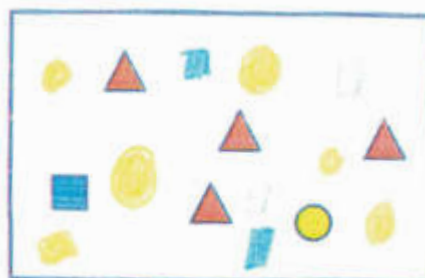
Poznátky:

- Žáci byli při řešení této úlohy opravdu minimálně úspěšní. Učitelé to vysvětlovali tím, že je úloha náročná na porozumění.
- V řešení se často objevila chyba u počtu modrých čtverců. Žáci zapisovali, že jsou 2, ale také 4, 5 nebo 3.
- Ukázky žákovských řešení:

Dokresli ● tak, aby jich bylo dvakrát více než ▲.
Dokresli ■ tak, aby počet ▲ byl polovinou počtu ■.
Počet ■ je 2. Počet ● je 6.



Dokresli ● tak, aby jich bylo dvakrát více než ▲.
Dokresli ■ tak, aby počet ▲ byl polovinou počtu ■.
Počet ■ je 4. Počet ● je 7.

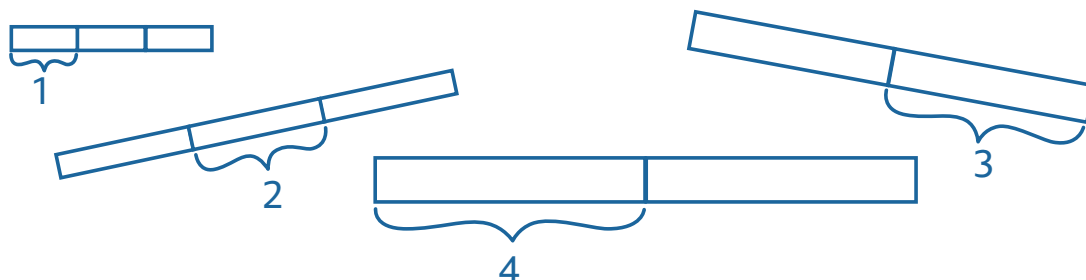


Následná diferenciaci, reedukace:

- Úloha je náročná čtenářskou gramotností a také větším počtem řešitelských kroků. Proto dobrou strategií učitele v případě potíží je úlohu rozdělit do jednotlivých kroků. Důležité je i to, aby žáci mohli manipulovat s konkrétními objekty a svá řešení si s nimi ověřovat.

Úloha:

Na obrázku jsou některé obdélníky rozděleny na poloviny, jiné na třetiny. Jak jsou dlouhé?



Komentář pro učitele:

V úloze se objevují zlomky v geometrickém kontextu, žáci zjišťují délku strany obdélníku. Obecně je určování celku pro žáky spíše obtížnější proces než určování dané části. Doporučujeme řešit úlohu s žáky bez pravítka.

Chceme sledovat:

- zda žáci skončí u zjištění rozměrů chybějících částí obdélníků a zapomenou spočítat celou délku strany obdélníku,
- který obdélník bude pro žáky nejsnazší a který nejobtížnější (pokud se vám to povede, můžete na základě úspěšnosti vašich žáků všechny čtyři úlohy seřadit od nejjednodušší po nejnáročnější).

Poznátky:

- Tato úloha byla bez problémů. Vyřešili ji všichni žáci.

Následná diferenciaci, reedukace:

- Pokud žákům tato úloha nečinila potíže, zadáme jim následující, náročnější sérii.

Úloha:

Vyřeš.

- a) Polovina tyče je natřena na modro. Zbytek tyče měří 30 cm.

Jak dlouhá je tyč?

Tyč je dlouhá centimetrů.



- b) Třetina tyče je natřena na zeleno. Zbytek tyče měří 50 cm.

Jak dlouhá je tyč?

Tyč je dlouhá centimetrů.



c) Třetina tyče je natřena na žluto, zbytek tyče měří 34 cm.

Jak dlouhá je tyč?

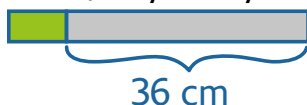
Tyč je dlouhá cm.



d) Pětina tyče je natřena na zeleno, zbytek tyče měří 36 cm.

Jak dlouhá je tyč?

Tyč je dlouhá cm.



Komentář pro učitele:

V úloze žáci zjišťují velikost celku (délku celé tyče). Pracují zde s číslem jako veličinou (délka uvedená v centimetrech). Pokud žákům zadáte úlohu na obrázku, kde napsané rozměry nebudou odpovídat skutečnosti, upozorněte na to žáky. V úloze je také náročné to, že tyče již nejsou rozdělené na díly, ale informace o zlomcích je pouze slovně uvedená v zadání.

Chceme sledovat:

- zda si žáci budou do obrázku vyznačovat části.

Poznátky:

- Pouze několik žáků bylo schopno bez problémů vyřešit obě zadání.
- Většina žáků byla schopna vyřešit první úlohu, pravděpodobně proto, že se pracuje s polovinou a polovina je zde i vyznačená.
- Mnoho žáků nevědělo, jak zbylé tři úlohy uchopit a s řešením si nevěděli rady.
- Ukázky řešení:

Vyřeš.

a) Třetina tyče je natřena na žluto, zbytek tyče měří 34 cm.

Jak dlouhá je tyč?

Tyč je dlouhá cm.



Zde žák odpověděl chybně, záznam v obrázku není správný.

b) Pětina tyče je natřena na zeleno, zbytek tyče měří 36 cm.

Jak dlouhá je tyč?

Tyč je dlouhá cm.



V tomto řešení můžeme vidět dobrý myšlenkový pochod, ovšem výsledek neodpovídá.

b) Třetina tyče je natřena na zeleno. Zbytek tyče měří 50 cm.

Jak dlouhá je tyč?

Tyč je dlouhá centimetrů.



Zde žák 50 cm, které tvoří $\frac{2}{3}$, zaměnil za $\frac{1}{3}$ a tak získal výsledek 150. Tato chyba se objevila častěji.

Následná diferenciacie, reedukace:

- V případě potíží je důležité vrátit se s žáky k jednodušším úlohám (viz úlohy výše).
- Využijeme manipulaci s provázkem nebo proužkem papíru.
- Další pomocí může být rozdělení na dílky u těch obdélníků, které nejsou rozdělené na stejné díly.
- Podporujeme žáky, aby využívali zkoušky, protože kdyby si chybná řešení zkusili dosadit do textu zadání, viděli by chybu. A zřejmě by ji i uměli opravit.

Úloha:

Tyč má délku 60 cm. Polovina je natřena na modro, třetina na červeno a zbytek je žlutý. Kolik měří žlutá část tyče?



Komentář pro učitele:

Úloha je náročná v tom, že neznámá část tvoří šestinu, což musí žáci zjistit. Předpokládáme, že s konceptem **polovina + třetina + šestina = celek** již žáci mají více zkušeností. Učitel na ověření může zadat úlohy s jiným modelem – např. čokoláda ($2 \cdot 3$, $3 \cdot 4$) apod. Někteří také mohou zkusit pravítkem nebo jiným měřidlem určit, kolikrát se žlutá část vejde do celé délky tyče. Druhým způsobem, jak úlohu vyřešit, je určení délek modré a červené části a jejich odečtení od žluté části.

Chceme sledovat:

- zda žáci využívají k řešení úlohy obrázek,
- zda žáci určí délku jen žluté části, nebo také modré a červené části.

Poznátky:

- Většina žáků řešila s oporou o obrázek.
- Našli se žáci, kteří si chtěli k řešení vzít na pomoc pravítko. Tady je patrné, že neuměli aplikovat zadání na obrázek a mylně se domnívali, že k řešení dojdou tím, že jednotlivé části změří.
- V úspěšnosti řešení žáků byly značné rozdíly. Velká část řešení byla správně a žáci zde rovnou psali výsledek. Někteří žáci si do obrázku zaznamenávali části zadání nebo si v zadání podtrhávali důležité informace.
- Ukázka řešení:

Tyč má délku 60 cm. Polovina je natřena na modro, třetina na červeno a zbytek je žlutý. Kolik měří žlutá část tyče?



Následná diferenciacie, reedukace:

- Využijeme manipulaci s provázek nebo proužkem papíru.
- Další pomocí může být rozdělení na dílky u těch obdélníků, které nejsou rozdělené na stejné díly.
- Podporujeme žáky, aby využívali zkoušky, protože kdyby si chybná řešení zkusili dosadit do textu zadání, viděli by chybu. A zřejmě by ji i uměli opravit.

Úloha:

Polovina tyče je natřená na žluto a čtvrtina na modro. Zbytek je natřený na růžovo. Kolik měří celá tyč, když na růžovo je natřeno:

- a) 10 cm b) 20 cm c) 40 cm d) 62 cm?



Komentář pro učitele:

V úloze žáci pracují s tyčovým modelem zlomků. Mohou ho použít jako oporu pro řešení úlohy. Pokud by v zadání úlohy obrázek nebyl, jeho správné proporcionální nakreslení by mohlo být pro některé žáky obtížným úkolem. Žáci tak zjistí, že modrá a růžová část je stejně dlouhá, takže růžová část tvoří čtvrtinu celé tyče. Pro zjištění výsledku pak již stačí délku růžové části vynásobit čtyřmi. Žáci si také upevňují poznatek, že **čtvrtina + čtvrtina = polovina**.

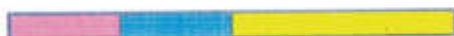
Chceme sledovat:

- zda žáci využijí k řešení úlohy obrázek,
- zda žáci určí délku celé tyče, nebo také délky modré a žluté části,
- zda žáci budou využívat i jiný model pro řešení úlohy (opakované půlení, ciferník).

Poznátky:

- Úloha se ukázala jako náročná díky čtenářské gramotnosti. Největším problémem bylo porozumět, že růžová část může být různě dlouhá a že právě k této části se vztahují jednotlivá zadání. Mnoho žáků tuto velikost často bralo za celkovou délku tyče, viz ukázka, kde se žák postupně opravoval a evidoval i délku modré i růžové části:

Polovina tyče je natřená na žluto a čtvrtina na modro.
Zbytek je natřený na růžovo. Kolik měří celá tyč, když na růžovo je natřeno:
a) 10 cm b) 20 cm c) 40 cm d) 62 cm?



Handwritten student work showing multiple attempts at solving the problem. The student starts with a calculation: 15/20, then writes 'i v růžové'. They then write: 'Žlutá polovina měří 5 cm. Modrá čtvrtina měří 10 cm. Celá tyč měří 40 cm. B) Žlutá polovina měří 40 cm. Modrá i růžová čtvrtina měří 10 cm. Celá tyč měří 60 cm. X' (crossed out). Then: 'C) Žlutá polovina měří 80 cm. Modrá i růžová čtvrtina měří 40 cm. Celá tyč měří 160 cm. D) Žlutá polovina 124 cm. Modrá i růžová čtvrtina měří 62 cm. Celá tyč měří 248 cm.'

- Někteří žáci využívali k řešení proužek papíru, který reálně překládali. Překreslili obrázek na proužek papíru, vybarvili kusy tyče určenou barvou a pak porovnávali jednotlivé délky.
- Někteří žáci využívali k řešení měření pravítkem.

Následná diferenciacce, reedukace:

- Využijeme manipulaci s provázkem nebo proužkem papíru.
- Další pomocí může být rozdělení na dílky u těch obdélníků, které nejsou rozdělené na stejné díly.
- Podporujeme žáky, aby využívali zkoušky, protože kdyby si chybná řešení zkusili dosadit do textu zadání, viděli by chybu. A zřejmě by ji i uměli opravit.

Úloha:

Třetina tyče je natřená na červeno, zbytek na žluto.
Jak dlouhá je červená část a jak dlouhá je celá tyč, když žlutá část měří:
a) 10 cm, b) 20 cm, c) 30 cm, d) 40 cm, e) 46 cm?

žlutá	10	20	30	40	46
červená					
celá					

Komentář pro učitele:

Žáci řeší úlohu s tyčovým modelem zlomků. Úloha je náročná v tom, že úkolem žáků je zjistit délku obou částí tyče, z nichž žlutá část není kmenovým zlomkem (dvě třetiny). Výsledky mají žáci zapisovat do tabulky, z nichž mohou vysledovat pravidelnost. Tabulka se dá využít k zobecnění. Učitel může zadat žákům výzvu, aby popsali, jak spočítat délku tyče, když jim někdo řekne délku žluté části. Mělo by zaznít např.: „Délku žluté části rozpůlím a pak to číslo vynásobím třemi (nebo sečtu třikrát) a mám celou délku tyče.“

Chceme sledovat:

- zda žáci využijí k řešení úlohy obrázek,
- jakým způsobem žáci vyplní tabulku a zda si všimnou v některé fázi řešení nějaké pravidelnosti a vyplní zbytek tabulky podle ní.

Poznátky:

- Žáci si mohou také sami určit délku žluté tyče, se kterou umí počítat. To může ukázat učiteli, do jakých čísel se žáci pouští a čím si jsou jistí.

Následná diferenciacce, reedukace:

- Pokud žáci mají s úlohou potíže, pomůže jim obrázek. Učitel může zadat žákům konkrétní obrázek (tyč s rozdělením na třetiny) nebo jenom žákům poradit, že si mají na tyči vyznačit všechny části.
- Znovu se lze i vracet k úlohám typu: „Urči třetinu ze 12, 15, 18 figurek.“ apod. a na nich si jednotlivé třetiny vizualizovat. Dvě třetiny totiž mohou být náročnou myšlenkou. Proto de facto dvě třetiny chceme nahradit jednou a jednou třetinou.

Úloha:

Zjisti délku tyče, když víme, že:

- a) polovina tyče je natřená na červenou, čtvrtina na žluto a zbylých 20 cm na modro.



- b) třetina tyče je natřená na zeleno a zbylých 60 cm na hnědo.



- c) čtvrtina tyče je natřena na modro a zbylých 90 cm na červenou.



Komentář pro učitele:

Úkolem žáků je určit délku celé tyče. V úlohách b) a c) musí žáci nejprve ze známého údaje, kterým je velikost nekmenového zlomku, určit velikost zlomku kmenového. Pak mohou určit velikost celku.

Chceme sledovat:

- zda žáci využijí k řešení úlohy obrázek,
- zda budou mít žáci potřebu pojmenovat v úlohách b) a c) neznámou část tyče (např. nekmenovým zlomkem).

Poznátky:

- Úloha nečinila žákům potíže.
- Žáci využívali obrázek, někteří měli potřebu jednotlivé části vybarvovat dle zadání, jiní to nepotřebovali.
- Někdy žáci zaznamenali pouze celkovou délku tyče, jiní evidovali i délky zbývajících částí, viz následující ukázky.

Zjisti délku tyče, když víme, že:

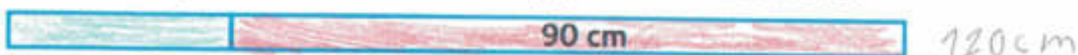
- a) polovina tyče je natřená na červenou, čtvrtina na žluto a zbylých 20 cm na modro.



- b) třetina tyče je natřená na zeleno a zbylých 60 cm na hnědo.



- c) čtvrtina tyče je natřena na modro a zbylých 90 cm na červenou.



Zjisti délku tyče, když víme, že: 80 cm

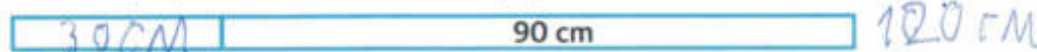
- a) polovina tyče je natřená na červeně, čtvrtina na žluto a zbylých 20 cm na modro.



- b) třetina tyče je natřená na zeleno a zbylých 60 cm na hnědo.



- c) čtvrtina tyče je natřena na modro a zbylých 90 cm na červeně.

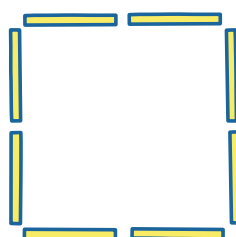


Úloha:

Vytvoř podle obrázku.

Přilož další dvě / a:

- a) rozděl čtverec na poloviny.
b) vyznač jednu čtvrtinu čtverce.



Komentář pro učitele:

V úloze a) mohou někteří žáci rozdělit čtverec podle jeho úhlopříčky. Podle pravidel pro dřívkové stavby to není zcela správné řešení, protože dvě dřívka nepokryjí celou délku úhlopříčky čtverce (a tedy konce dřívka k sobě nepřiléhají). Abychom nebudovali u žáků špatnou představu toho, že úhlopříčka je stejně dlouhá jako strana čtverce, je dobré např. provázkem tuto skutečnost měřením ověřit. Nicméně pro budování představ o zlomcích je zde podstatnější skutečnost, že žák ví, že úhlopříčka dělí čtverec na poloviny.

Chceme sledovat:

- zda žáci řeší úlohu manipulativně, s oporou o obrázek, nebo jen pamětně,
- zda žáci budou hledat více řešení,
- zda žáci rozdělí čtverec na polovinu svisle, vodorovně, nebo podél úhlopříčky,
- u kterého vrcholu žáci vyznačí čtvrtinu,
- kterým směrem žáci prodlouží čtverec na obdélník.

Poznátky:

- Starší žáci (třetíci) většinou nevyužívali manipulaci, mladší žáci (druháci) ji naopak potřebovali.
- Žáci zakreslili vždy pouze 1 možnost řešení pro obě zadání, ale ve společné diskuzi potom přišli na to, že pro zadání a) existují 2 možnosti a pro zadání b) 4 možnosti.
- Žáci diskutovali i možnost dělení diagonálně, kterou ale nakonec zavrhl na základě ověření manipulací.

Úloha:



Na obrázku je velký trojúhelník.

a) Jaká jeho část je růžový trojúhelník?

b) Jaká jeho část je žlutý čtyřúhelník?

Komentář pro učitele:

V úloze žáci určují, jakou částí velkého trojúhelníku jsou malé trojúhelníky. Úloha cílí na poznatek, že polovina = dvě čtvrtiny (žlutá část). Učitel může položit otázku, jestli je větší žlutá část, nebo růžová a modrá část dohromady. To může vést žáky k důležitému zjištění, že polovina nemusí být jedna celá souvislá část. V případě, že žáci nerozumí pojmu čtyřúhelník, učitel může přeformulovat otázku na „Jaká jeho část je žlutý útvar?“.

Chceme sledovat:

- zda je pro žáky srozumitelný idiom „jaká jeho část“ bez dalšího objasňování učitelem nebo spolužáky (zda chápou, že se na tuto otázku má odpovědět zlomkem, nebo odpoví počtem dílků trojúhelníku),
- zda žáci pojmenují žlutou část jako polovinu, nebo dvě čtvrtiny, nebo si někdo uvědomí, že to lze oběma způsoby.

Poznatky:

- Většina žáků zapisovala zlomek slovem.
- Pouze několik žáků zapsalo zlomek formálním zápisem.
- Objevilo se i pojmenování dvojtina, polovina z poloviny pro čtvrtinu.
- Vyskytlo se i řešení, kdy si žáci nevěděli se zadáním rady a zkusili popsat, kde se nachází část z obrázku:

helník? horní

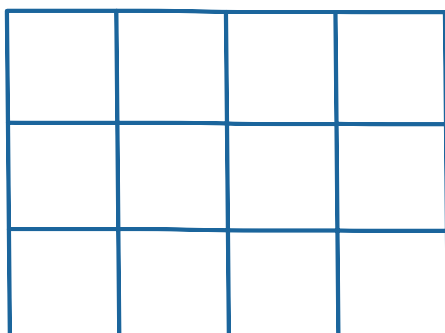
elník? levá dolní

Úloha:

Polovinu obdélníku vybarvi červeně. Třetinu vybarvi žlutě.

Zbývající část vybarvi zeleně.

Jakou částí celého obdélníku je zelená část?



Komentář pro učitele:

V úloze žáci dělí celek na tři části – polovinu, třetinu a šestinou. S tímto konceptem se žáci na 1. stupni setkávají v různých úlohách, např. i ve **slovních úlohách**: „Jedeme na třídenní výlet. První den jsme ujeli polovinu celé cesty, druhý den třetinu celé cesty, poslední den 10 kilometrů. Jak dlouhá byla celá cesta?“ Opět se nabízí využití manipulace, např. můžeme začít s pomůckou kruhových zlomků. Nejprve necháme žáky poskládat kruh z poloviny, třetiny a šestiny (dostanou podmínku, že mohou použít max. tři části, každou jinou). Poté žáci dostávají podobné úlohy jako zde. Následně poté dojde k propojení, že to je vždy celek.

Chceme sledovat:

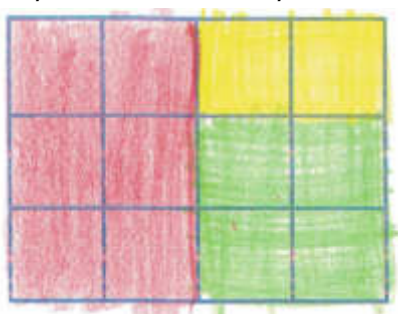
- zda žáci vybarví správně polovinu i třetinu z celého obdélníku,
- zda žáci využijí k vybarvení třetiny jeden řádek obdélníku, který je těmito řádky rozdělen na třetinu,
- zda žáci vybarví stejně barevné dílky u sebe, nebo někdo dílky rozdělí,
- zda žáci správně určí, že zelená část je šestinou obdélníku.

Poznatky:

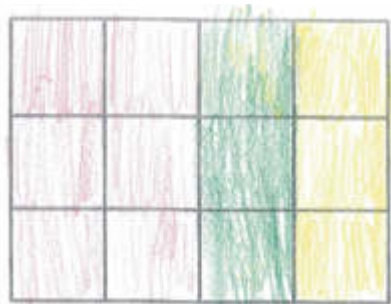
- Nejsnáze žáci určili polovinu.
- Třetina činila potíže. Žáci velmi často považovali 3 díly (3 čtverečky) automaticky za třetinu.
- Chybné určení třetiny z obrazce ovlivnilo řešení poslední zelené části. Žáci pak obarvili to, co zbylo. Nejčastěji tedy 3 čtverečky.
- Žáci vybarvovali dílky u sebe, mají to tak zafixováno.
- Ukázky řešení:



V tomto řešení je zajímavé, jak žák uchopil zadání. Nepracoval s obdélníkem jako s celkem, ale vyznačoval části vždy v rámci čtverečků, navíc zcela chybně.

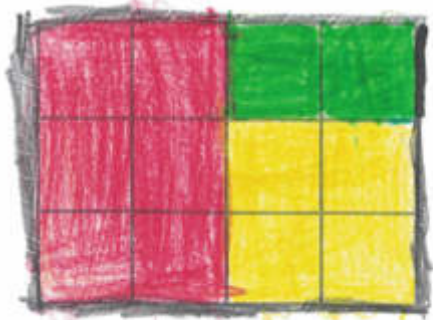


Zde žák našel správně polovinu. Na základě komunikace s učitelem žák poté hledal žlutou třetinu ze zbylého obdélníku namísto z celého. Takto uvažovalo více žáků.



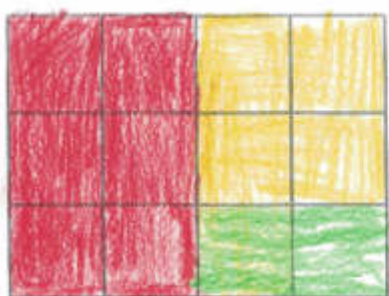
V tomto řešení si žák označoval potřebné barvy přímo v zadání. Zároveň žák při řešení vybarvil zelenou část a řekl, že když to jsou 3 čtverečky, tak je to třetina.

Polovinu obdélníku vybarvi červeně. Třetinu vybarvi žlutě.
Zbývající část vybarvi zeleně.
Jakou částí celého obdélníku je zelená část?



VYBARVIL JSE POL VÍNU NA ČERVENO 100%

ŘEKLE M SI 3+4 POLÍČEK ŽLUTOU ČÁST 2x2
ELENA 0+2



Zelená část je $\frac{1}{6}$ celina.

100%

Následná diferenciacce, reedukace:

- Při potížích je důležité využít manipulaci.
- Pomůže rovněž rozfázování úlohy, tedy nejprve zadat žákům tři prázdné obdélníky ze zadání a nechat je v prvním obdélníku vybarvit polovinu a ve druhém třetinu. Následně ve třetím polovinu i třetinu.

Úloha:

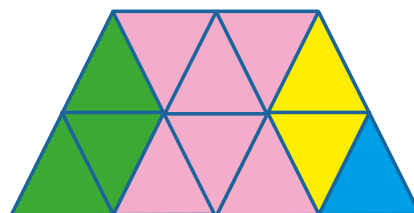
Doplň správné slovo: **polovinu**, **třetinu**, **čtvrtinu**, **pětinu**, **šestinu** nebo **dvanáctinu**:

Růžové pole tvoří _____ celku.

Zelené pole tvoří _____ celku.

Žluté pole tvoří _____ celku.

Modré pole tvoří _____ celku.



Komentář pro učitele:

Žáci si rozšiřují svět kmenových zlomků a seznamují se s dvanáctinou. Žáci si mohou všimnout, že zelená část = žlutá část + modrá část (čtvrtina = šestina + dvanáctina).

Chceme sledovat:

- jakým způsobem žáci úlohu řeší (zjistí si počet všech trojúhelníků a počty každé z barevných částí, nebo použijí jinou strategii).

Poznátky:

- Žáci, kteří řešili správně, si spočítali počet všech trojúhelníků a poté počítali, kolikrát se vejde barevná část do celku.
- Žáci zapisovali zlomek slovně nebo kombinací čísla a slova, např. 2 třetiny.
- Žáci zaměňovali počet dílků za zlomek (6 trojúhelníků za šestinu, 3 trojúhelníky za třetinu).
- U žlutého pole žáci nejčastěji zapisovali výsledek jako polovinu nebo čtvrtinu.
- U modrého pole žáci nejčastěji zapisovali výsledek jako čtvrtinu či pětinu.
- Ukázky řešení:

Doplň správné slovo: **polovinu**, **třetinu**, **čtvrtinu**, **pětinu**, **šestinu** nebo **dvanáctinu**.

Růžové pole tvoří šestinu celku.

Zelené pole tvoří pětinu celku.

Žluté pole tvoří polovinu celku.

Modré pole tvoří polovinu celku.



Zde žák odlišuje „dvojtina“ a „polovina“, nemá představu o velikosti zlomků a neví, že šestina vyšla větší než polovina.

V dalším řešení žák nezapisoval zlomky, ale čísla, kolikrát se díl v útvaru objevuje:

Růžové pole tvoří 6 celku.

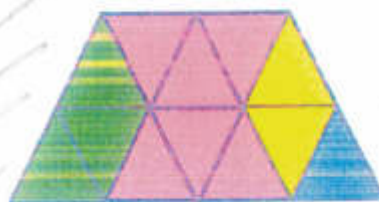
Zelené pole tvoří 3 celku.

Žluté pole tvoří 2 celku.

Modré pole tvoří 1 celku.

Doplň správné slovo: polovinu, třetinu, čtvrtinu, pětinu, šestinu nebo dvanáctinu.

Růžové pole tvoří 2 čtvrtiny celku. ✓
 Zelené pole tvoří 1 třetina celku. ✓
 Žluté pole tvoří 1 šestina celku. ✓
 Modré pole tvoří 1 dvanáctina celku. ✓



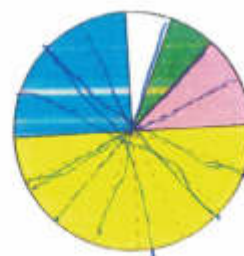
100%

Následná diferenciacce, reedukace:

- V rámci reedukace byla žákům zadána úloha stejného typu, ale na kruhovém modelu. Žáci pracovali ve skupině, spolupracovali a pomáhali si (v každé skupině byl žák, který předchází úlohu zvládl). Cílem bylo, aby byli všichni žáci zapojeni do práce.
- Žáci si pomáhali obrázkem, usuzovali jednotlivé části podle celkového počtu dílků v kruhu. Navzájem si vysvětlovali, že záleží na tom, kolikrát se daný dílek vejde do celku.
- Ukázka reedukační aktivity:

Doplň správné slovo: polovinu, třetinu, čtvrtinu, pětinu, osminu nebo šestnáctinu.

Žluté pole tvoří polovinu celku. ✓
 Modré pole tvoří čtvrtinu celku. ✓
 Růžové pole tvoří osminu celku. ✓
 Zelené pole tvoří šestnáctinu celku. ✓
 Bílé pole tvoří šestnáctinu celku. ✓



100%

- Pokud u žlutého pole žáci zapisovali výsledek jako polovinu nebo čtvrtinu, položíme otázku, kolikrát se dílky vejdou do celku. Dáme jim nějakou lehčí úlohu, kde bude dílků a barevných částí méně. Můžeme využít pomůcky, nemusí se nutně jednat o trojúhelníky, ale situace bude namodelována stejně počtem barev.

Úloha:

Jaké číslo si myslím?

- a) Když k němu přičtu polovinu čísla 4, dostanu 7.
- b) Když k němu přičtu polovinu čísla 6, dostanu 19.
- c) Když od něj odečtu polovinu čísla 6, dostanu 23.

Komentář pro učitele:

Žáci řeší úlohy se zlomky v prostředí Myšleného čísla. Úspěšnost žáků ovlivní fakt, jestli zatím zkouší čísla, nebo již znají efektivní strategii pro řešení těchto úloh – odzadu. Tato úloha, ve které žáci pracují s polovinou čísla na strukturální úrovni, přichází až po mnoha zkušenostech s číslem v různých sémantických rolích.

Chceme sledovat:

- zda žáci řeší úlohu metodou pokusů nebo volí strategii řešení odzadu.

Poznátky:

- Poznátky k tomuto typu úloh naleznete v části Myslím si číslo.

Úloha:

Spoj, co k sobě patří.



60 minut

20 minut

15 minut

45 minut

30 minut

tři čtvrtě hodiny

půl hodiny

hodina

třetina hodiny

čtvrt hodiny

Komentář pro učitele:

Žáci počítají se zlomky v kontextu ciferníku, kde má celek 60 minut. Zde se mohou opřít o svou životní zkušenost, protože spojení jako „čtvrt hodina“ se běžně používají.

Chceme sledovat:

- jakým způsobem žáci úlohu řeší, které údaje si nechávají až na konec,
- kdo z žáků si vezme k řešení ciferník,
- zda žáci využijí ciferník nakreslený u úlohy, nebo budou řešit pamětně.

Poznátky:

- Největší potíže měli žáci s určením 20 minut. U ostatních hodnot vycházeli ze své životní zkušenosti, protože s pojmy pracují v běžné komunikaci ve škole.
- U hodnoty 20 minut pak žáci řešili buď dělením hodiny, nebo opakovaným násobením do 60 minut (do hodiny).
- Model ciferníku zpravidla nikdo příliš nevyužíval.
- Žáci, kteří chybovali, měli většinou potíž s porozuměním textu nebo porozuměním určitým pojmům (např. třetina).
- Celkově úspěšnost žáků hodně závisela na jejich zkušenostech s časem.

Úloha:

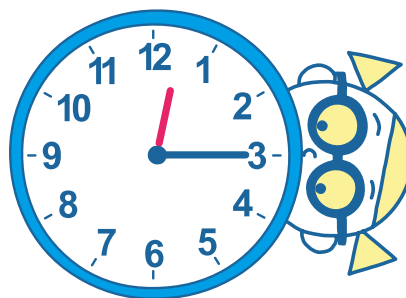
Hodina má minut.

Půl hodiny má minut.

Čtvrt hodiny má minut.

Třetina hodiny má minut.

Tři čtvrtě hodiny má minut.



Komentář pro učitele:

Žáci určují, kolik minut má daná část hodiny. Pracují s číslem v roli veličiny (čas v minutách).

Chceme sledovat:

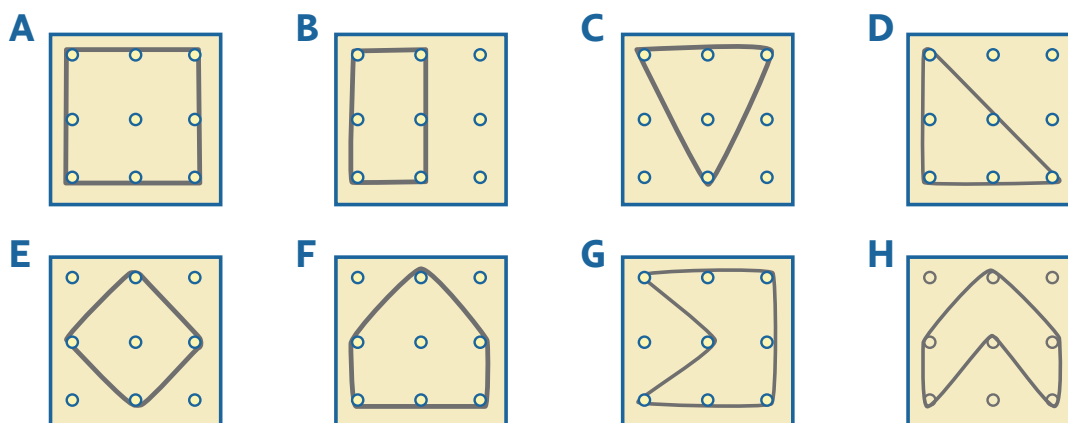
- zda si žáci vezmou k řešení ciferník (ciferníky musí být připravené předem),
- zda budou žáci pracovat s obrázkem,
- zda je odlišnost ve vnímání třetiny na kruhu x pouze v modelu počet x objeví se propojení.

Poznátky:

- Žáci při řešení úlohy nevyužili ciferník na obrázku, ale dívali se na hodiny na stěně třídy.
- Někteří žáci zaměňovali čtvrt a tři čtvrtě (nedočtou text do konce).

Úloha:

Každý obrazec rozděl na dva stejné obrazce: modrý a růžový.



Komentář pro učitele:

Žáci v úloze dělí útvary na poloviny, které musejí být stejné (tedy nestačí, aby měly jen shodný obsah, ale také stejný tvar).

Chceme sledovat:

- zda žáci řeší úlohu na papíru, nebo na geoboardu,
- jak žáci argumentují nebo ověřují stejnost obou rozdělených částí,
- zda žáci použijí modrou a růžovou barvu a vybarví obrazce, nebo je jen rozdělí čarou,
- zda žáci hledají více řešení, jak útvary rozdělit,
- zda žáky ovlivní vizuální podoba tvarů (bod jako kroužek, zaoblenost, některé vrcholy útvarů jsou špičaté, některé zaoblené – vnímají to?).

Poznátky:

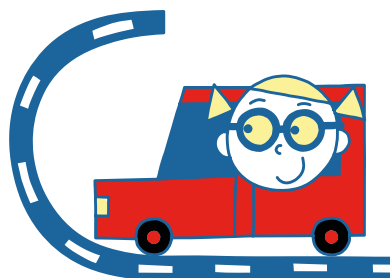
- Poznátky k této úloze naleznete v části Geoboard.

3. ročník

Úloha:

Vyřeš:

- a) Jedeme k tatínkovi mého tatínka.
Polovinu cesty máme za sebou a před sebou máme ještě 26 kilometrů.
Kolik kilometrů je dlouhá celá cesta?
- b) Jedeme k tatínkovi maminky.
Před sebou máme ještě 17 kilometrů.
Polovinu cestu máme za sebou.
Kolik kilometrů je dlouhá celá cesta?
- c) Ujeli jsme již 10 kilometrů. To je čtvrtina cesty k maminčině mamince. Kolik kilometrů máme ještě před sebou?



Komentář pro učitele:

Primárním cílem úlohy je práce se zlomky v reálném kontextu slovních úloh. Sekundárním cílem je skládání **relací (vztahů)** v prostředí rodiny. V úloze a) a b) si musí žák k úspěšnému vyřešení úlohy uvědomit, že dvě poloviny tvoří celek. V úloze c) je nalezení doplňku (komplementu) k jedné čtvrtině náročnější – hledaná část (tři čtvrtiny) totiž není kmenový zlomek.

Chceme sledovat:

- zda si žáci situaci nakreslí, nebo pouze zapíší výpočet,
- zda někdo z žáků řeší pamětně,
- zda se objeví chyba, že žák namísto celku určí chybějící část (u a) a b)), nebo naopak (u c)),
- zda budou mít žáci potřebu mluvit o složených relacích přítomných v textu úlohy, zda si je budou chtít vyjasnit.

Poznátky:

- Naprostá většina žáků dokázala vyřešit první úlohu a).
- V zadání za b) žáci často dělali numerické chyby.
- Žáci často chybovali v zadání c), kde očekávali stejnou otázku jako u předchozích dvou zadání. Zároveň sehrálo roli porozumění textu.
- U zadání za c) se často objevilo řešení 40 km. Žáci měli problém s porozuměním otázky.

Následná diferenciac, reedukace:

- Při potížích využijeme dramatizování úlohy.
- Pokud byla série úloh pro žáky obtížná, zadáme jim čtenářsky zjednodušenou verzi:

Úloha:

Vyřeš.

Jedeme k dědečkovi. Polovinu cesty máme za sebou a před sebou máme ještě 26 kilometrů. Kolik kilometrů je celá cesta?

Jedeme k babičce. Před sebou máme ještě 17 kilometrů. Polovinu cesty máme za sebou. Kolik kilometrů je celá cesta?

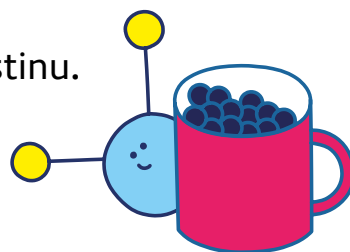
Jedeme k tetě. Ujeli jsme již 10 kilometrů. To je čtvrtina cesty k tetě. Kolik kilometrů máme ještě před sebou?

Úloha:

Novákovi byli sbírat borůvky.

Tatínek nasbíral polovinu. Syn třetinu a dcera šestinu.

Kolik hrnků borůvek nasbíral každý z nich, když dohromady nasbírali **a) 6, b) 12, c) 9** hrnků?



Komentář pro učitele:

V úloze se opět vyskytuje koncept polovina + třetina + šestina = celek, ale zde již bez grafického znázornění. V úloze c) se v řešení objeví zlomek polovina. Všimněme si, že polovina se zde tedy vyskytuje ve dvou různých rolích – v zadání je to polovina všech borůvek (respektive polovina všech nasbíraných hrnků). V řešení úlohy c) je to polovina jednoho hrnku.

Chceme sledovat:

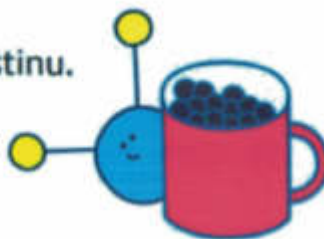
- zda žáci provedou kontrolu řešení (kontrola by zde spočívala v tom, že sečtou počty nasbíraných hrnků tatínka, syna a dcery a ověří, zda součet odpovídá zadání, případně se učitel může zeptat žáků, jakým způsobem by ověřili správnost),
- jak žáci vyřeší úlohu c) (budou počítat s polovinou hrnku, nebo prohlásí, že úloha nemá řešení),
- zda si žáci situaci nakreslí, nebo pouze zapíší výpočet,
- zda někdo z žáků řeší pamětně.

Poznatky:

- Většina žáků dokázala číslo 9 rozdělit na polovinu. Jedna žákyně odůvodnila svůj postup tak, že hledala nejbližší číslo k číslu 9, které je dělitelné 2 a zbytek pak rozpůlila.
- Ukázalo se, že žáci vnímali zadání úlohy jako obtížné z hlediska orientace v textu a porozumění. Velká část žáků si zprvu nespojovala text se všemi třemi zadáními a), b), c).
- Někteří žáci zaměňovali osoby v zadání, ale výsledky měli správně.
- Některým žákům dělalo problém určování šestiny (zapsali třeba u a) 6).
- Někteří žáci měli potřebu si pro přehlednost vytvořit tabulku, kam zaznamenávali všechna řešení.

Novákovi byli sbírat borůvky.
Tatínek nasbíral polovinu. Syn třetinu a dcera šestinu.
Kolik hrnků borůvek nasbíral každý z nich,
když dohromady nasbírali a) 6, b) 12, c) 9 hrnků?

3	4	6
3	4	6
3	4	6



T	3	6	4,5
S	2	4	3
D	1	2	1,5

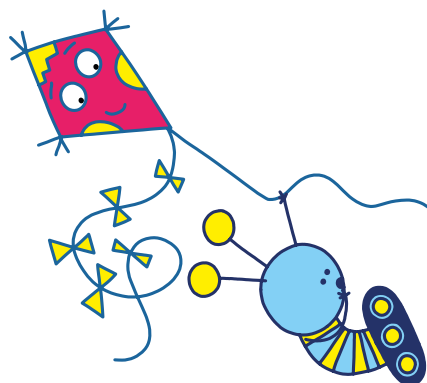
Následná diferenciaci, reedukace:

- Při potížích žáků můžeme využít manipulaci nebo zadat nějakou izomorfní úlohu, kde žáci určují z celku polovinu, třetinu a šestinu. Pokud je náročné dělení čísla 9, můžeme změnit toto číslo na jiné, které je dělitelné šesti.
- Pokud měli žáci potíže s porozuměním textu, necháme je s textem pracovat. Není vhodná cesta, pokud učitel rovnou úlohu reprodukuje svými slovy nebo ji zjednodušuje, aniž by žáci vůbec zkusili původní variantu.
- Problémem může být i porozumění, co je v úloze celkem. Proto můžeme zkusit úlohy s jasným celkem na podobné bázi.

Úloha:

Tři kamarádi si společně koupili draka.

- Z celkové ceny draka dal Alfred polovinu, Bivoj čtvrtinu a zbylých 10 korun zaplatil Ctirad. Kolik stál drak?
- Z celkové ceny draka dal Alfred polovinu, Bivoj třetinu a zbylých 10 korun zaplatil Ctirad. Kolik stál drak?
- Z celkové ceny draka dal Alfred polovinu, Bivoj šestinu a zbylých 10 korun zaplatil Ctirad. Kolik stál drak?



Komentář pro učitele:

Žáci opět řeší úlohu s konceptem polovina + třetina + šestina = celek. Nyní je jejich úkolem zjištění velikosti celku. K tomu je potřeba nejprve určit velikost chybějící části, která zbývá do celku.

Chceme sledovat:

- zda si žáci situaci nakreslí, nebo pouze zapíše výpočet,
- zda někdo z žáků řeší pamětně,
- zda někdo z žáků pouze určí částku, kterou zaplatil Ctirad, nebo určí velikost celku.

Poznátky:

- Žáci hodnotili tuto úlohu jako velmi náročnou. V reflexi často zmiňovali, že se jim obtížně pracovalo s textem, kde se kombinuje číslo reprezentované číslicí a slovem zároveň.
- Z žakovských řešení bylo patrné, že se žáci snažili zlomky graficky znázornit. I přes velké úsilí se některým nedařilo dobrat se správných výsledků.
- Nejlépe se žákům pracovalo s polovinou.
- Někteří žáci si určili částku a z ní pak počítali jednotlivé části. Potřebovali si udělat nějakou konkrétní představu. Podle toho, jak byli úspěšní, potom volili další částky. Tedy pracovali metodou opakovaných pokusů.
- Jeden žák zvolil zajímavý způsob. Pracoval s ciferníkem, na kterém si znázornil jednotlivé díly.
- Jeden žák přicházel na úlohu b) tak, že si řekl, že hledá číslo, které bude zároveň dělitelné dvěma i třemi (tam si dosazoval různá čísla).
- Objevila se opět záměna třetiny za 3, čtvrtiny za 4, šestiny za 6.
- Nejčastěji žáci úlohu řešili skrze kruhový model.
- Ukázky řešení:

Tři kamarádi si společně koupili draka.

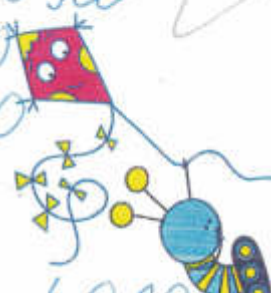
a) Z celkové ceny draka dal Alfred polovinu, Bivoj čtvrtinu a zbylých 10 korun zaplatil Ctirad. Kolik stál drak?



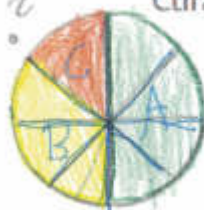
$$4 \cdot 10 = 40$$

$$20 + 10 + 10 = 40$$

Alfred = 20 Kč ✓
Bivoj = 10 Kč ✓
Ctirad = 10 Kč ✓



b) Z celkové ceny draka dal Alfred polovinu, Bivoj třetinu a zbylých 10 korun zaplatil Ctirad. Kolik stál drak?

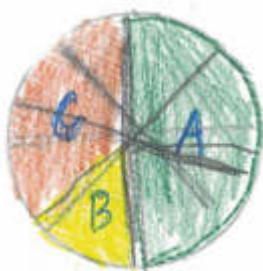


$$8 \cdot 10 = 80$$

$$40 + 30 + 10 = 80$$

Alfred = 40 Kč ✓
Bivoj = 30 Kč ✓
Ctirad = 10 Kč ✓

c) Z celkové ceny draka dal Alfred polovinu, Bivoj šestinu a zbylých 10 korun zaplatil Ctirad. Kolik stál drak?

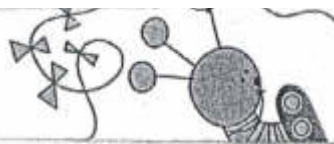


$$3 \cdot 10 = 30$$

$$15 + 5 + 10 = 30$$

Alfred = 15 Kč = polovina ✓
Bivoj = 5 Kč = šestina ✓
Ctirad = 10 Kč = třetina ✓

- b) Z celkové ceny draka dal Alfred polovinu, Bivoj třetinu a zbylých 10 korun zaplatil Ctirad. Kolik stál drak?



$$A \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5} \quad 1010 \text{ Kč}$$

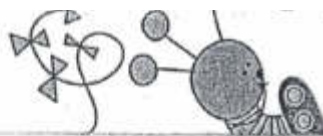
- c) Z celkové ceny draka dal Alfred polovinu, Bivoj šestinu a zbylých 10 korun zaplatil Ctirad. Kolik stál drak?

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{8} \quad 1016 \text{ Kč}$$

Zde můžeme vidět klasickou chybu při sčítání zlomků, žák sečetl čísla v čitateli a jmenovateli. Vzhledem k tomu, že jsme ve 3. ročníku, tak je otázka, proč to vůbec žák řešil tímhle způsobem. Může to být snaha dospělého urychlit žákovo poznání tím, že mu příliš brzy ukázal zápis zlomku a žák s ním neumí pracovat – je to formální znalost.

Hodnoty 1010 a 1016 jsou spočteny tak, že 10 Kč je od Ctirada a k nim dopsán součin čitatele a jmenovatele v těch zlomcích, tj. a) $10 + 2 \cdot 5 = 1010$, b) $10 + 2 \cdot 8 = 1016$.

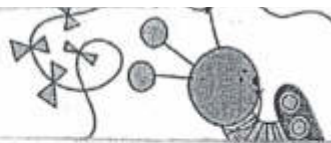
- b) Z celkové ceny draka dal Alfred polovinu, Bivoj třetinu a zbylých 10 korun zaplatil Ctirad. Kolik stál drak?



DRAK STÁL 40 Kč



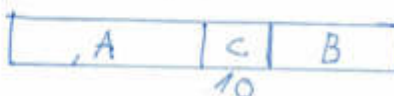
- b) Z celkové ceny draka dal Alfred polovinu, Bivoj třetinu a zbylých 10 korun zaplatil Ctirad. Kolik stál drak?



A	B	C
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	10 Kč



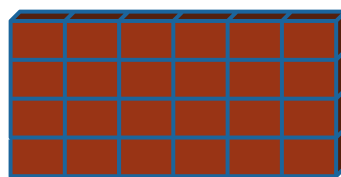
60 Kč



Následná diferenciaci, reedukace:

- Pro reedukaci využijeme manipulaci a obrázky v úlohách výše „vybarvi šestinu, třetinu, jaká část zůstala nevybarvena...” a izomorfní situace.

Děti hrály „Člověče, nezlob se!“. Navrhly, jak si podle umístění rozdělí čokoládu. Vítěz dostal polovinu čokolády, druhý dostal třetinu ze zbytku čokolády a třetí dostal čtvrtinu z toho, co zbylo. Kolik kousků čokolády dostal čtvrtý, poslední hráč? Bylo rozdělení odměny, které děti navrhly, spravedlivé?



Komentář pro učitele:

V úloze žáci opakovaně dělí celek na části. Cílem je, aby si uvědomili, že záleží na tom, z jak velkého celku danou část zjišťujeme.

Chceme sledovat:

- zda žáci využijí k řešení úlohy obrázek,
- jakým způsobem budou žáci argumentovat, zda bylo dělení spravedlivé,
- zda budou žáci počítat zlomky ze zbývající části čokolády, nebo chybně z celé čokolády.

Poznátky:

- Většina žáků využila obrázek k řešení.
- Většina žáků vnímala řešení jako spravedlivé. Žáci argumentovali, že je to podle pořadí, vítěz má mít nejvíce. Několik žáků s tímto názorem nesouhlasilo. Argumentovali, že hráči mohou být smutní, protože když nejsou první, dostanou málo čokolády. Chtěli, aby všichni dostali stejně. Zde může hrát zkušenost s pojmem „spravedlivé“, které se v předchozích úlohách objevovalo v souvislosti s dělením na stejné díly.
- Objevuje se záměna šestiny za 6.
- Ukázky řešení:



12 kousků čokolády. 
 4 kousky čokolády. 
 2 kousky čokolády. 
 6 kousků čokolády. 

Otázkou je, kde žáci vzali chybné řešení, že třetina je 6 kusů. To není ani třetina z celkového počtu 24. To samé s těmi čtyřmi kusy u čtvrtiny. Nevypadá to, že by si pletli v těchto ukázkách zlomek a počet (a že by tedy čtvrtině rozuměli jako čtyři kusy), protože u třetiny tuto chybu neudělali (že by napsali tři kusy, protože to je třetina).

Následná diferenciacie, reedukace:

- Pro neúspěšné žáky můžeme snížit počet dílků nebo počet dětí, které mezi sebe čokoládu dělí.
- Pro žáky, kteří neměli s úlohou potíže, zadáme výzvu:

Úloha:

Doplň do zadání úlohy takové zlomky, aby dělení mezi děti bylo spravedlivé:

První dítě dostane ____ z celé čokolády, druhé dítě ____ ze zbytku, třetí dítě ____ ze zbytku a zbytek dostane čtvrté dítě.

Komentář pro učitele:

Řešením je, že první dítě dostane čtvrtinu z celé čokolády, druhé třetinu ze zbytku a třetí polovinu ze zbytku. Přitom si žáci mohou uvědomit, že toto je obecné řešení pro jakýkoli počet dílků.

4. ročník

Úloha:

Nakresli obrázek, ve kterém je červená figurka

- a) pětinou skupiny,
- b) šestinou skupiny.



Komentář pro učitele:

Žáci v úloze znají část celku (jedna figurka) a hledají celek. K tomu jim slouží dva příklady uvedené obrázkem.

Chceme sledovat:

- zda sáhnou někteří žáci po manipulativech,
- zda budou žáci kreslit obrázky, nebo jen určí celkový počet figurek z paměti.

Úloha:

Zjisti délku provázku, když víš, že:

- a) $\frac{1}{2}$ provázku = 15 cm,
- b) $\frac{1}{4}$ provázku = 9 cm,
- c) $\frac{1}{3}$ provázku = 21 cm,
- d) $\frac{1}{5}$ provázku = 14 cm.

Délku tyče označme T.

Zjisti T, když víš, že:

- a) $\frac{1}{2} T = 25 \text{ cm}$,
- b) $\frac{1}{4} T = 35 \text{ cm}$,
- c) $\frac{1}{3} T = 33 \text{ cm}$,
- d) $\frac{1}{5} T = 20 \text{ cm}$.

Komentář pro učitele:

Obě úlohy cílí na **určování velikosti celku, když známe některou jeho část**. S tím by již měli mít žáci zkušenosti. Pokud by jim tento typ úloh dělal potíže, učitel může zařadit nejprve snazší úlohy, kde je úkolem žáků najít (např. vybarvit nebo spočítat) velikost části známého celku (polovinu, třetinu atd.). V této úloze je nový způsob, kterým je žákům předloženo zadání. Poprvé se v něm vyskytuje formální matematický zápis zlomku. Kromě toho v úloze s tyčí zkracujeme celý zápis pomocí písmene T. První úlohu může učitel zadat ve dvou provedeních, jednou s využitím slovního vyjádření zlomku (případně zadání číst), podruhé s formálním zápisem zlomku.

Úloha:

Zjisti délku provázku, když víš, že:

- a) polovina provázku = 12 cm,
- b) čtvrtina provázku = 10 cm,
- c) čtvrtina provázku = 10 cm,
- d) pětina provázku = 9 cm.

Chceme sledovat:

- zda žáci porozumí formálnímu zápisu kmenového zlomku,
- zda budou žáci zkracovat zápis a místo „provázek“ napíšou P,
- zda žáci nakreslí obrázek,
- zda bude rozdíl ve vnímání slovního a číselného zadání (čtvrtina, $\frac{1}{4}$).

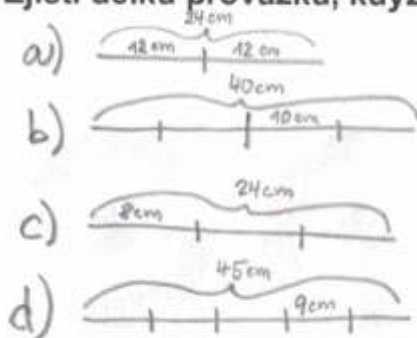
Poznátky:

- Většina žáků vyřešila úlohu správně.
- Žáci neměli potíže s formálním zápisem zlomku.
- Někteří žáci využívali k řešení obrázek, jiní ho nepotřebovali. Objevil se model tyčí. Někdo pracoval čistě početně.
- Ukázky řešení ze slovního zadání úlohy:

Zjisti délku provázku, když víš, že:

A) CELÝ PROVÁZEK MÁ (24) cm dlouhý (12 · 2 = (24))
POLOVINA
B) CELÝ PROVÁZEK MÁ (40) cm dlouhý (10 · 4 = (40))
ČTVRTINA
C) CELÝ PROVÁZEK MÁ (24) cm dlouhý (8 · 3 = (24))
TŘETINA

Zjisti délku provázku, když víš, že:



1) $12 + 12 = 24$

2) $10 + 10 + 10 + 10 = 40$

3) $8 + 8 + 8 = 24$

4) $9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 45$

- Ukázky řešení z písemného zadání s formálním zlomkem:

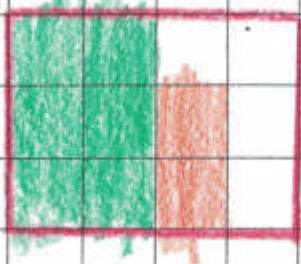
1. Zjisti délku provázku, když víš, že:

a) $\frac{1}{2}$ pr. = 15 cm	30 cm	① násobení a vynásobíš		③ násobení a vynásobíš $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$
b) $\frac{1}{4}$ pr. = 9 cm	36 cm	$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$		
c) $\frac{2}{5}$ pr. = 10 cm	50 cm	$\frac{2}{3}$		
d) $\frac{3}{5}$ pr. = 17 cm	51 cm	$\frac{1}{3}$		
e) $\frac{4}{6}$ pr. = 24 cm	36 cm			

1. Zjisti délku provázku, když víš, že:

a) $\frac{1}{2}$ pr. = 15 cm	30 cm
b) $\frac{1}{4}$ pr. = 9 cm	36 cm
c) $\frac{2}{5}$ pr. = 10 cm	50 cm
d) $\frac{3}{5}$ pr. = 17 cm	51 cm
e) $\frac{4}{6}$ pr. = 24 cm	36 cm

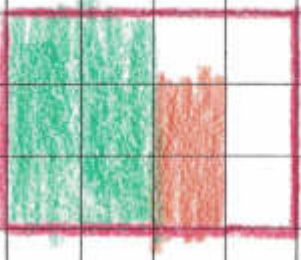
2.



Lnáři sami a vypočítej.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

3.



Lnáři sami a vypočítej.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Zjisti délku provázku, když víš, že:

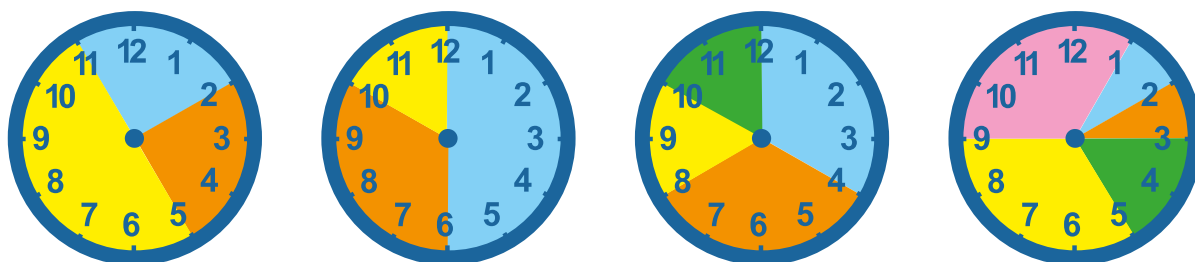
- a) $\frac{1}{2}$ provázku = 15 cm, $15 \cdot 2 = 30$ cm má prováček.
 b) $\frac{1}{4}$ provázku = 9 cm, $9 \cdot 4 = 36$ cm má prováček.
 c) $\frac{1}{3}$ provázku = 21 cm, $21 \cdot 3 = 63$ cm má prováček.
 d) $\frac{1}{5}$ provázku = 14 cm, $14 \cdot 5 = 70$ cm má prováček.

$$\begin{array}{r} 14 \\ \cdot 5 \\ \hline 70 \end{array}$$

Já jsem nad tím přemýšlela
 tak že když mám še $\frac{1}{2}$
 provázku má 15 cm tak
 $15 \cdot 2 = 30$ a to je výsledek.

Úloha:

Na prvním ciferníku je modře vybarvena jeho čtvrtina. Zapišeme modrá = $\frac{1}{4}C$. Stejně zapiš, jaká část ciferníku je vybarvena oranžově a jaká žlutě. Totéž proved' u ostatních ciferníků.



Komentář pro učitele:

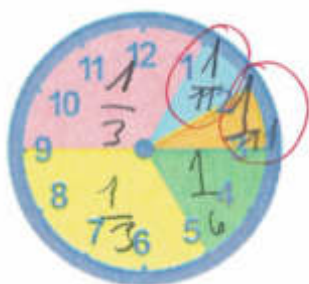
Žáci určují, na jaké části je ciferník rozdělen. Jejich úkolem je zapsat tuto část formálně zlomkem. Úlohu lze díky obrázkům využít také na porovnávání zlomků.

Chceme sledovat:

- zda budou žáci zapisovat jednotlivé části formálně zlomkem, nebo jiným způsobem,
- zda budou někteří žáci odpovídat počtem minut. Pokud ano, jak jim učitel může pomoci, aby byli schopni odpovědět zlomkem? (využití slova kolikrát) Může převažovat silná životní zkušenost (odpoví 15 minut) nebo odpoví 15 minut ze 60 (učitel se může doptávat, z jakého celku apod.).

Poznátky:

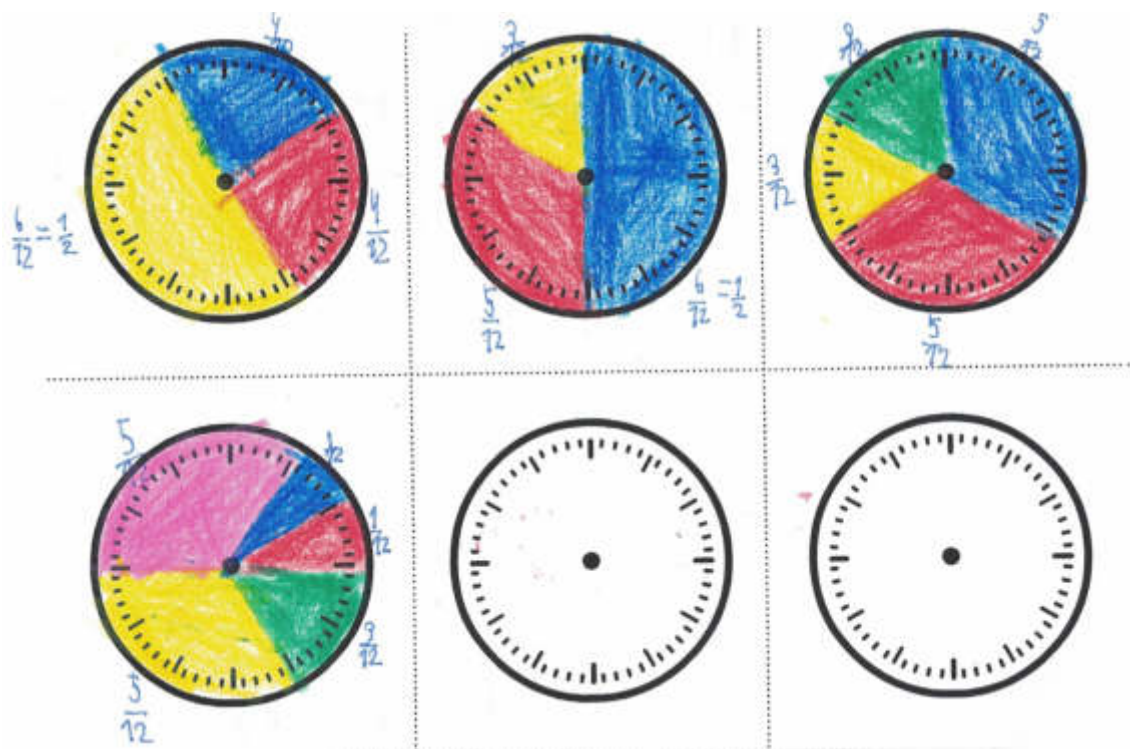
- Učitelé považovali tento model pro žáky za jednodušší než tyč, protože tady se mohou opřít o to, že znají velikost částí v minutách a že celý ciferník je vždy 60 minut, ale u tyče není obecně daná nějaká její jednotná délka.
- Většina žáků řešila úlohu správně, několik žáků dokonce ke zlomkům zapsalo i „C“ (např. $\frac{1}{3}C$).
- Někdy se vyskytla následující chyba (příčiny mohou být různé – např. že při počítání, kolikrát se ta malá část vejde do celku, se žáci přepočítají a spletou, protože je to zlomek vyjadřující malou hodnotu, nebo to může být tím, že zapomenou započítat ten vyznačený zlomek a vlastně počítají, kolikrát se tam ta část vejde ještě kromě té, která je už vyznačená):



- Někdy žáci chybně nepočítali, kolik pětiminutových úseků má daná část, ale místo toho počítali, kolik čísel daná část obsahuje – takže např. ve druhém ciferníku v zadání úlohy u žluté části nespočítali 2 pětiminutové úseky, ale že žlutá část obsahuje 3 čísla: 10, 11, 12, tedy buď řekli že to celé je $3 \cdot 5 = 15$, takže $\frac{1}{4}C$, protože 15 se do 60 vejde čtyřikrát, nebo řekli $\frac{1}{3}C$, protože to obsahuje tři čísla – v obou případech tkví příčina chyby v tom, že si žák plete číslo jako interval (přesněji jeho délku, tedy veličinu zde představovanou počtem minut) a číslo jako adresu (zde předsta

vovanou koncovými body a všemi dalšími mezi nimi). Tato chyba není výjimečná při práci na lineární číselné ose.

- Další zaznamenaná chyba je ta, že žák zapisoval polovinu zlomkem $\frac{1}{5}$. Zde je příčina v tom, že žák ví, že polovina se v desetinných číslech zapisuje 0,5, a tedy tuto pětku zapíše i do jmenovatele.
- Ukázky řešení:



V řešení je vidět, že žák umí pracovat i s nekmenovými zlomky, nemá vždy potřebu je převést do základního tvaru (nebo ho možná nevidí, např. $\frac{1}{12} = \frac{1}{3}$). Můžeme také vidět, že si žák plete délku intervalu v některých zadáních.

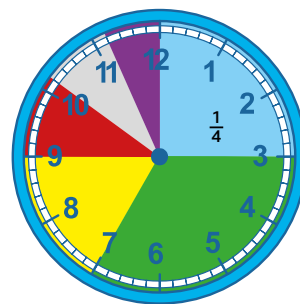
Následná diferenciacce, reedukace:

- Pokud je příčina chyby ta, že si žák plete délku intervalu a nějaké konkrétní body (čísla) na intervalu, vrátíme se o úroveň níž a budeme pracovat s modelem zlomků, kde uvidí žáci jen délku intervalu a nebudou je rušit žádné další body – ideální je zde tedy např. provázek nebo proužek papíru a překládat je na poloviny, třetiny, pětiny atd. Pak se vrátíme k úloze na ciferníku a klidně ji můžeme řešit s pomocí dřevěného kruhového modelu zlomků, kde opět žáky neruší vyznačená čísla, ale jsou tam jen dílky. Následně toto řešení vyznačí na papírovém ciferníku s čísly, aby se vrátili na tu úroveň, kde jsme začínali.
- Pokud žák chybně zapisuje zlomkem polovinu, je vhodné nechat ho zlomek vyznačit na nějakém modelu zároveň oba dva zlomky polovina a pětina, aby si chybu uvědomil.

Úloha:

Ted' budeme pracovat s ciferníkem, na kterém jsou vyznačeny i minuty. Těmi je ciferník rozdělen na 60 částí. Modrá část je $\frac{1}{4}$ ciferníku a to je 15 minut. To zapíšeme: modrá = $\frac{1}{4}C = 15 \text{ min.}$

Podobně запиšte i další barevné části ciferníku (zlomkem i počtem minut).



Kira, po vyřešení předchozí úlohy, napsala:

$$\frac{1}{4}C + \frac{1}{3}C + \frac{1}{6}C + \frac{1}{10}C + \frac{1}{12}C + \frac{1}{15}C = 1C.$$

Rozumíte Kiře?

Komentář pro učitele:

V úloze žáci určují, na jaké části je ciferník rozdělen a také velikost těchto částí ciferníku v minutách. Vznikají tak rovnosti barva = část ciferníku = velikost části v minutách. Část ciferníku mají žáci zapsat formálně zlomkem. Rovnost, kterou zapsala Kira, je pouze formálním matematickým zápisem situace, která je znázorněná na ciferníku – všechny barevné části dávají dohromady jeden celý ciferník.

Chceme sledovat:

- zda budou žáci zapisovat jednotlivé části formálně zlomkem, nebo jiným způsobem,
- zda žáci rozumí rovnosti, kterou zapsala Kira.

Úloha:

Třetina tyče je modrá, třetina zelená a zbytek, 40 cm, je červený.
Jak dlouhá je tyč?



$$\text{Tuto úlohu můžeme zapsat } \frac{1}{3}T + \frac{1}{3}T + 40 \text{ cm} = T.$$

Komentář pro učitele:

S podobnými úlohami, ve kterých se vyskytuje tyčový model zlomku, mají již žáci zkušenosti. Nyní tuto úlohu zapisují formálním matematickým zápisem – tvoří rovnici. Není třeba, aby žáci dále rovnici řešili.

Chceme sledovat:

- zda žáci využijí k řešení úlohy obrázek,
- zda žáci porozumí formálnímu zápisu kmenového zlomku a napsané rovnici.

Poznátky:

- Objevilo se, že si žáci přeměřovali prsty, zda jsou třetiny na obrázku stejně dlouhé (jednomu žákovi se zdála červená část kratší než zbylé, takže první jeho řešení bylo $50 + 50 + 40 = 140$, ale po radě od učitele části přeměřil a ujistil se, že jsou opravdu stejně dlouhé).
- Někteří žáci přeměřovali pravítkem všechny části.

• Ukázky řešení:

Třetina tyče je modrá, třetina zelená a zbytek, 40 cm, je červený.
Jak dlouhá je tyč?



Tuto úlohu můžeme zapsat $\frac{1}{3} T + \frac{1}{3} T + 40 \text{ cm} = T$.

Tato celá tyč má $\begin{array}{r} 40 \\ \cdot 3 \\ \hline 120 \end{array}$
do hromady 120 cm

Já jsem nad tím přemýšlela tak, že
když je $\frac{1}{3}$ tyče má ~~se~~ možná 40 cm
takže $40 \cdot 3 = 120$ tak mi vyšlo 120 cm.

Mě pomohlo to, že $\frac{1}{3}$ je modrá a
zelená a, že červená má 40 cm.

Tuto úlohu můžeme zapsat $\frac{1}{3} T + \frac{1}{3} T + 40 \text{ cm} = T$. CELÁ TYČ MÁ 120 cm

Já jsem nad tím přemýšlela tak že, když č. měří
40 cm a třetin musí být tři a takže i č. musí být třikrát
takže když třetin (je) je tři tak si to musím vynásobit
3 takže $40 \cdot 3 = 120$ a kolik má celá tyč. Výsledek: 120 cm
a mě pomohlo (rozděl) napísat tento, protože když jsem to viděla tak to
bylo lepší.

Třetina tyče je modrá, třetina zelená a zbytek, 40 cm, je červený.
Jak dlouhá je tyč? 120 cm



Tuto úlohu můžeme zapsat $\frac{1}{3} T + \frac{1}{3} T + 40 \text{ cm} = T$.

*Mě pomohlo si to rozdělit pravidlem a červená
bylo stejně dlouhá jako zelená a modrá.*

Mě pomohlo to znázornit.



Následná diferenciacce, reedukace:

- V rámci reedukace byla využita manipulace s papírovou tyčí, kterou učitel rozstříhal a žák následně zjistil, že jsou všechny části stejné. Následně si zapsal na červenou tyč 40 cm. Poté i na modrou a zelenou část. Po navedení již bylo jasné, že se části musí sečíst.
- Je vhodné vést žáky k tomu, aby udělali zkoušku.

Úloha:

Známe délku tyče $T = 120 \text{ cm}$. Doplně tabulku.

1 T	$\frac{1}{2} T$	$\frac{1}{6} T$	$\frac{1}{12} T$			
120 cm				40 cm	24 cm	12 cm

Komentář pro učitele:

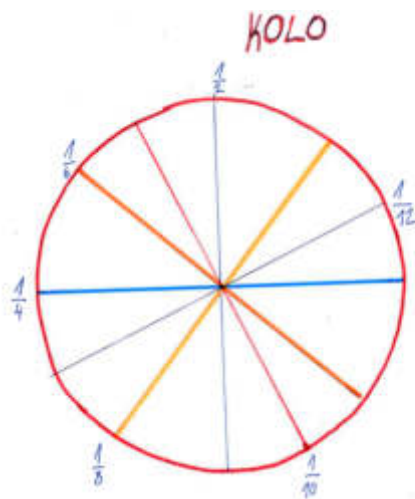
Žáci určují velikost jednotlivých částí celku nebo určují, o jakou část celku se jedná. Výsledky zapisují do tabulky. Někteří žáci si možná model tyče nakreslí.

Chceme sledovat:

- zda si žáci nakreslí tyčový model, nebo vyřeší úlohu pouze výpočtem či pamětně.

Poznátky:

- Žáci řešili úlohu nejčastěji výpočtem (pomocí operace dělení nebo nějakým jiným způsobem řešili dělení celku na části).
- Ukázky řešení:



Jde vždy o dva

2 pětkrát a ta čtyřka já jsem nad tím přemýšlela
jde takhle $4+4+4+4+4=$ tak že si vezmu 12 místo 120
20 dělo i $5 \cdot 4 = 20$ a že 60 je 6 atd. tak že 240m
a proto protože si na rukou užážu

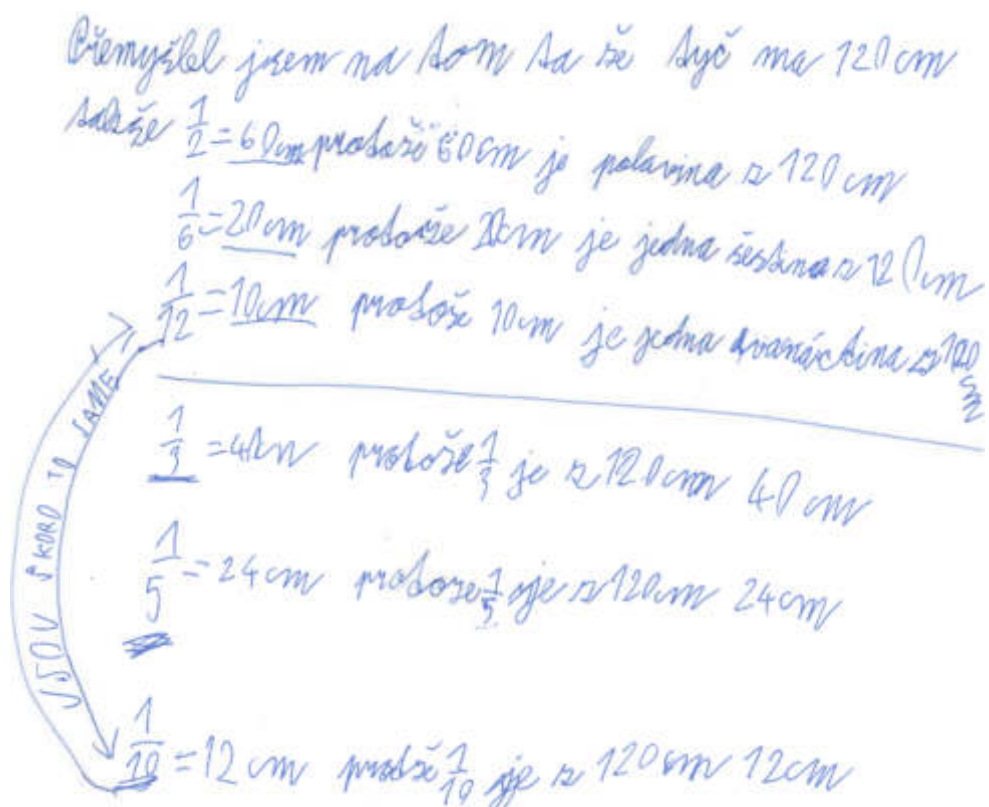
Zde můžeme vidět vysvětlení, jak si zjednodušit výpočet. Místo se 120 žák počítal s 12.

Já jsem to spočítala tak, že
jsem si měřila úhly 120
májm rozdělit na dvě
poloviny, pakma řek, pak
na dvanáct. a tak jsem
si to spočítala tak, že
jsem si řekla kolikrát
(jsem) - se mi 40 vejde
do 120 pak kolikrát se
mi 24 vejde do 120 pak
kolikrát se mi 12 vejde do
120 a mám výsledek.

Známe délku tyče $T = 120$ cm. Doplň tabulku.

$1T$	$\frac{1}{2}T$	$\frac{1}{3}T$	$\frac{1}{4}T$	$\frac{1}{5}T$	$\frac{1}{6}T$	$\frac{1}{10}T$
120 cm	60 cm	20 cm	10 cm	40 cm	24 cm	12 cm

Já jsem přemýšlela tak, že, jsem si řekla že celá tyč
je 120 cm a polovina musí být :2 takže $120 : 2 = 60$ cm
šestina :6 ($120 : 6 = 20$ cm) atd a když (j) jsem to dělala
obráceně, abych v těch 40 cm jsem si řekla: Máme 40 a kolik mi
vejde do 120? 80. a uvědomil jsem si že $80 : 2 = 40$
takže jsem zjistila že $40 + 40 + 40 = 120$ a takhle jsem pokračovala.



Zajímavé v tomto řešení bylo i povšimnutí si vztahu mezi 10 cm a $\frac{1}{2}$ tyče.

Následná diferenciacie, reedukace:

- Reedukace u žáků probíhala tak, že byli vyzváni ke kreslení obrázků tyče a celou úlohu vizualizovat.
- Jiná cesta vedla přes proužek papíru, který žáci stříhali, přikládali dílky k sobě a tím úlohu vyřešili. To je dobrá ukázka toho, že reedukace u jedné úlohy může vypadat u různých žáků jinak a že každému může pomoci snížení na jinou úroveň.

Úloha:

Vyřeš úlohy:

- Plavky stály 320 Kč. Potom je zlevnili o polovinu.
Kolik Kč stály plavky po slevě?
- Plavky stály 420 Kč. Potom je zlevnili o polovinu.
Následovně novou cenu zlevnili ještě jednou o polovinu.
Kolik Kč stály plavky po obou slevách?
- Plavky zlevnily o polovinu. Plavky stály po slevě 150 Kč.
Kolik Kč stály plavky před slevou?

Chceme sledovat:

- zda budou žáci v úloze b) počítat druhou slevu z nové ceny plavek, nebo z původní ceny, a pokud z původní, zda je zaradí, že plavky budou zadarmo,
- zda budou žáci v úloze c) správně počítat původní cenu násobením, nebo chybně vydělí cenu plavek dvěma.

Poznátky:

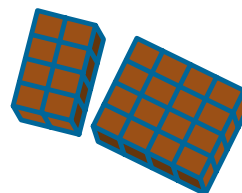
- Pro většinu žáků byla úloha jednoduchá (říkali, že by to dali žákům 2. ročníku), chyb se objevilo málo.
- Nejčastější zápis řešení byl klasický výpočet pomocí dělení nebo násobení, ale objevily se i způsoby zápisu pomocí neznámé x .
- V úloze b) se nevyskytla chyba, že by někdo určil konečnou cenu plavek jako nulovou (protože dvojitá zlevnění o polovinu by bral jako dvojitou zlevnění o stejnou částku 210), místo toho někdo zapomněl na druhou slevu a spočítal pouze první.

Následná diferenciacce, reedukace:

- Učitelé zmínili, že se v této úloze nedá rozlišit, zda žák chápal zadání správně „sleva o polovinu“, nebo chybně „na polovinu“, protože obojí má stejný výsledek. Bylo by tedy dobré pro zjištění toho, zda mají žáci skutečně dobrou představu zadat např. úlohu „sleva o třetinu“, kde by se ukázalo, zda žáci spočítají pouze třetinu zboží (tedy tu slevu), nebo skutečně správně odečtou slevu od původní ceny.

Úloha:

Z tabulky čokolády zůstala jen třetina, tj. 8 kostiček.
Jak velká byla tabulka čokolády původně?



Komentář pro učitele:

Úkolem žáků je určení velikosti celku, když znají jeho třetinu.

Chceme sledovat:

- zda si žáci nakreslí obrázek, nebo budou řešit jiným způsobem.

Poznátky:

- Úloha byla bez obtíží, téměř všichni žáci ji vyřešili správně. K řešení žáci využívali obrázek. Je ovšem otázkou, zda tito žáci k odpovědi pracovali pouze s obrázkem, nebo také počítali třetinu. Toto bychom ověřili v situaci, kdy by obrázek u úlohy fungoval pouze ilustrativně a nepředkládal i samotné řešení.
- Několika žákům byla úloha zadána pouze textově, bez obrázku. I tito žáci byli velmi úspěšní. K řešení využívali vlastní obrázek čokolády nebo model tyče.
- Ukázky řešení:

Z tabulky čokolády zůstala jen třetina, tj. 8 kostiček.
Jak velká byla tabulka čokolády původně?

Řešení je 8 kostiček

$3 \cdot 8 = 24$

$8 \mid 8 \mid 8$

$= 24$

Je semě nad tím přemýšlela tak, že třetina je 3 a 8 $3 \cdot 8 = 24$

Z tabulky čokolády zůstala jen třetina, tj. 8 kostiček.
Jak velká byla tabulka čokolády původně? (24)

$$\frac{1}{3} = \frac{8}{24}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \text{celek}$$

$$8 + 8 + 8 = 24$$

$$16 + 8 = 24$$



celá čokoláda
má 24 kostiček

Když $\frac{1}{3}$ je 8 kostiček tak si
spočítáme $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, protože třetina
jsou 3 dílky tak nám výde
výsledek. Výsledek (24)

Úloha:

Označme ciferník C = 60 minut. Vyřeš.

a) $\frac{1}{4}C + 15 \text{ min} = \text{---} C$

b) $\frac{1}{3}C - 10 \text{ min} = \text{---} C$

c) $\frac{1}{6}C + \frac{1}{3}C = \text{---} C$

d) $\frac{1}{3}C - \frac{1}{4}C = \text{---} C$

Etapa motocyklového závodu měří E = 420 km. Vyřeš.

a) $\frac{1}{5}E + 56 \text{ km} = \text{---} E$

b) $E - 336 \text{ km} = \text{---} E$

c) $\frac{1}{6}E + \frac{1}{3}E = \text{---} E$

d) $\frac{1}{3}E - \frac{1}{4}E = \text{---} E$

Desetiletí má D = 120 měsíců. Vyřeš.

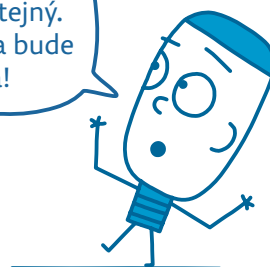
a) $\frac{1}{6}D + 4 \text{ měsíce} = \text{---} D$

b) $D - 90 \text{ měsíců} = \text{---} D$

c) $\frac{1}{6}D + \frac{1}{3}D = \text{---} D$

d) $\frac{1}{3}D - \frac{1}{4}D = \text{---} D$

Podívejte.
Případ c) v posledních
třech úlohách je stejný.
Šestina plus třetina bude
vždy polovina!



Má Elmar pravdu?

Komentář pro učitele:

Žáci řeší úlohy se zlomky v různých sémantických kontextech (ciferník, tyčový model). Žák, který dokáže úlohy řešit bez opory o model či obrázek, má velmi dobré porozumění zlomkům. Žáci si mohou všimnout, že např. úloha c) je ve všech úlohách stejná a jejím řešením je dvanáctina. Všimne si toho někdo? Uvědomují si žáci už tyto obecnosti, že např. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ vyjde stejně nezávisle na použitém modelu?

Chceme sledovat:

- zda si žáci nakreslí situaci či použijí nějaký model, nebo vyřeší úlohu pouze výpočtem či pamětně,
- zda žáci objeví izomorfismus (stejnost) úloh c) a d).

Poznátky:

- Ukázky řešení:

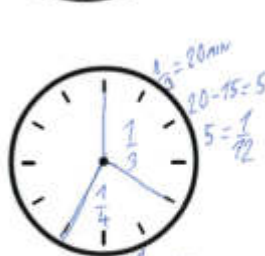
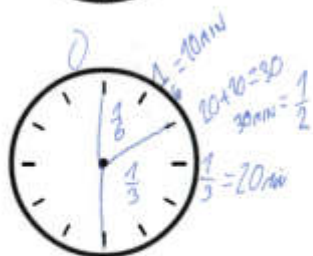
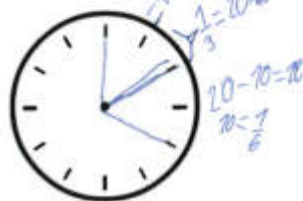
Označme ciferník $C = 60$ minut. Vyřeš.

a) $\frac{1}{2}C + 15 \text{ min} = \frac{1}{2}C$

b) $\frac{1}{3}C - 10 \text{ min} = \frac{1}{6}C$

c) $\frac{1}{6}C + \frac{1}{3}C = \frac{1}{2}C$

d) $\frac{1}{3}C - \frac{1}{6}C = \frac{1}{6}C$



Já tak jsem promýšlel mohl bych vidět v ciferníku

Žák uměl dobře pracovat s modelem ciferníku. Uměl si znázornit jednotlivé části a zároveň určit velikost těchto částí v minutách. Postupoval nejspíš tak, že nejprve části ciferníku ze zadání znázornil v ciferníku a převedl je na minuty. V minutách provedl příslušnou operaci (sčítání nebo odčítání) a výsledek nakonec vyjádřil jako část ciferníku ve tvaru zlomku. Jediné, co v řešení není zcela korektně, je zápis (např. mělo by tam být, že $\frac{1}{4}C$ (ciferníku) = 15 minut. Ale to je jen chyba v zápisu, podstatě žák rozumí a to je hlavní.

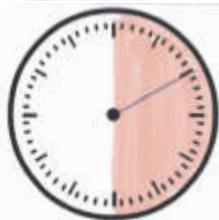
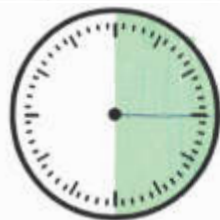
5 Označme ciferník $C = 60$ minut. Vyřeš.

a) $\frac{1}{2}C + 15 \text{ min} = \frac{1}{2}C$ nebo 30 min

b) $\frac{1}{3}C - 10 \text{ min} = \frac{1}{6}C$ nebo 10 min

c) $\frac{1}{6}C + \frac{1}{3}C = \frac{1}{2}C$ nebo 30 min

d) $\frac{1}{3}C - \frac{1}{6}C = \frac{1}{6}C$ nebo 10 min



Následná diferenciacie, reedukace:

- Pokud tyto úlohy dělaly žákům potíže, vrátí se učitel k jednodušším úlohám, kde se nekombinuje sčítání a odčítání zlomků a veličin (minut, délky atd.).

Úloha:

Označme ciferník $C = 12$ hodin. Vyřeš.

a) $C - 6 \text{ hod} = \text{---} C$

b) $C - \text{---} C = 8 \text{ hod}$

c) $\text{---} C + 10 \text{ hod} = C$

d) $\frac{1}{3} C - \frac{1}{4} C = \text{---} C$

Jedeme k babičce. Musíme urazit vzdálenost $V = 140$ km. Vyřeš.

a) $\frac{1}{5} V + 42 \text{ km} = \text{---} V$

b) $V - 112 \text{ km} = \text{---} V$

c) $\frac{1}{7} V + 15 \text{ km} = \text{---} V$

d) $\frac{1}{4} V - \frac{1}{5} V = \text{---} V$

Komentář pro učitele:

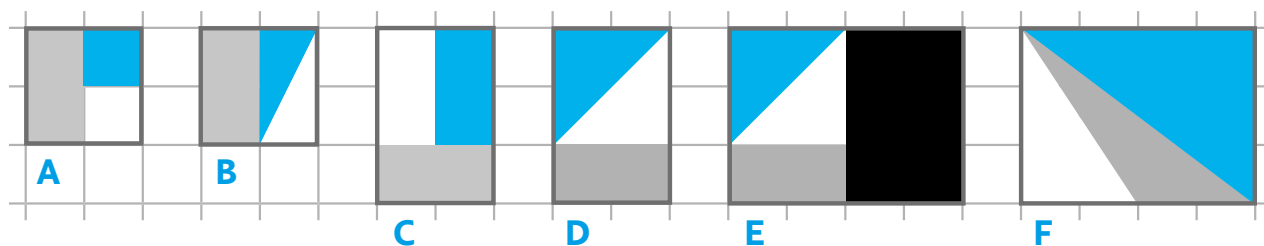
V úlohách žáci určují velikosti jednotlivých částí celku bez opory o model či obrázek. Sledujeme, zda budou mít žáci potřebu si namalovat obrázek, nebo řešit úlohu s nějakým modelem.

Chceme sledovat:

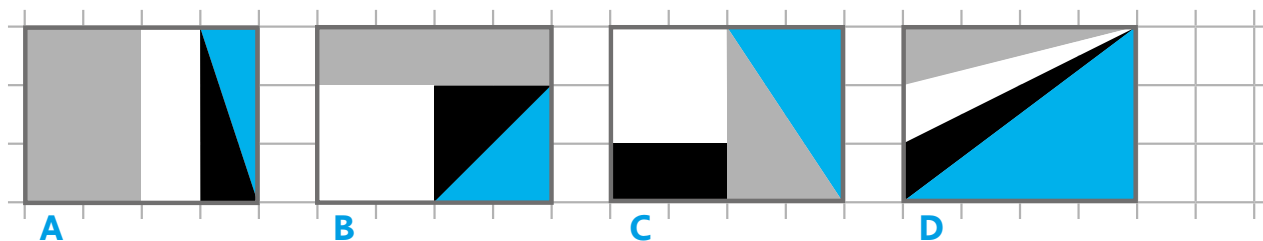
- zda si žáci nakreslí situaci či použijí nějaký model, nebo vyřeší úlohu pouze výpočtem či pamětně.

Úloha:

Zapiš číslem, jaká část obsahu daného čtyřúhelníku je modrá, šedá, bílá a v případě E i černá.



Zapiš číslem, jaká část obsahu daného čtyřúhelníku je modrá, šedá, bílá a jaká černá.



Komentář pro učitele:

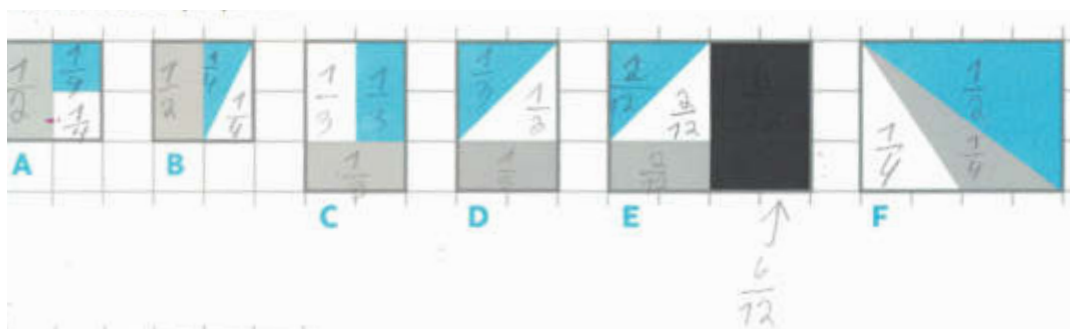
Úkolem žáků je zapsat pomocí zlomku jednotlivé barevné části čtyřúhelníku. Někomu může dělat problém to, že barevné části překrývají linky čtvercové mříže. Sledujeme, jak si s tím žáci poradí.

Chceme sledovat:

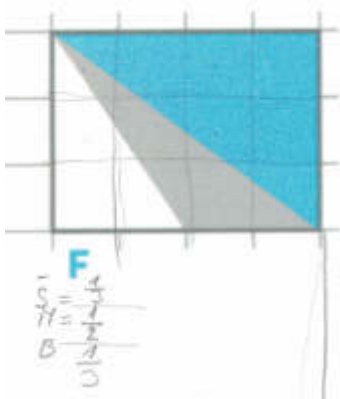
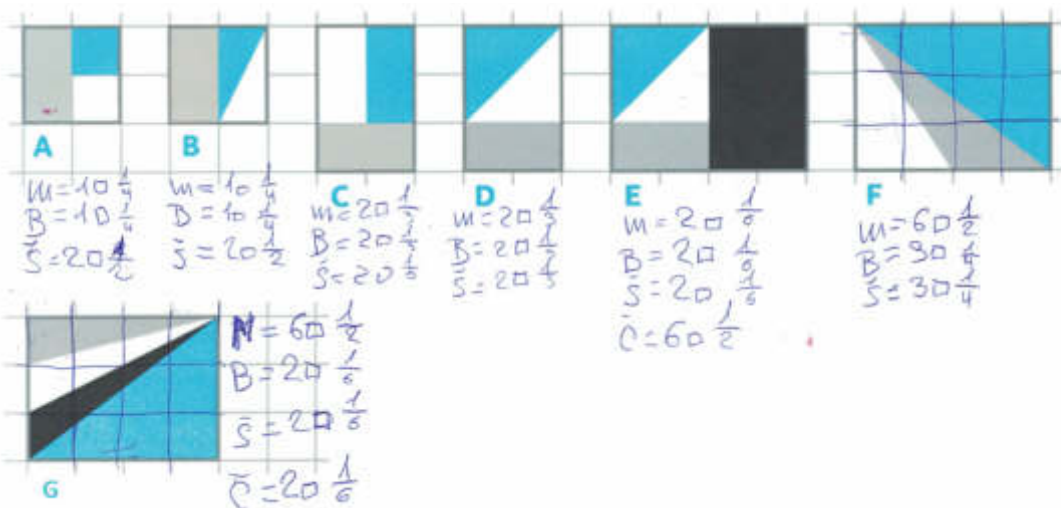
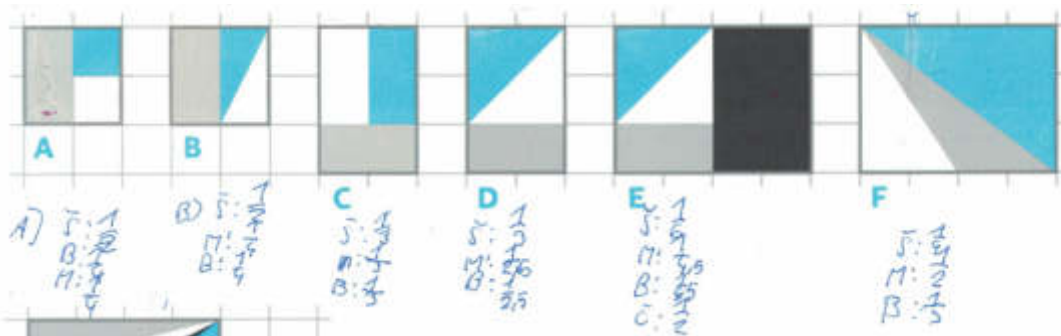
- zda žáci určí číselně obsahy jednotlivých částí, nebo zapíšou rovnou zlomkem jednotlivé části,
- zda si někteří žáci dokreslí čtvercovou mříž přes jednotlivé části čtyřúhelníku.

Poznátky:

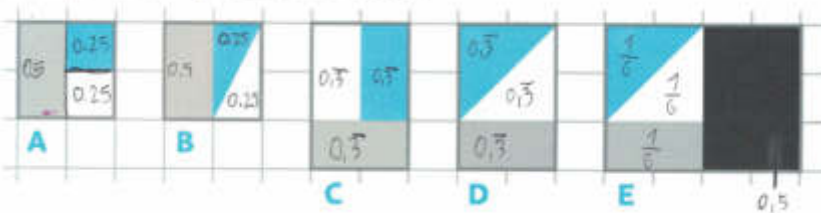
- Pro mnoho žáků to byly náročné úlohy na samostatnou práci.
- Někteří žáci pracovali již s nekmenovými zlomky a jmenovatele určili jako počet všech malých čtverečků (tedy obsah útvaru).
- Jeden žák měl potřebu vyjádřit, že v některých útvarech nebyla černá část, a napsal nulový zlomek.
- Někdy si žáci zafixovali v první úloze, že polovina je tvořena dvěma čtverečky, a proto už v dalších útvarech dva čtverečky označili jako polovinu.
- Jako nejvíce problematické se ukázaly obecně trojúhelníkové části:
 - Zejména v úloze D (ve spodní úloze), kde správně určili modrý trojúhelník jako polovinu a pak odhadovali, kolikrát se další tři trojúhelníky vejdou do celého obdélníku, přičemž většinou si uvědomovali, že všechny tři mají stejný obsah.
 - Rovněž i v úloze B (ve spodní úloze), kde často žáci modrý a černý trojúhelník určili jako čtvrtiny (možná v tu chvíli ignorovali tu šedou část celého obdélníku, protože bez ní by to byla pravda).
- Ukázky řešení:



Žák zapisoval i nekmenové zlomky a měl o nich dobrou představu. Zlomek $\frac{6}{12}$ nepřevodl na základní tvar, nejspíš rovnou viděl, že to je polovina.



šedá, bílá a v případě E i černá.

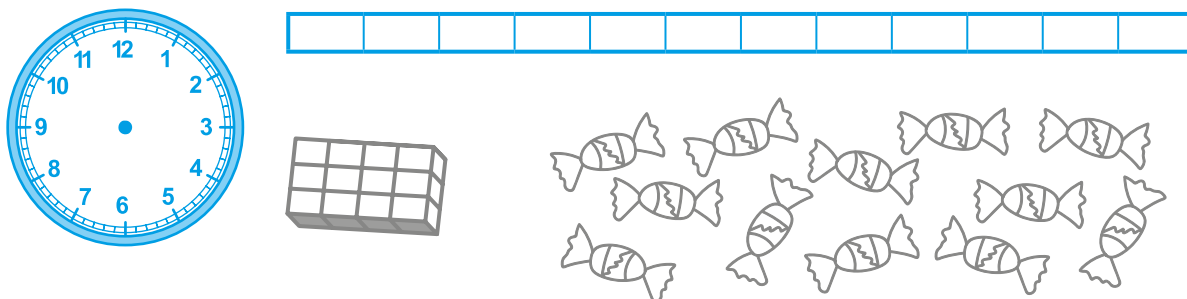


Zajímavé řešení s desetinnými čísly. Žák měl o nich zřejmě dobrou představu, protože třetinu zapsal správně i s periodickým rozvojem. Otázkou je, zda to například nedělal na kalkulačce, která mu to vypočítala, a nemusel tomu rozumět. Každopádně ale $\frac{1}{6}$ na kalkulačce neudělal, tudíž spíše odněkud věděl, že $\frac{1}{3} = 0,3333$, ale pro $\frac{1}{6}$ hodnotu ještě neznal.

5. ročník

Úloha:

Znázorni na každém ze čtyř různých modelů a vypočítej $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$.



Komentář pro učitele:

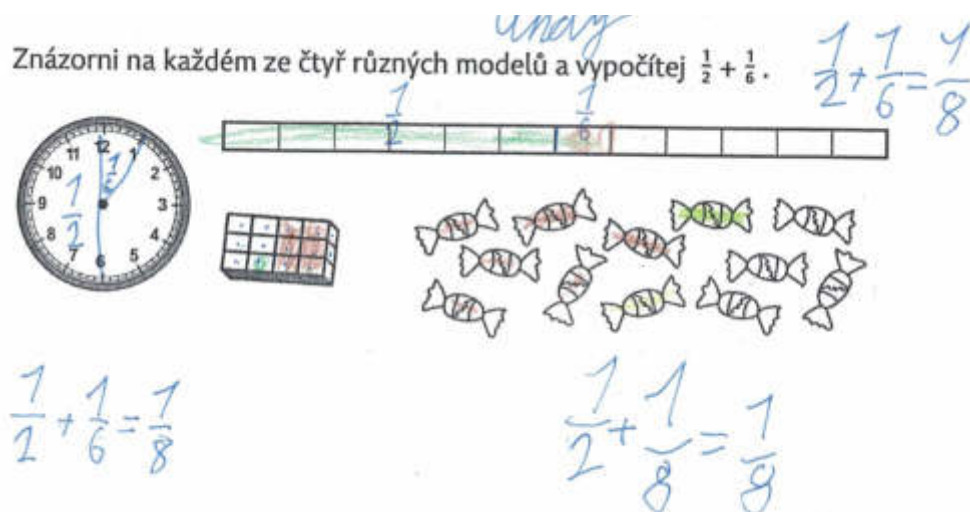
Cílem úlohy je sčítání zlomků pomocí různých modelů.

Chceme sledovat:

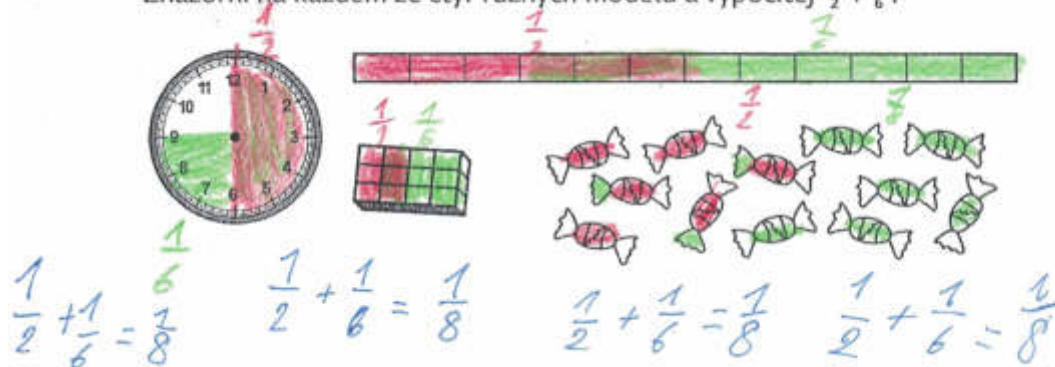
- jaké modely žáci preferují,
- zda dochází u nějakých modelů k chybám a z jakého důvodu,
- zda žáci vnímají izomorfismus výsledků (je jedno, jaký model použijeme).

Poznátky:

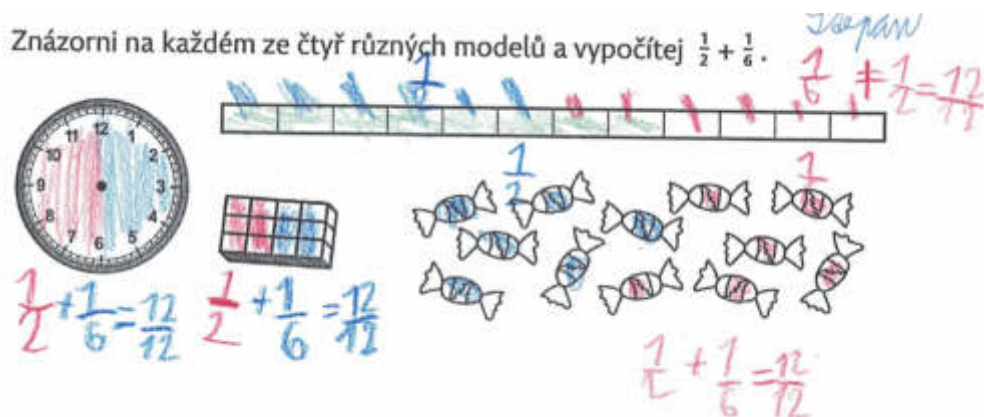
- Nebyl problém s polovinou, mnoho žáků znázornilo i šestinu, ale byl problém se správným zápisem $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$. Někteří psali $\frac{1}{8}$, jiní $\frac{2}{8}$. Mnoho žáků vědělo, že se jedná o 8 dílků, ale neuměli to zaznamenat.
- Preferovaným modelem byla tyč a čokoláda i ciferník byl poměrně častým modelem pro zahájení řešení.
- Někteří žáci zaměňovali šestinu a polovinu, jelikož se pracovalo s 12 dílky ($6 + 6 = 12$), šestina je 6 dílků.
- Zajímavé bylo, že pod pojmem „znázorni“ chápal žák numerický zápis, nikoli barevný záznam na modelu.
- Ukázky řešení:



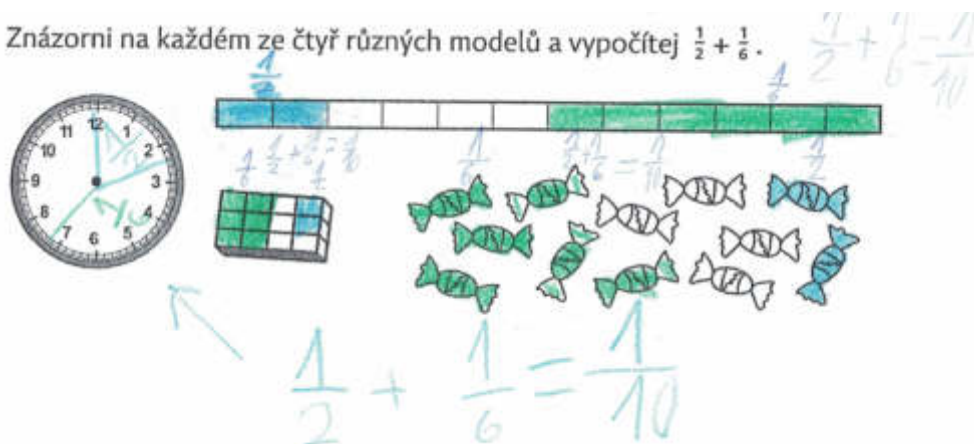
Znázorni na každém ze čtyř různých modelů a vypočítej $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$.



Znázorni na každém ze čtyř různých modelů a vypočítej $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$.



Znázorni na každém ze čtyř různých modelů a vypočítej $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$.

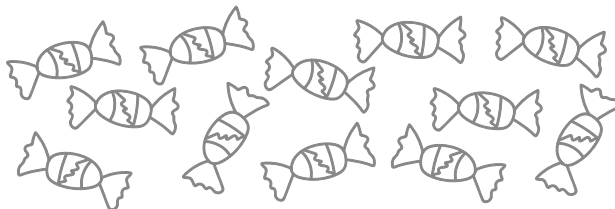
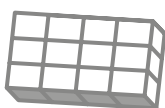
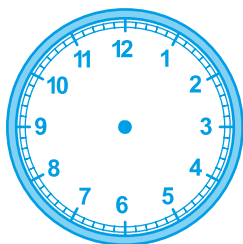


Následná diferenciaci, reedukace:

- Gradace pro slabší žáky může jít směrem k tomu, že budou sčítat kmenové zlomky se stejným jmenovatelem (třeba dvě třetiny, dvě čtvrtiny, dvě pětiny atd.). Gradace pro silnější žáky může jít směrem k náročnějším zlomkům nebo mohou sčítat více zlomků než dva.
- Náročnější mohou být také úlohy, kde je výsledek více než celek, samozřejmě i „méně hezké“ zlomky (třeba sedmina na ciferníku).
- Přípravné úlohy by mohly být určit jen polovinu a šestinu zvlášť, bez sčítání.
- Můžeme změnit čísla v zadání (protože $\frac{1}{6}$ celku = 2, $\frac{1}{2}$ celku = 6), využít jiné celky.
- Pokud úloha nečinila potíže, můžeme zadat žákům následující úlohu na odčítání.

Úloha:

Znázorni na každém ze čtyř různých modelů a vypočítej $\frac{1}{2} - \frac{1}{6}$.



Komentář pro učitele:

Cílem úlohy je odčítání zlomků pomocí různých modelů.

Chceme sledovat:

- jaké modely žáci preferují,
- zda dochází u nějakých modelů k chybám a z jakého důvodu,
- zda žáci vnímají izomorfismus výsledků (je jedno, jaký model použijeme).

Poznátky:

- Někdo využil zkušenosti z předchozí úlohy, např. u $\frac{1}{2}$ tyče věděl, že je to 6 obdélníčků. Následně spočítali, že $\frac{1}{6}$ jsou 2 obdélníčky, smazali z 6 obdélníčků 2 obdélníčky, výsledek jsou 4 obdélníčky, což rychle z hlavy vyjádřili jako $\frac{1}{3}$.
- Objevilo se také přidání kruhu (místo ciferníku, nejspíš žáka rušila čísla).
- Jiný žák u tyče bere $\frac{1}{6}$ nikoli z celé tyče, ale z její poloviny, tedy předpokládal, že velikost části nezáleží na velikosti celku. Víme, že $\frac{1}{6}$ z 12 jsou 2, ale $\frac{1}{6}$ z 6 je 1. Výsledek tohoto žáka je chybně $\frac{5}{6}$. Ve třídě následně proběhla bohatá diskuze, k čemu se vlastně $\frac{1}{6}$ v zadání vztahuje, $\frac{1}{6}$ čeho? Učitel se ptal, zda opravdu nezáleží, z čeho část bereme. Uzavřeno žáky tím, že na celku vždycky záleží.

Úloha:

Na modro je natřená čtvrtina tyče.

Jakou část tyče musíme ještě natřít, aby byla na modro natřená:

- a) polovina tyče,
- b) třetina tyče,
- c) dvě pětiny tyče?

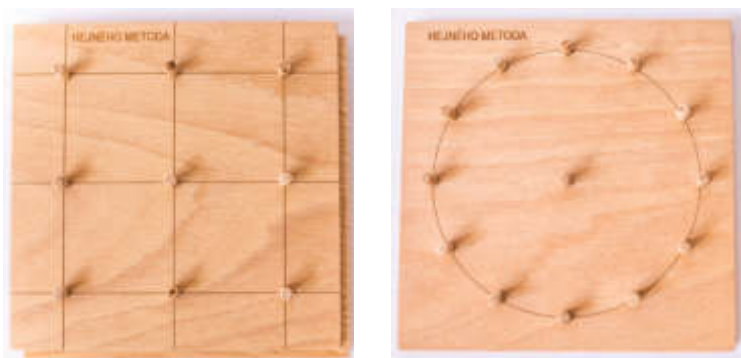
Komentář pro učitele:

Jedná se o náročnou úlohu. Obtížná je již čtenářská gramotnost (orientace v textu). Pro žáky může být náročné ji nějakým způsobem uchopit. Zde je důležité je vést k uchopení takových úloh pomocí obrázku nebo manipulace.

Chceme sledovat:

- zda žáci dokáží situaci nakreslit nebo uchopit jiným způsobem (např. modelováním s manipulativy),
- zda žáci vyřeší úlohu a) (jednodušší), ale selžou u náročnějších,
- zda žáci řeší s porozuměním, nebo ne (např. sečte oba zlomky).

GEOBOARD



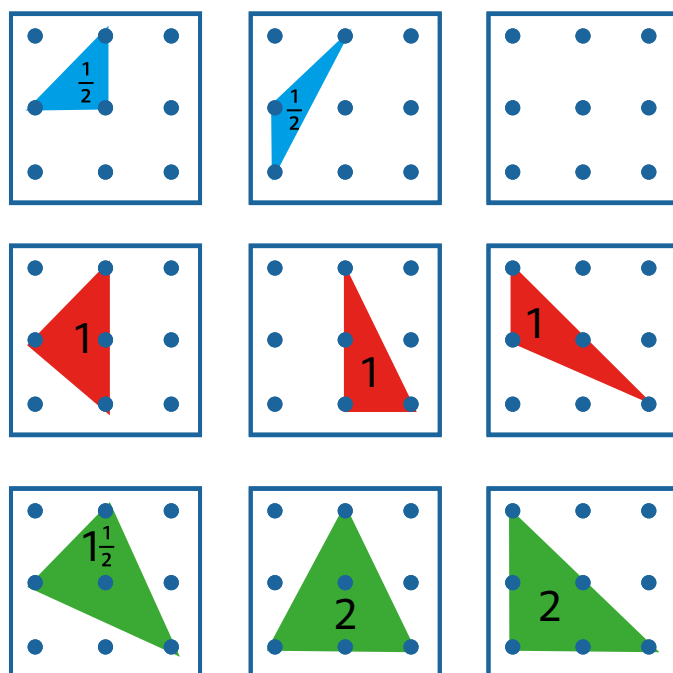
Ukázka pomůcky (lze zakoupit zde:

<https://www.h-ucebnice.cz/product/didakticke-pomucky/geoboardy/geoboard-oboustranny-3x3-cifernik---/132>)

Ukázka úlohy:

Sestav na geoboardu všechny možné trojúhelníky.
Urči jejich obsah.

Řešení úlohy:

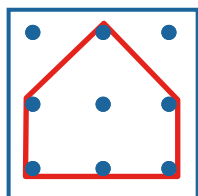


Geoboard je učební pomůcka, která slouží k **manipulativní výuce 2D geometrie**. Žáci s pomocí gumiček a desky s kolíčky tvoří nejrůznější **rovinné útvary**. Poznávají jejich vlastnosti, jako jsou například **obsah, obvod, pravé úhly, souměrnost a shodnost**. Vizualizují geometrické pojmy, jako jsou **mnohoúhelník, strana, vrchol, úhlopříčka**. Názvy pro tyto pojmy přináší do třídy učitel. Podstatné ale je, že se s těmito pojmy žáci seznamují aktivně vlastníma rukama. Ve chvíli, kdy jim učitel dá jméno, už o nich mají žáci dobrou představu a vědí tak, co pojmy znamenají. Žáci se připravují rovněž na **pozdější práci se čtvercovou mříží, pravítkem a kružítkem**. Pokud není řečeno jinak, modeluje žák obrazce vždy **pomocí jedné gumičky**.

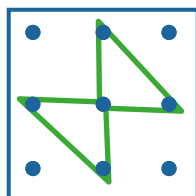
Úloha:

Pomocí jedné gumičky vytvoř na geoboardu:

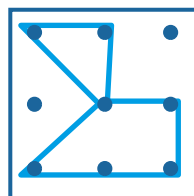
- a) jakýkoliv obrázek,
- b) obrázek podle předlohy.



domeček



mašle

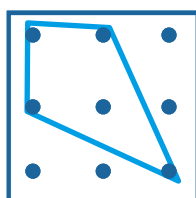
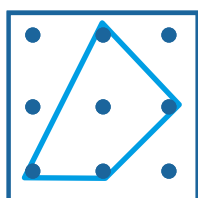
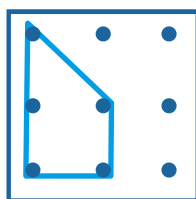
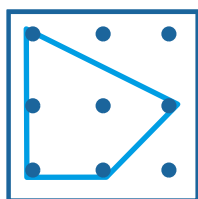


robot

Úloha:

Pomocí pomoci jedné gumičky vytvoř na geoboardu:

- a) jakýkoliv obrazec,
- b) obrazec podle předlohy.



Komentář pro učitele:

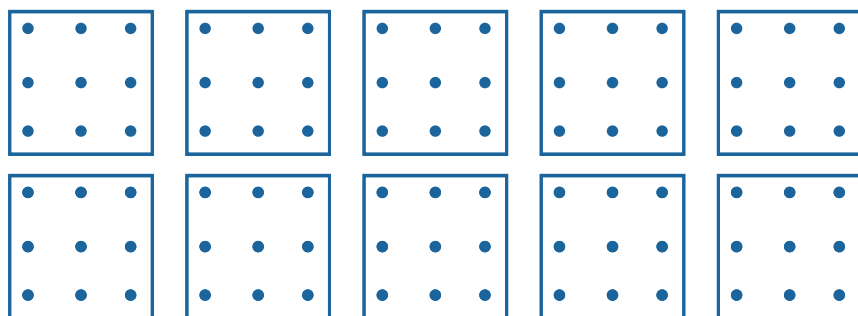
Úvodní aktivity s geoboardem mají charakter **hry**. Žáci tvoří volně nebo podle zadané předlohy. Dá se očekávat, že žáci nejprve budou preferovat tvorbu vázanou na sémantiku (domeček, hvězda, mašle,...). Později začnou tvořit trojúhelníky, čtyřúhelníky apod. a tyto útvary budou pojmenovávat a pracovat s nimi.

Výzva a) v obou úlohách výše je diagnostická. Učitel může pozorovat, jak složité útvary žák vytváří, a diagnostikovat tak pokročilost geometrického poznání a vnímání. Lze kupříkladu sledovat, zda některý žák bude sám od sebe tvořit i mnohoúhelníky s větším počtem vrcholů (např. šestiúhelníky a sedmiúhelníky), zda bude žák tvořit útvary nekonvexní nebo zda zůstane u útvarů jednodušších. Výzva b) se v obou úlohách mírně liší. V obou případech je sice úkolem žáků vytvořit na geoboardu útvar dle obrázkové předlohy, ale rozdíl je v tom, že útvary v první úloze jsou spíše sémantické (evokují věci z reálného světa), ale útvary v druhé úloze jsou geometrické (různé čtyřúhelníky). To ale ještě neznamená, že napodobit útvary geometrické je náročnější.

Tvorba geometrického útvaru (čtverec, obdélník, trojúhelník, pětiúhelník, mnohoúhelník)

Úloha:

Pomocí gumičky vytvoř na geoboardu čtverec a překresli ho do šablony.



Komentář pro učitele:

Geometrický útvar chápeme jako obecný pojem pro prostor libovolné dimenze. V rovině je synonymem pojem „obrazec“. Úlohy jsou připraveny pro geoboardy 3×3 . Pokud žáci řeší na větším, pak doporučujeme modifikovat úlohy typu „najdi všechna řešení“.

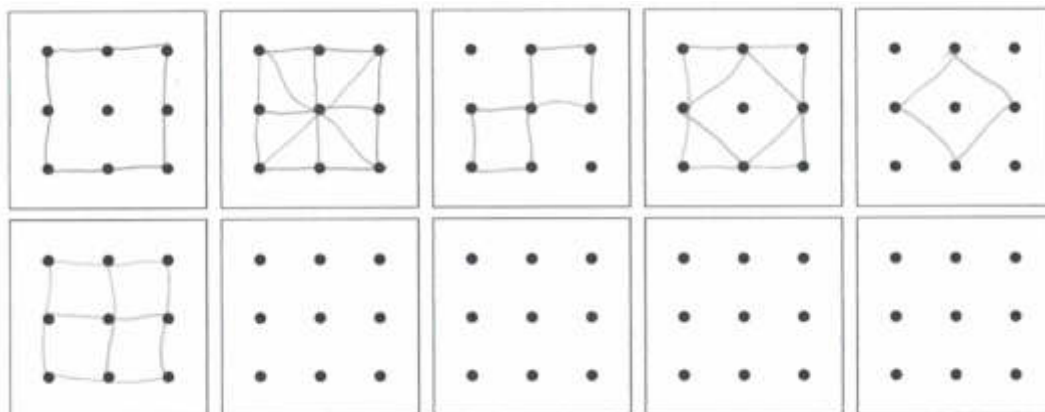
Současné výzkumy ukazují, že žáci, kteří řeší geometrické konstrukce pomocí pravítka a kružítka, vidí do geometrie lépe než ti, kteří je řeší pomocí počítače, např. GeoGebra. To potvrzuje názory maďarského didaktika Zoltána Dienese (1960), že porozumění geometrii začíná prací rukou. Začínáme manipulací na geoboardu, pak se přes čtvercovou mříž dostaneme na nelinkovaný papír. Vzhledem k tomu je propojení geoboardu a mříže pro žáky velmi důležité – začínají na geoboardu, pak v delším časovém období potřebují úlohy, kdy současně stejnou úlohu řeší na geoboardu a v mříži (např. sestav na geoboardu a přerýsuj do mříže), nakonec pracují pouze v mříži. Někdo opouští geoboard dříve, jiný jej potřebuje pro řešení konstrukčních úloh v mříži déle.

Chceme sledovat:

- zda žák vytvoří čtverec,
- který čtverec z několika možných vytvoří,
- zda bude mít žák snahu hledat další čtverce, aniž ho úloha k tomu vybízí,
- zda bude mít žák snahu najít všechny různé čtverce, aniž ho úloha k tomu vybízí.

Poznátky:

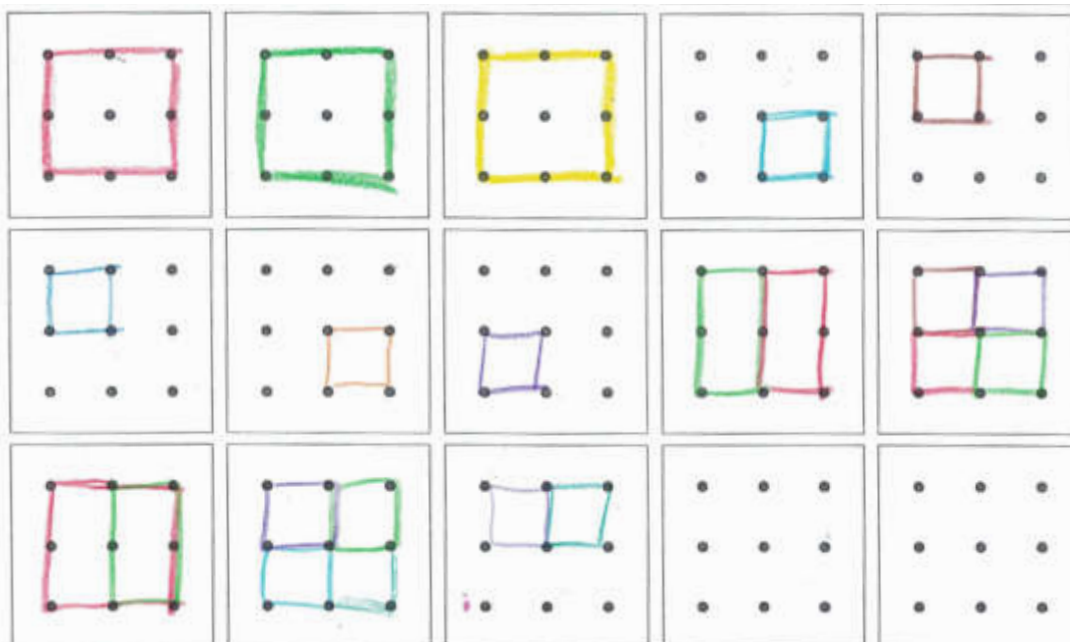
- Žáci nejprve libovolně manipulovali (seznamovali se) s geoboardem, poté dostali za úkol vytvořit na něm čtverec.
- Nejvíce žáků objevilo jako první buď největší, nebo nejmenší čtverec.
- Někteří žáci v prvním a druhém ročníku měli tendence používat více gumiček, což zapříčinilo následující řešení:



- Žáci měli potřebu hledat další čtverce.
- Někteří žáci 1. ročníků si nebyli jisti pojmem čtverec, spolužáci jim tedy vysvětlili, jaké vlastnosti má čtverec.
- Žáci měli tendenci využívat k modelování co nejvíce gumiček, tím pádem hledali mnoho „různých řešení“, kdy se řídili často tím, že čtverec je obvod a uvnitř čtverec dělili. Často modelovali různé čtverce do jednoho geoboardu, např.:

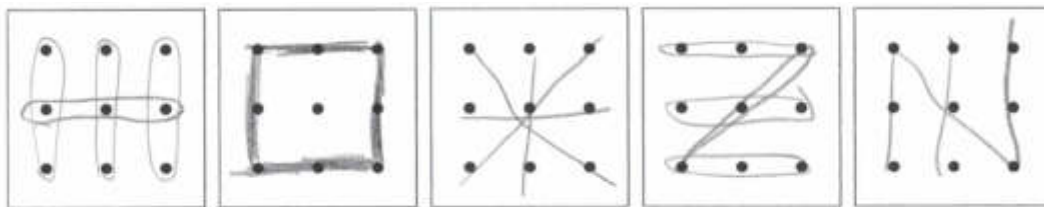


- Někteří žáci 1. a 2. ročníků byli silně ovlivněni barvou gumiček, se kterými pracovali, a tyto barvy přenášeli i do svých šablon při překreslování:



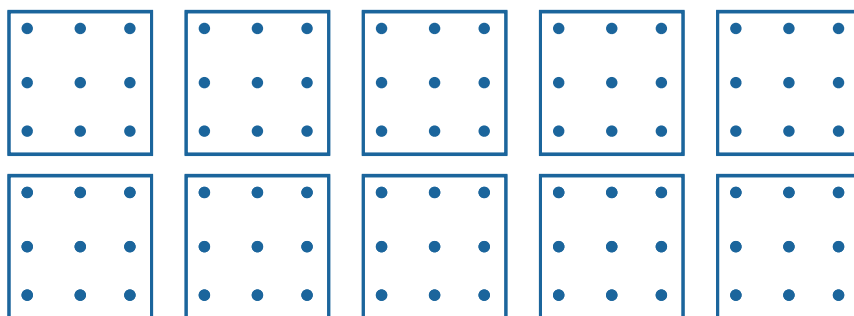
V tomto řešení je zároveň patrné, že odlišná barva čtverce a odlišná pozice na geoboardu znamená pro žáka zcela jiný čtverec.

- U několika žáků 1. ročníku se objevila potřeba modelovat a zakreslovat i jiné útvary, což si vysvětlujeme silným zaujetím pomůckou a motivací tvořit:



Úloha:

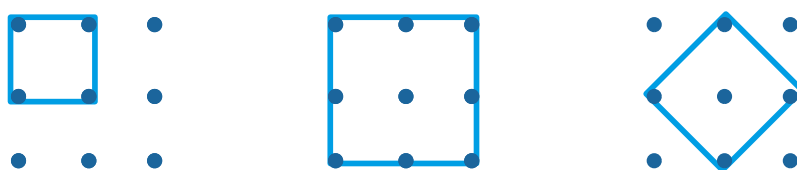
Pomocí gumičky vytvoř co nejvíce různých čtverců a překresli je do šablony.



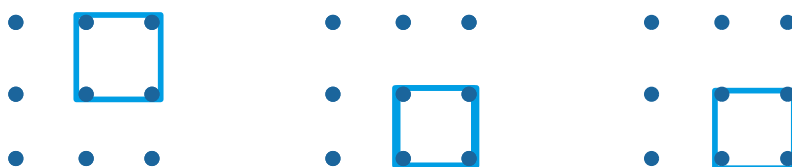
Komentář pro učitele:

Je důležité, aby žák překresloval hned poté, co čtverec najde, tj. první čtverec, překreslit, druhý čtverec, překreslit atd. kvůli evidenci strategie. Žáci jsou vyzýváni k tomu, aby dokázali, že sestrojený útvar je čtverec. Nacházejí různé argumenty, v nižších ročnících zřejmě otáčejí desku, překreslí do šablony a otočí šablonu, vystřihnou z mříže. Později argumentují vlastnostmi čtverce (stejně dlouhé strany a všechny úhly pravé, ovšem pracovat s úhly může být obtížné, úhlopříčky se půlí a jsou kolmé). Často třída nedojde ke shodě. Není tedy cílem učitele žáky ke shodě v tuto chvíli dovést. U mnohých žáků může tento proces trvat delší dobu, protože potřebují získat více zkušeností s faktem, že otočení útvaru ho nijak nemění.

Řešení:



Otázkou bude, zda žák chápe stejný útvar na různém místě jako různá řešení, viz následující ukázka:



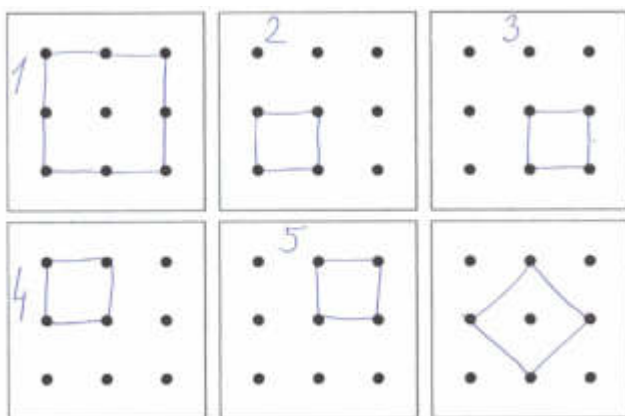
Pokud by byl čtverec zobrazen v rovině, pak se jedná o různé (shodné) čtverce – nemají stejné body, ale existuje mezi nimi shodné zobrazení (čtverce mohou posunutím nebo otočením přemístit na sebe). Tedy opravdu by všechna tato řešení mohla být chápána jako různá. Pro potřeby 1. stupně se nabízí učinit s žáky dohodu, že budeme evidovat pouze jednoho zástupce za všechny shodné útvary (tj. stejný tvar a velikost a nezáleží na umístění) z důvodu menšího množství různých řešení.

Chceme sledovat:

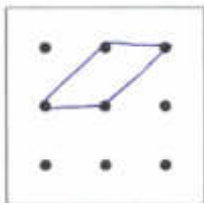
- který čtverec najde žák jako první,
- zda někdo najde třetí čtverec z našeho řešení a kolik takových žáků bude,
- zda se předá poznatek o třetím čtverci žákům, kteří jej sami nenašli, nebo tito žáci toto řešení vůbec nepřipustí,
- proč žáci třetí čtverec odmítají a jaký argument (jiných žáků) je přesvědčí,
- zda žák tvrdí, že existují i další řešení (nejsou to čtverce, ale žák je jako čtverce vidí), a jak to argumentuje,
- zda žák vidí nějaké „odlišnosti“ a „stejnosti“ u jednotlivých řešení (směřujeme k obsahu čtverce).

Poznátky:

- Nejvíce žáků objevilo jako první buď největší, nebo nejmenší čtverec. Téměř všichni žáci našli všechny 3 různé čtverce (i v 1. ročnících). U žáků vyšších ročníků se třetí čtverec z našeho řešení objevoval na prvním místě s argumentací snahy o „jiné“ řešení, než budou mít ostatní ve třídě.
- Žáci 1. i 2. ročníků často diskutovali třetí čtverec z našeho řešení (orientovaný na jeden vrchol). Objevovaly se názory, že se jedná o kosočtverec. Jako účinná argumentace fungova-lo reálné otáčení geoboardu.
- Objevila se silná vázanost na umístění čtverce na geoboardu při zachování jeho velikosti. V následujícím řešení vnímá žák čtverce 2, 3, 4 a 5 jako různé:



- Ve více třídách vznikla diskuze ohledně „stejnosti“ malých čtverců. Jeden žák druhého ročníku tvrdil, že možná řešení jsou 3. S tímto tvrzením ostatní nesouhlasili. Argumentace dotyčného žáka probíhala způsobem, kdy postavil spolužáka na různá místa ve třídě a řekl mu, že i když stojí na různých místech, je to pořád on. To stejné platí u čtverce na geoboardu. Podobné spory se objevovaly i ve vyšších ročnících.
- Zajímavá byla situace ohledně následujícího řešení:



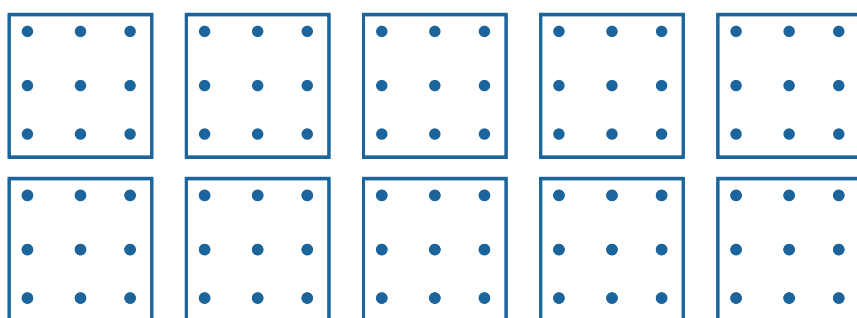
Autor tento čtverec pojmenuje jako „natažený čtverec“. Třída začala diskutovat, zda spíš nejde o kosočtverec a jestli je to vůbec čtverec. Jako argument, že to není čtverec, zazní tvrzení, že dvě strany jsou sice stejně dlouhé a další dvě protilehlé také, ale jsou delší.

Následná diferenciacie, reedukace:

- Pokud žáci nevnímají čtverec orientovaný na jednom vrcholu jako čtverec (6. obr. výše), ukázala se jako efektivní reedukace manipulace s geoboardem a jeho otáčení. Další možností je vystřihnout čtverec a s ním reálně otáčet.
- Při situaci, kdy žáci stejně velký čtverec v jiné pozici na geoboardu vnímají jako jiný čtverec, funguje dobře sémantizace (např. vezmu nůžky, a i když je různě otáčím, pořád jsou to stejné nůžky) nebo přemísťování žáka po třídě, otáčení žákem na podlaze apod. Další možností je překreslování do šablony a její otáčení, vystřihnutí a otáčení s daným útvarem.

Úloha:

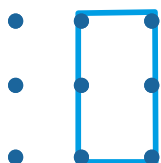
Pomocí gumičky vytvoř co nejvíce různých obdélníků a překresli je do šablony.



Komentář pro učitele:

Je důležité, aby žák překresloval hned poté, co obdélník najde, tj. první obdélník, překreslit, druhý obdélník, překreslit atd., kvůli evidenci strategie.

Řešení:



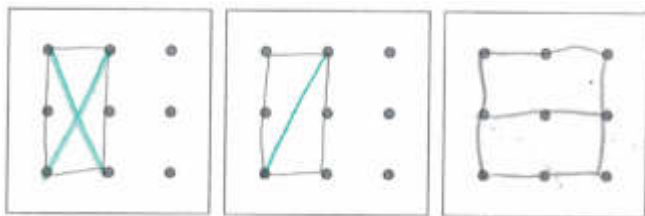
Chceme sledovat:

- zda žák najde i další obdélníky (viz předchozí úloha, mohla by existovat 4 různá řešení),
- zda žák tvrdí, že existují i další řešení (nejsou to obdélníky, ale žák je jako obdélníky vidí, viz předchozí úloha),
- zda žáci vidí nějaké „odlišnosti“ a „stejnosti“ u jednotlivých řešení (směřujeme k obsahu obdélníku).

Pozn.: Někdy je čtverec považován za speciální případ obdélníku, záleží na konvenci. Na úrovni ZŠ oba útvary rozlišujeme.

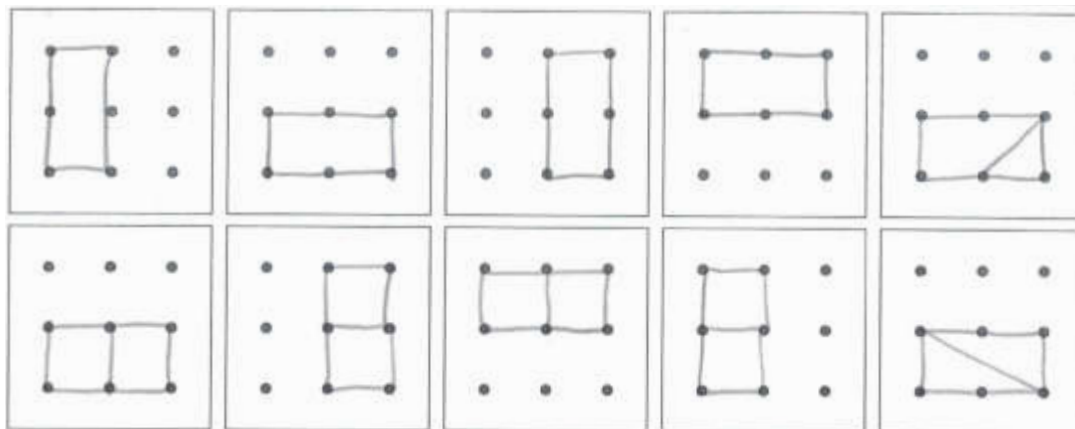
Poznátky:

- Žáci mají zkušenosti z předchozí realizace, méně často vnitřně segmentovali útvary.
- Přesto se objevuje obdélník, který je uvnitř dělený (opět pravděpodobně pro ozvláštnění nebo jako snaha o nalezení více řešení):

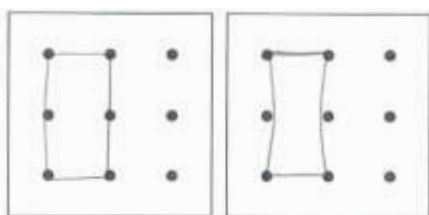


Tento útvar většina žáků nepřijala s argumentem, že se jedná o čtverec. Někdo upřesnil, že hlavně z dálky by to mohlo vypadat jako čtverec.

- Další ukázka řešení prezentuje situaci, kdy žák učiteli dobře ukázal všechny obdélníky (objel jejich obvodovou linii na papíře prstem), nicméně chtěl svá řešení „udělat zajímavější“ a řekl: „Skládal jsem obdélníky i z jiných útvarů.“

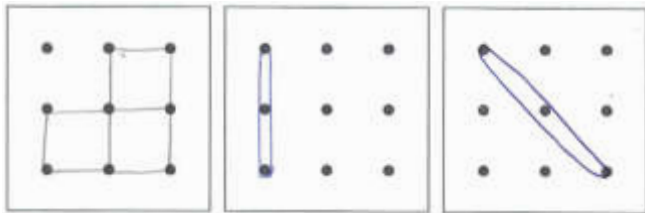


- Někteří žáci našli mnoho řešení, jelikož posouvali obdélník po geoboardu a zaznamenávali ho v různých polohách. V jiných třídách si žáci naopak pamatovali na dohodu ze čtverců a různou polohu obdélníků nevnímali jako jiná řešení. Zakreslili tedy pouze jedno řešení. Argument žáka z 2. ročníku: „Pokud vymodeluji obdélník a pak tím geoboarem otáčím, dostává se obdélník do různých poloh a je vždycky stejný.“
- Mezi řešeními se také objevila i taková, kdy žáci našli dvě polohy obdélníku, a to horizontální a vertikální. Další nehledali, s tímto řešením byli spokojeni.
- U některých žáků nastal moment překvapení ve chvíli, kdy zjistili, že úloha má jedno řešení.
- Diskuzi mezi žáky vyvolalo následující řešení:



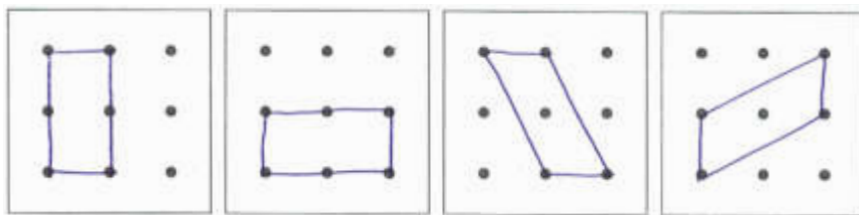
Druhý obdélník vnímá žák jako „užší“, gumička je vedena vnitřně. Tuto situaci je důležité ve třídě komunikovat a domluvit se na pravidle, že gumičku vedeme zvnějšku. Vidíme zde jistou nedokonalost pomůcky (každá pomůcka je nedokonalá a nepřesná), což by mělo vést k tomu, že sémantika je jen oporou pro abstraktní poznání, které je dokonalé v představách. Vždy když budeme modelovat nějaký útvar, bude nedokonalý. Je jedno, zda to bude gumičkou, nebo jej narýsujeme tužkou. Je to pouze opora pro dokonalou představu pojmu v naší mysli.

- Další zajímavá ukázka je zde:



I tyto případy označuje žák za obdélníky. U druhé a třetí situace spatřujeme limit pomůcky, který je dán průměrem dřevěného kolíku. Obtočená gumička může v některých žácích vyvolat dojem, že přímka (úsečka) je vlastně obdélník. S žáky je dobré vést diskuzi a v případě potřeby situace překreslit na papír (žáci spojují jednotlivé kolíky). Tam se problém vyjasní.

- Řešení, kde žák vnímá kosodélník jako obdélník:



Vždy je důležité sdílení se spolužáky. V každé třídě se najde někdo, kdo má o obdélníku představu správnou.

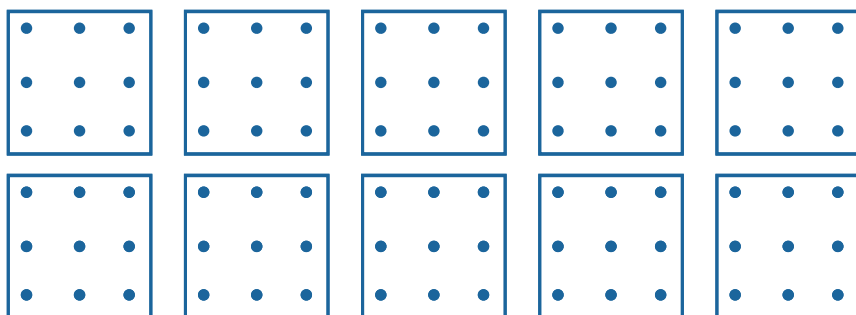
Podobná situace se stává při záměně čtverce a kosočtverce. Až žáci poznají vlastnosti těchto útvarů, nejasnost se rozplyne. Může pomoci i překreslení situace na papír a diskuze o pravých úhlech. Vždy záleží na zkušenostech třídy, zda se už žáci setkali s vlastnostmi útvarů a do jaké hloubky. Učitel může vystavit útvary na nástěnce a nechat je jako výzvu, postupně se vlastnostem útvarů věnovat a vracet se průběžně k zadání na nástěnce.

Následná diferenciacce, reedukace:

- Při situaci, kdy žáci obdélník v jiné poloze na geoboardu vnímají jako jiné řešení, funguje dobře sémantizace (např. vezmu nůžky, a i když je různě otáčím, pořád jsou to stejné nůžky) nebo přemísťování žáka po třídě, otáčení žákem na podlaze apod. Další možností je překreslování útvaru do šablony a její otáčení, vystřihnutí a otáčení s daným útvarem.

Úloha:

Pomocí gumičky vytvoř co nejvíce různých trojúhelníků a překresli je do šablony. Jsou všechny trojúhelníky stejně velké? Mají některé trojúhelníky alespoň dvě stejně dlouhé strany?

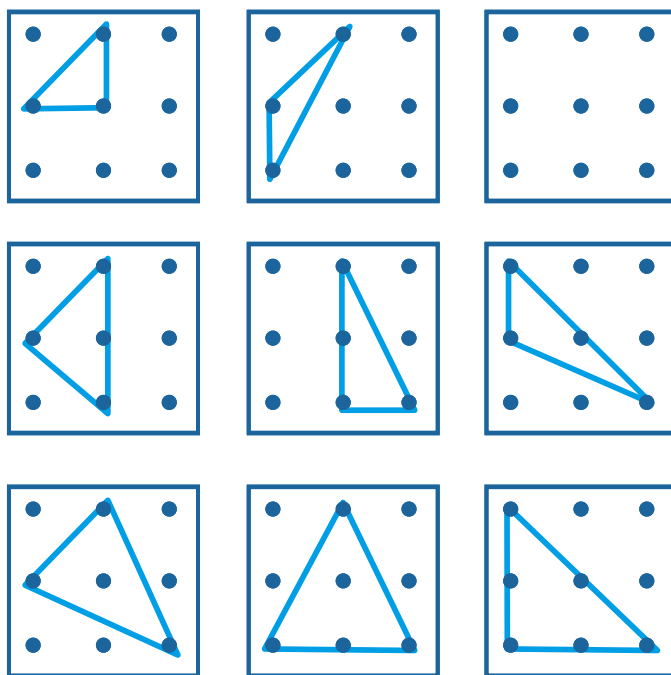


Komentář pro učitele:

Je důležité, aby žák překresloval hned poté, co trojúhelník najde, tj. první trojúhelník, překreslit, druhý trojúhelník, překreslit atd., kvůli evidenci strategie. Je zde obtížnější argumentace než u čtverců, protože desku nestačí „pootočit“, abychom se z jedné polohy dostali do druhé. Učitel může dobře diagnostikovat, zda to činí žákům potíže.

Úskalí záznamu do šablony je v tom, že jednak šablona má jinou velikost než reálná pomůcka, tudíž žáci musí pracovat také se změnou měřítka (zmenšují), zároveň pomůcka více navádí na možnost otáčení. Reálný geoboard má také podkreslenou mříž, to v šabloně není. Pro některé žáky je úskalí v přenosu reálného modelu do šablony nebo do mříže.

Řešení:



Chceme sledovat:

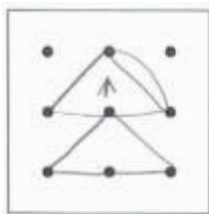
- v jakém pořadí žák trojúhelníky najde,
- které trojúhelníky žák nenajde a které nenajde nikdo ze třídy,
- když někdo ve třídě objeví nový trojúhelník, zda je žák ochoten připustit správnost řešení (předpokládáme, že ano, že nevznikne problém „kosočtverce“ u čtverce),
- zda žák najde i další trojúhelníky (navzájem shodné, viz problém u čtverců, tj. shodné trojúhelníky v jiném umístění),
- zda nastane situace, kdy žáci dohodu u čtverců ohledně polohy na geoboardu nebudou akceptovat u trojúhelníků a proč,
- zda žák tvrdí, že existují i další řešení (nejsou to trojúhelníky, ale žák je jako trojúhelníky vidí), a jak to argumentuje (např. že je „uvnitř“ trojúhelník),
- zda žák vidí nějaké „odlišnosti“ a „stejnosti“ u jednotlivých řešení (směřujeme ke klasifikaci trojúhelníků podle stran, zde rovnoramenné a nerovnoramenné, podle vnitřních úhlů, zde ostroúhlé, pravoúhlé, tupoúhlé, a obsahu trojúhelníku).

Poznátky:

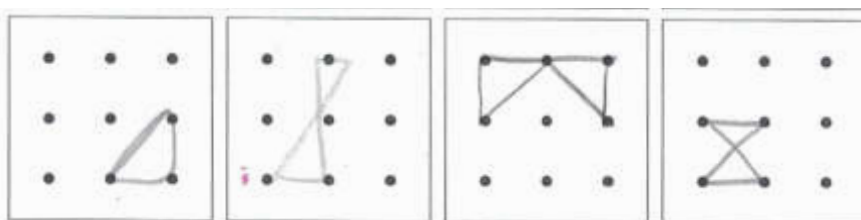
- Někteří žáci 1. a 2. ročníku stále označovali otočené trojúhelníky (se zachováním délek stran, tedy shodné) za jiná řešení. Někteří žáci argumentují, že je to stejný trojúhelník, ale různě orientovaný.

Někteří žáci jsou schopni říct, že trojúhelníky jsou sice tvarem stejné, ale tím, že jsou jinak orientované, už si nejsou jisti jejich shodností.

- V následujícím řešení žák argumentuje shodnost trojúhelníků. Se shodností měli žáci obecně potíže. Argumentovali, že geoboardem nejde otáčet v případě, kdy se jedná o posunutí téhož trojúhelníku. Tento žák ale tvrdil, že kdyby se trojúhelník vymodeloval jinde, daly by se na sebe oba položit. Nakonec žáci přijali argument, že by se trojúhelníky daly i vystřihnout a překrývat.

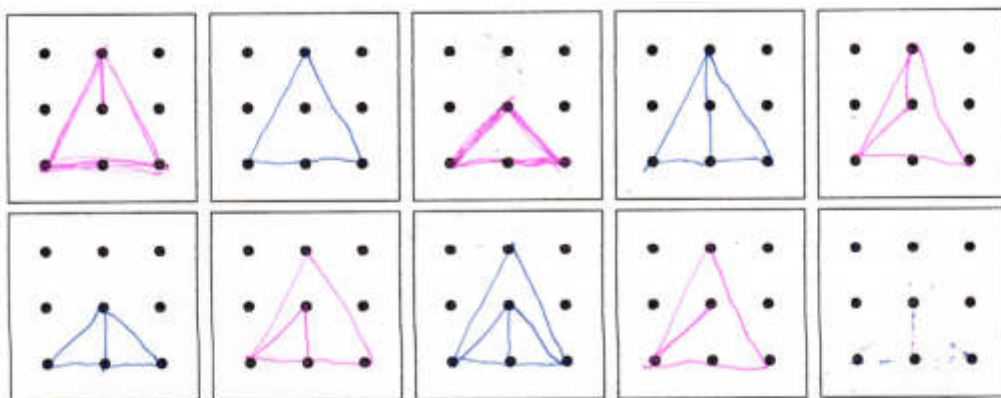


- Druhý a pátý trojúhelník z našeho řešení se objevovaly nejméně často napříč ročníky.
- Někteří žáci tvořili pomocí jedné gumičky více trojúhelníků, tím vznikly takovéto mašličky:

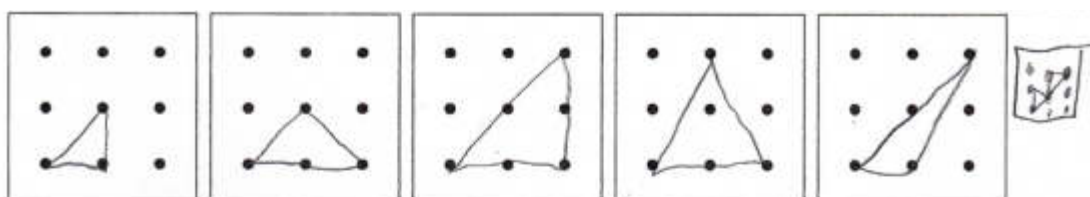


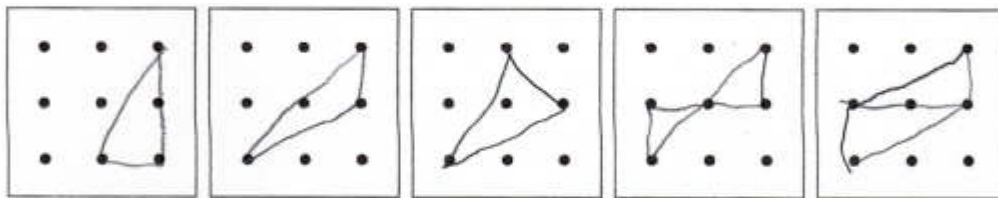
Reedukace není na místě, jedná se vlastně o hezké řešení. Není zde kognitivní chyba, pouze řešení nevyhovuje konvenci, kdy jednou gumičkou tvoříme vždy jeden útvar. Pokud nechceme taková řešení, konvence je nutná a musíme ji zavést. U druhé situace zleva je viditelná nepřesnost, vizuálně tam dva trojúhelníky vidíme, ale na geoboardu nepůjdou vytvořit. Můžeme doplnit, že za vrchol považujeme gumičku obtočenou kolem dřevěného kolíku. V posledním řešení vidíme vrcholy mimo kolíky. Požádáme žáka, aby tyto situace vymodeloval.

- V následujícím řešení žák různost svých trojúhelníků prezentuje zachycováním gumičky o další kolíky:

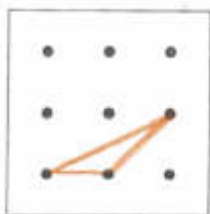


- Další řešení dokladuje pořadí nalezených trojúhelníků a také motivaci objevovat ještě řešení „navíc“ (dokreslení i vlastní šablony):





- Někteří žáci chybovali v zápisu poloviny, evidovali ji jako 1,5. Tato chyba může mít příčinu v tom, že si řekli jedna polovina a napsali tedy 1 (jedna) a ,5 (polovina).
- Několikrát se objevil obsah 1 u následujícího trojúhelníku:

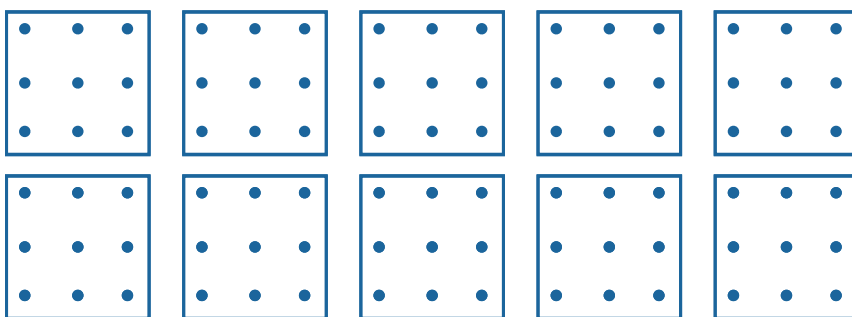


Vzniklo to tak, že žáci porovnávali tento trojúhelník s pravoúhlým trojúhelníkem s obsahem polovina, a protože je tento více protáhlý a zabírá více vzdálenosti do šířky, tak se jim zdál obsahem větší.

- Někteří žáci pod termínem obsah rozumí počet vnitřních mřížových bodů.

Úloha:

- Pomocí gumičky vytvoř trojúhelník, který má dvě strany stejně dlouhé, a zakresli ho do šablony.
- Pomocí gumičky vytvoř co nejvíce různých trojúhelníků, které mají dvě strany stejně dlouhé, a zakresli je do šablony.
- Pomocí gumičky vytvoř co nejvíce různých trojúhelníků, které mají všechny strany stejně dlouhé, a zakresli je do šablony.



Komentář pro učitele:

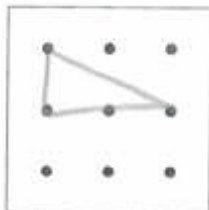
Je zajímavé identifikovat, jak se mění přístup žáků k úlohám, které nemají řešení s výškou ročníku. Předpokládáme, že v nižším ročníku žákovi tyto úlohy vadí, kdežto ve vyšším již méně či vůbec (stejně tak úlohy s větším počtem řešení, které požadují najít více/všechna řešení).

Chceme sledovat:

- jak žák určuje/porovnává délku stran trojúhelníku na geoboardu (v šabloně) a zda k tomu využívá vlastností trojúhelníků, nebo měří,
- jak si žák poradí s úlohou, která nemá řešení. (Bylo by zajímavé identifikovat, jak se jejich přístup mění s výškou ročníku. Předpokládáme, že v nižším ročníku žákovi úlohy, které nemají řešení, vadí, kdežto ve vyšším ne. Stejně tak úlohy s větším počtem řešení, které požadují najít více/všetchna řešení.)

Poznatky:

- Často se napříč ročníky objevilo to, že žáci evidovali do šablony pravoúhlý trojúhelník a vnímali stejnou délku u přepony i odvěsny, viz obrázek:



- V některých třídách se objevilo měření pomocí provázku nebo pomocí proužku papíru.
- Uvádíme skript, který zachycuje diskuzi ve třídě k řešení této úlohy:

PU: „Jak to můžu dokázat, že ty dvě strany jsou stejně dlouhé?“

Žák: „Že si to změříme?“

Julie: „Vidím to. A tadyta je kratší a ty dvě jsou delší a ty dvě budou nejspíš pasovat k sobě. A když budou pasovat k sobě, tak to bude reálnější.“

PU: „Co to znamená budou pasovat k sobě?“

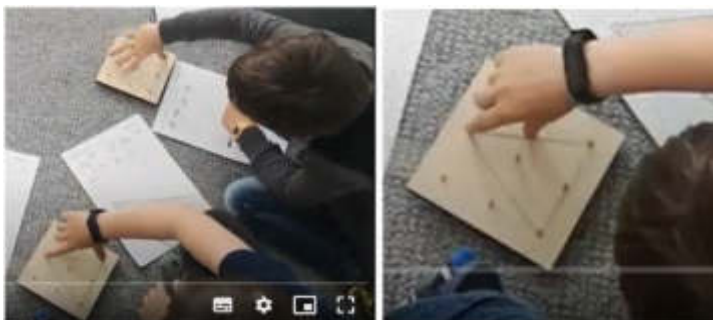
Žák: „Že budou u sebe.“

PU: „Mě by zajímalo, jak poznám, že ty dvě strany jsou stejně dlouhé. Někdo to změřil podle pravítka. A šlo by to taky nějak bez pravítka?“

Žák: „Prsty.“

PU: „Jak prsty?“

Žák: „Jako píd', pídě.“



PU: „Ještě je nějaký nápad, jak to porovnat – ty dvě strany?“

Žák: „Ještě na kolíčky (bere vzdálenost mezi prsty – jako vzdálenost do kružítka a přenášení). Dám ten prst na kolíček, ve kterém je dlouhej, a jsou ty strany stejně dlouhé.“



PU: „Michale, jakou máš taktiku, jak zjistíš, že ty strany jsou stejně dlouhé?“

Michal: „Tadyten... nevím, jak to vysvětlit... stejná vzdálenost.“

PU: „Stejná vzdálenost. A odkud kam?“

Michal: „Tadyty dvě zbydou.“ (ukazuje na kolíky mimo trojúhelník, potom přendává gumičku na dva další kolíky, vzniká pětiúhelník)



PU: „Rozumíte Michalovi, co říká?“

Více hlasů: „Myslím že jo! Jo!“

PU: „Luky, řekl bys, jak to Michal myslel, jak to myslel s tou vzdáleností?“

Luky: „Ten zbytek, ten zbytek tady není. Michale?“

Michal: „Je stejnej.“

Ostatní: „Jo!! No právě.“

PU: „Barney, ukaž nám, které dvě strany jsou stejné, které jsou shodné.“



Barney: „Jsou stejně dlouhé tyhlecty dvě.“ (ukazuje stranu přes 3 kolíky a stranu úhlopříčku obdélníku)

Luky: „Já bych s tím nesouhlasil.“

PU: „Luky, proč nesouhlasíš?“

Luky: „Já si to změřil podle těch prstů a i tak. Já nevím, jak to říct.“

Michal: „S prstama to moc nejde, protože s tím můžeš hýbat.“

PU: „Jako že to není přesný, myslíš, že neudržíš tu vzdálenost?“

Žák: „Jo, to se u mě stalo.“

PU: „Stává se to?“

Více hlasů: „Jo.“

PU: „A na co jsi přišel podle pravítka?“

Luky: „Tady je 100 mm a tady myslím 113 mm.“

Michal: „Jak byl ten čtverec, tak mám další strategii. Když je to obdélník, tak už to neplatí, nejsou stejně strany.“

PU: „Nejsou stejně dlouhé ty strany obdélníku? A co tam neplatí teda?“

Michal: „Tady je to rovný (strana obdélníku) a tady je to jiný (úhlopříčka).“

PU: „Luky to teď domodeloval ten obdélník. Takhle jsi to myslel?“



Michal: „To moc ne. Takhle je ten obdélník (z 1 gumičky). A tohle je jiná vzdálenost, než když to jde šikmo.“



PU: „Takže tím chceš říct co, že ty dvě strany nejsou stejně dlouhé?“

Michal: „Jo.“

PU: „Co si myslí Terka?“

Terka: „No, já nevím.“

PU: „Barny, proč jsi tenhle trojúhelník vymodeloval?“

Barny: „Nevím, protože se mi zdálo, že jsou stejně dlouhé, ale teď vím, že vlastně ne. Změřil jsem si to tímhle pravítkem a mám 10 a 3 cm.“

Julie: „Ne, 10, koukej.“ (domlouvají se a Barney si je měřením jistý)

PU: „A ta druhá strana?“

Barny: „A ta druhá strana jsem zjistil, že má 11,6 nebo 5.“

PU: „Takže nejsou stejně dlouhé.“

PU: „... Ale já vidím, že to jde oboje přes 3 kolíky.“

Michal: „Ale nejdelší čára ve čtverci je ta šikmá. Tyhle jsou stejně, ale tahle je nejdelší.“

PU: „Ale pozor, Julča tvrdí, že ty strany jsou všechny stejně dlouhé.“ (poměřuje prsty)

Terka: „Mně to taky vychází.“

PU: „A šlo by to nějak změřit, ale třeba jinak než tím pravítkem?“

Michal: „Jak jsem říkal, ty šikmo jsou nejdouhější, nejdelší. Takže ta strana (přepona) je kratší.“

PU: „Michal říká, že nejsou stejné, ty šikmý jsou delší.“

PU: „Jsou tam takové čárky na tom geoboardu, všimli jste si?“

Terka: „Dvě čárky to má oboje.“

Michal: „Jak se dostaneme (ukazuje prstem po čárkách od jednoho vrcholu k druhému – po obvodu) od jednoho k druhému.“

Terka: „Jo, už to chápu!“

PU: „Co to děláš to raz, dva tři?“

Terka: „Počítám. Já si to totiž počítám ty kostičky.“

Žák a Julie: „Já to pořád nechápu.“

Michal: „Jak máme ten velký čtverec a ty pidičtverce a tady je A a tady B (vrcholy trojúhelníku) a musím se dostat raz, dva, tři, tady raz, dva tři a tady raz, dva.“

PU: „A Michale, uměl bys to nějak zapsat?“

Michal: „Jo, šipkama.“

PU: „Super! A mohl bys to ukázat?“

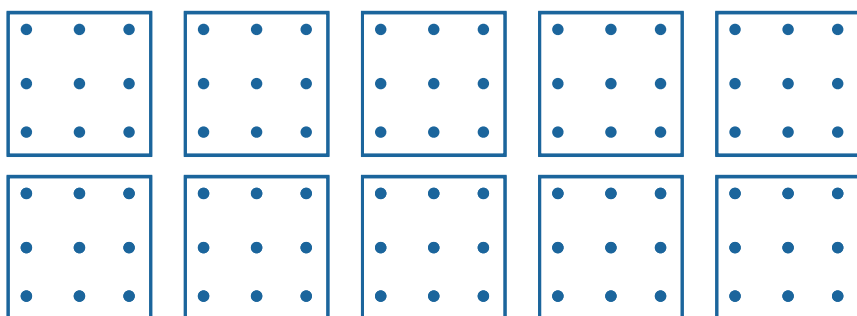


PU: „A co jsi tím dokázal? A když jsou tam jen dvě?“

Michal: „Že je kratší.“

Úloha:

Vytvoř na geoboardu co nejvíce různých pětiúhelníků a překresli je do šablony.



Komentář pro učitele:

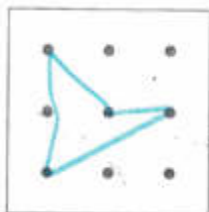
Pro evidenci nalezených řešení dobře poslouží geoboardová šablona. Je důležité, aby žák vždy hned zaznamenal pětiúhelník do šablony a teprve následně modeloval další. Nakonec má žák přehled všech nalezených pětiúhelníků.

Chceme sledovat:

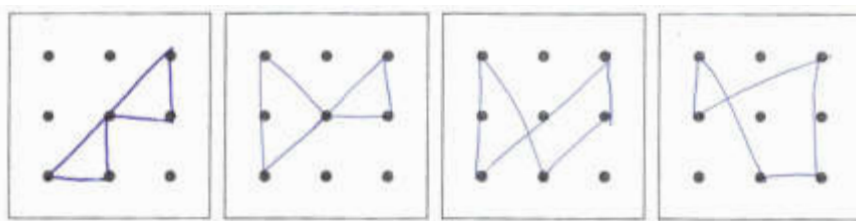
- zda žák najde nekonvexní pětiúhelníky,
- v jakém pořadí žák pětiúhelníky najde,
- které pětiúhelníky žák nenajde a které nenajde nikdo ze třídy,
- když někdo ve třídě objeví nový, zda je žák ochoten připustit správnost řešení (např. u nekonvexního pětiúhelníku),
- zda žák najde i další pětiúhelníky (navzájem shodné),
- zda žák tvrdí, že existují i další řešení (nejsou to pětiúhelníky, ale žák je jako pětiúhelníky vidí) a jak to argumentuje.

Poznatky:

- Před samotnou realizací žáci na geoboardu vytvářeli různé obrazce a zkoušeli je pojmenovávat, tím si připomněli některé mnohoúhelníky.
- Žáci často neznali pojem pětiúhelník a mnohoúhelník, protože se s ním doposud nesetkali. Učitelé se je snažili navést na počet úhlů skrze počet vrcholů. Objevovale se ovšem nesrovnalost ve chvíli, kdy žák podvlékl gumičku místo vně kolíku vnitřní částí, a vznikl viditelný vrchol, ač zde žádný nebyl. Při následném překreslení z geoboardu na šablonu se tento dojem vrcholu ještě umocnil, viz následující ukázka:

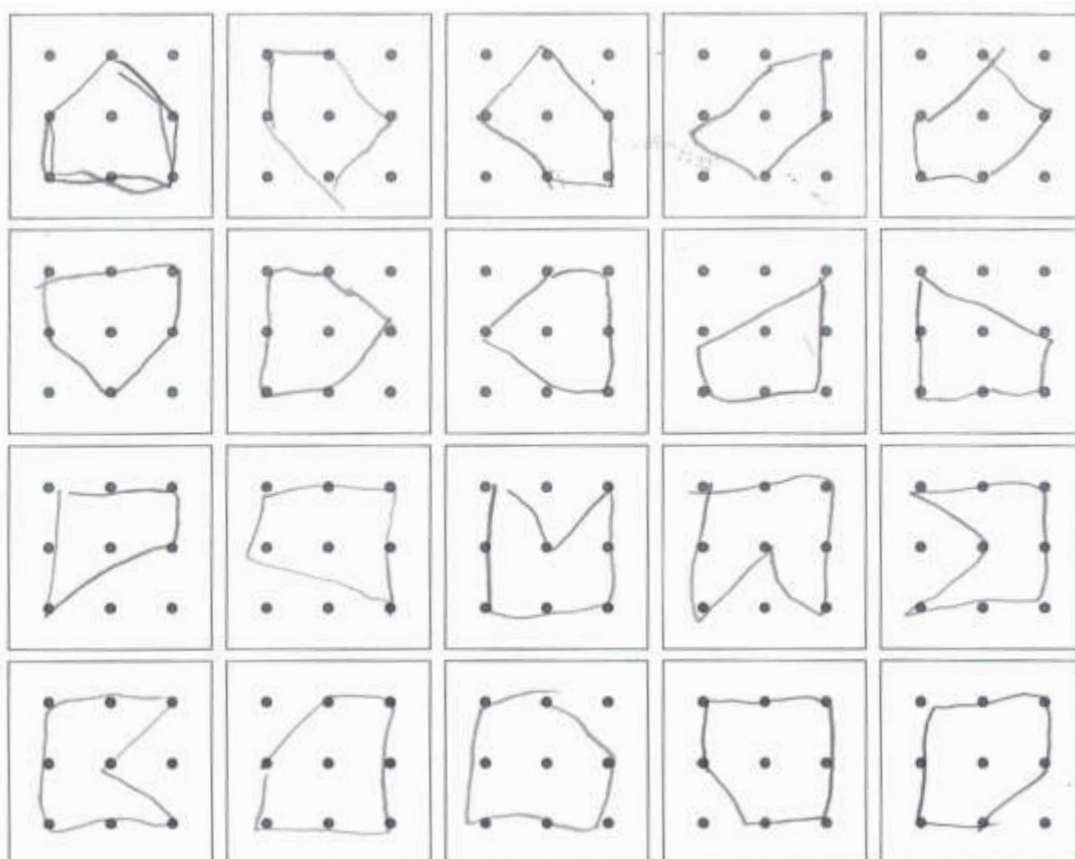


- Vzniklo poměrně dost chybných řešení, kdy žáci kříží gumičku a jako vrchol vnímají pouze místo, kde gumička obtáčí kolík:

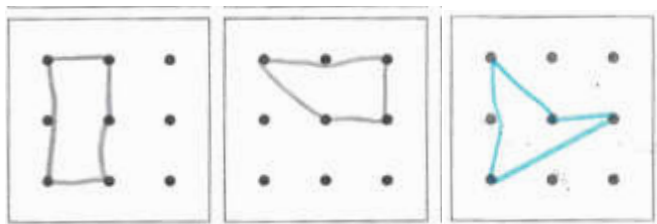


V následné diskuzi se žáci shodli, že tvary, kde se objevuje křížení gumiček, nejsou mnohoúhelníky.

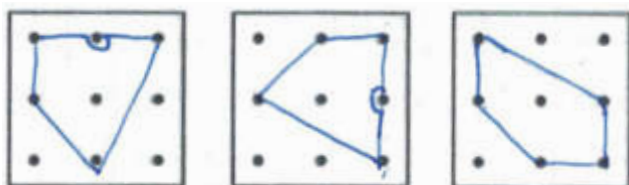
- Následující ukázka řešení (2. ročník) prezentuje snahu o systematickosti při hledání řešení, žák jinou polohu pětiúhelníku stále vnímá jako jiné řešení:



- I ve 3. ročnících se objevilo „podvlékání kolíku“, vznikla např. tato řešení, kdy žáci diskutovali, zda se jedná o pětiúhelníky:



- V tomto řešení žák přímo zdůrazňoval, kde vnímá vrcholy (místa, kde se gumička dotýká kolíku):

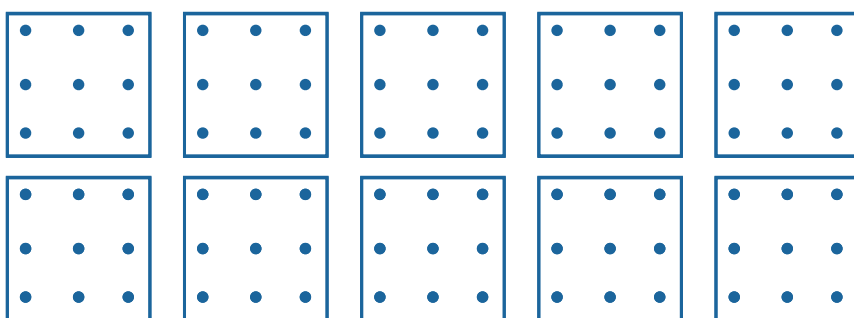


Následná diferenciacce, reedukace:

- Reedukací při „podvlékání kolíku“ je diskuze mezi žáky spojená s manipulací s geoboardem. Některým žákům pomohlo vystřížení útvaru, ovšem i zde je riziko „obstříhnutí“ kulatého kolíku na šabloně. Jinou možností je vrátit se k útvarům, které žáci dobře znají. Například k velkému trojúhelníku, ve kterém je střed strany délky 2 také na kolíku. V tomto případě však žáci tento kolík za vrchol nepovažují. Ujasníme si tento fakt zde a pak už by s touto úlohou neměl být problém.
- U situace „mašlička“ (pokud ji chceme reedukovat) pomohla sémantizace, kdy tvoříme výběh pro zvířata a žáci dostanou otázku, kolik výběhů tam vidí (případně lze zadat již s výzvou, aby byla celá ohrada zvířatům průchozí).

Úloha:

Vytvoř různé mnohoúhelníky a zakresli je do šablony.
Kolik vrcholů nejvíce má mnohoúhelník, který jsi vytvořil?

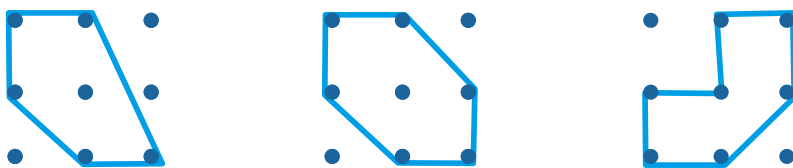


Komentář pro učitele:

Pojmy „konvexní, nekonvexní“ se zavádí až v 5. ročníku, ale s nekonvexními útvary se žáci setkávají již od 1. ročníku. U nekonvexního mnohoúhelníku mají někteří žáci problém vnímat jako vrcholy ty u nekonvexních úhlů, tedy poslední mnohoúhelník v našem řešení by namísto sedmiúhelníku mohli vnímat jako šestiúhelník (vrchol u nekonvexního úhlu nezapočítají). Podobně tomu je např. u mnohoúhelníku ve tvaru pěticípé hvězdy, desetiúhelník vnímají jako pětiúhelník.

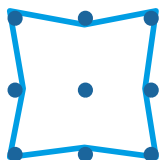
Řešení:

Trojúhelníky a čtyřúhelníky jsme už skládali. Pokračujeme dále, např.:



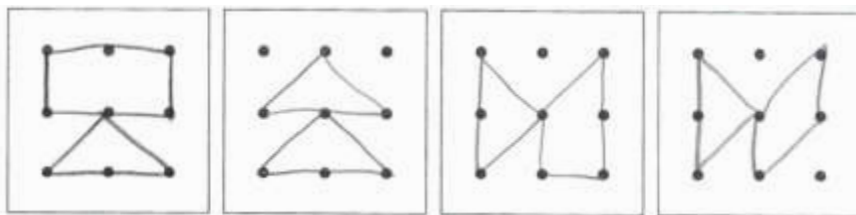
Chceme sledovat:

- jaké největší n (n -úhelník) žák odhalí, zda se pustí do nekonvexních mnohoúhelníků a je ochoten připustit, že se jedná o mnohoúhelník,
- zda žák sestojí namísto jednoho mnohoúhelníku dva, nebo více (tedy že se mu gumička někde zkříží) a jak ostatní žáci argumentují, že se nejedná o jeden mnohoúhelník,
- zda žák najde např. osmiúhelník (viz obrázek), devítiúhelník a jaká je argumentace pro osmiúhelník a jaká pro čtyřúhelník, devítiúhelník.



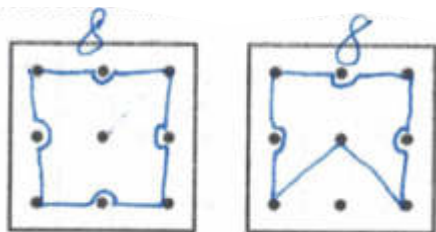
Poznátky:

- Žáci našli velké množství mnohoúhelníků, většina našla kolem 5 a více.
- Žáci našli až osmiúhelník.
- Některým žákům 2. ročníků dělalo potíže překreslení do šablony.
- Někteří žáci 2. ročníků nerozuměli pojmu úhel, dosud s ním pracovali velmi málo.
- Poměrně málo se objevuje chyba s křížením gumiček, přesto ale několik žáků tuto chybu stále opakuje.

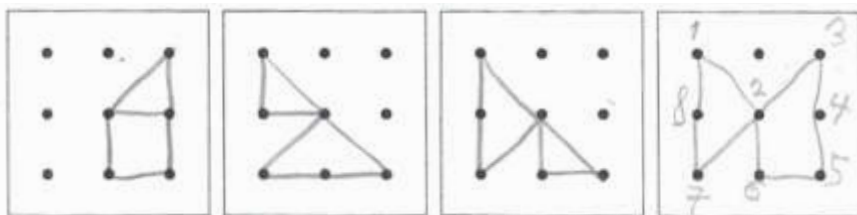


Žáci pracovali s větším počtem gumiček. Tím si učitel sice zajistí diskuzi, ale žáci (zejména z nižších ročníků) nemají argumenty, neznají pojmy, je to tedy komplikace pro učitele, bude nutný jeho zásah a vymezení pojmů.

- Následující řešení našel jeden žák, ale ostatní jeho řešení nepřijali.



- Někteří žáci počítají počty vrcholů stále pomocí počtu kolíků, kterých se gumička dotýká. Žák vytvoří útvar, který se skládá z více útvarů, ale má společný kolík/kolíky (počet kolíků považuje za počet vrcholů) a této představě se nechce vzdát:



- Někteří žáci mezi mnohoúhelníky zahrnují také trojúhelníky a čtyřúhelníky.
- Osmi- a devítiúhelníky tvoří žáci „podvlékáním“ gumičky pod kolík.

Následná diferenciacce, reedukace:

- Pokud pracují žáci s pomůckou, jedna gumička jim neumožní vymodelovat např. první útvar z ukázky výše. Problémem tedy může být i to, že žáci s geoboardem reálně nepracují a rovnou zakreslují útvary do šablony. Reedukací je návrat k pomůcce.

Obsah

Jako jednotka obsahu se nabízí čtverec (je na některých typech geoboardů vyznačený). Je možné načrtnout (přerýsovat) čtverec do šablony nebo do mříže a obsah řešit zde.

Úloha:

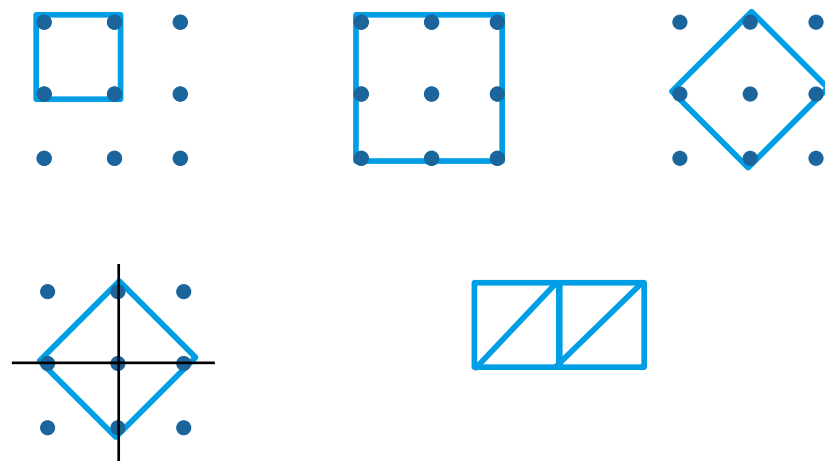
Urči obsah čtverce, který jsi na geoboardu sestavil.

Komentář pro učitele:

Žáci zapisují dle dohody, např.: 1 čtverec – 1č, 1 kachle – 1k. Analogicky u dalších čtverců: 4k, 2k. Na počátku je třeba se s žáky dohodnout, že **obsah budeme určovat v nějakých „jednotkových obrazcích“**, tedy budeme zjišťovat, kolikrát „se tento jednotkový obrazec vejde“ do měřeného obrazce. Většinou budeme určovat obsah ve čtvercích (což má smysl pro později zaváděnou standardní jednotku obsahu), ale pro dobré porozumění je vhodné žákům jednotkové obrazce střídat – trojúhelník (výsledek úlohy 2t, 8t, 4t), obdélník (výsledek úlohy 1o, 2o, 1o) atd.

Určení obsahu graduje od prvního čtverce po poslední. Zde žáci nepočítají „celé“ čtverce a volí některou strategii, např. sečtou 4 poloviny čtverců.

Řešení:

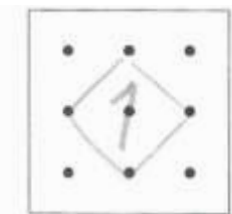


Chceme sledovat:

- jednotky, ve kterých žák obsah určuje (zejména pokud ve třídě není konsenzus),
- žákovské strategie určení obsahu (zejména u posledního čtverce, tj. zda „přesouvá“, rámuje, ...),
- zápis výsledku „polovina čtverce“ (zejména v ročnících, kde se ještě zlomky formálně nezapisují).

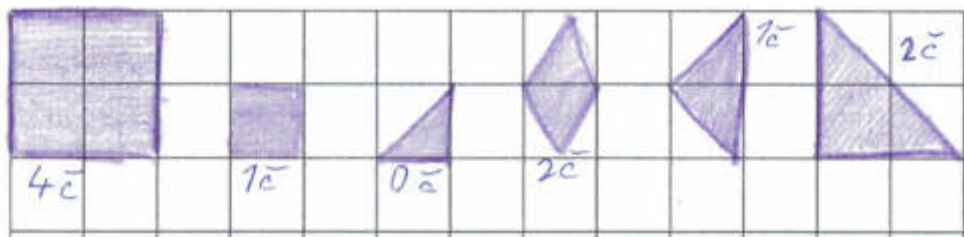
Poznátky:

- Téměř všichni žáci počítali v celých čtvercích, výjimečně se objevil jako jednotka trojúhelník.
- Několik žáků 2. ročníku u následujícího čtverce zapsalo obsah 1. Argumentovali, že je to 1 čtverec, proto 1. Na dotaz učitele, proč je to 1, když velký čtverec (myšleno s rozměry 3×3) je 4, řekli, že tento je malý, takže je to 1.



I v jiných třídách 2. ročníku byla potíž s určením obsahu tohoto čtverce. Nejčastěji žáci uváděli jako řešení 1, 4, nebo dokonce 0. Stejná chyba se objevila i ve 4. ročníku, ale pouze výjimečně.

- Pro žáky, kteří s obsahem neměli zkušenost, fungovalo motivačně pokrývání podlahy.
- Část žáků rovnou určovala obsah, byli i žáci, kteří si to potřebovali vyznačit.
- Někteří druháci pracovali na řešení této úlohy v mříž:

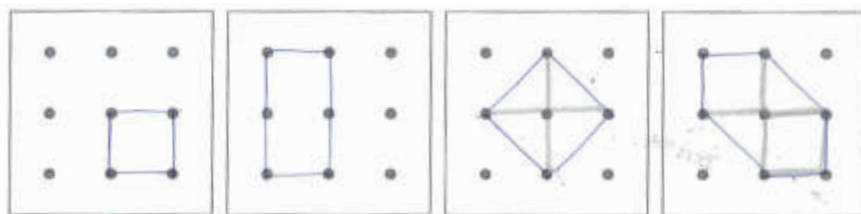


Nejproblematictější byl třetí útvar, kde se často objevovalo řešení 0. Diskutabilní je řešení čtvrté, kde žák nerespektuje mřížové body.

- Někteří žáci nevěděli, jak mají zapsat půl čtverce, někdo psal slovy, někdo i desetinným číslem nebo zlomkem.
- Někteří žáci si obrazce překreslovali a posléze stříhali.
- I starší žáci pracovali s geoboardem, na kterém si vytvořili zadané čtverce. Určování obsahu jim nedělalo potíže, většina z nich uvedla čtverec jako jednotku, někteří neuvedli žádnou jednotku. Objevila se i evidence mřížových hraničních a vnitřních bodů.

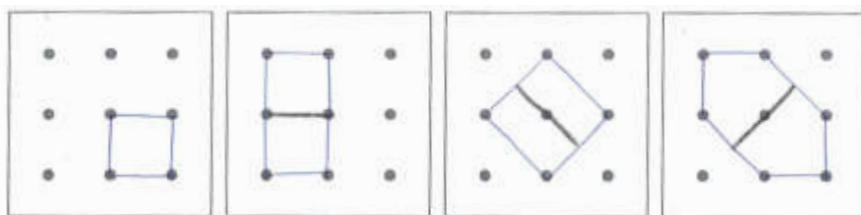
Následná diferenciací, reedukace:

- Pokud žáci u čtverce orientovaného na vrchol s obsahem 2 chybovali, fungovala jako reedukace manipulace. Žáci rozstříhali předlohu geoboardu nejprve na jednotlivé čtverečky, pak i na trojúhelníčky a následně pokrývali obrazce. Na základě této manipulativní zkušenosti žáci zjistili, že ze 2 trojúhelníků poskládají 1 malý čtverec. Následně z trojúhelníčků pokrývali zmiňovaný čtverec. Při ověření efektivity této reedukace žáci do řešení zakreslovali rozdělení útvarů na čtverce a trojúhelníky:



Bylo zajímavé, že se objevili žáci, kteří opět 3. čtverec vnímali s obsahem 1, ale poslední útvar již určili správně (obrazec si opět rozdělili). Nejspíš zde došlo k fixování chyby a jejímu přenosu.

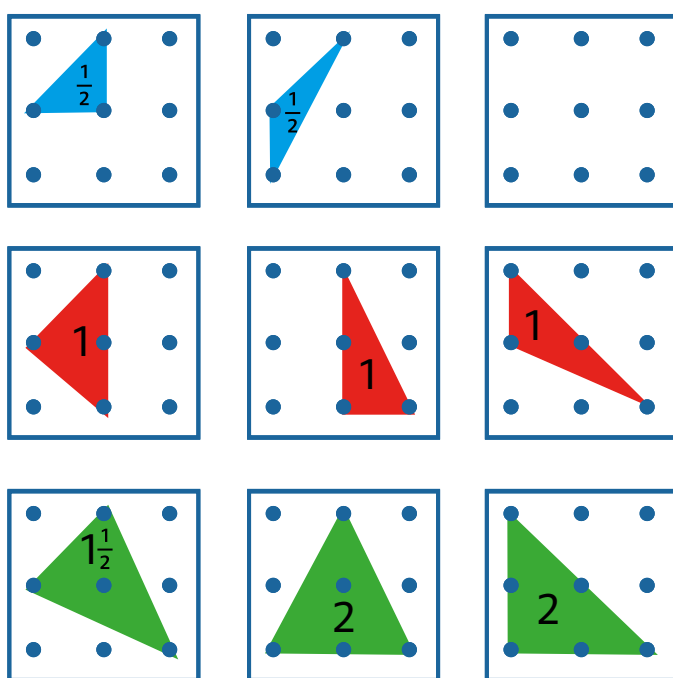
- Někteří žáci navzdory manipulativní zkušenosti dělili obrazce na polovinu bez uvědomění, proč to vlastně dělají, viz následující ukázka:



Úloha:

Urči obsah trojúhelníků, které je možné na geoboardu sestavit.

Řešení (bez jednotek):

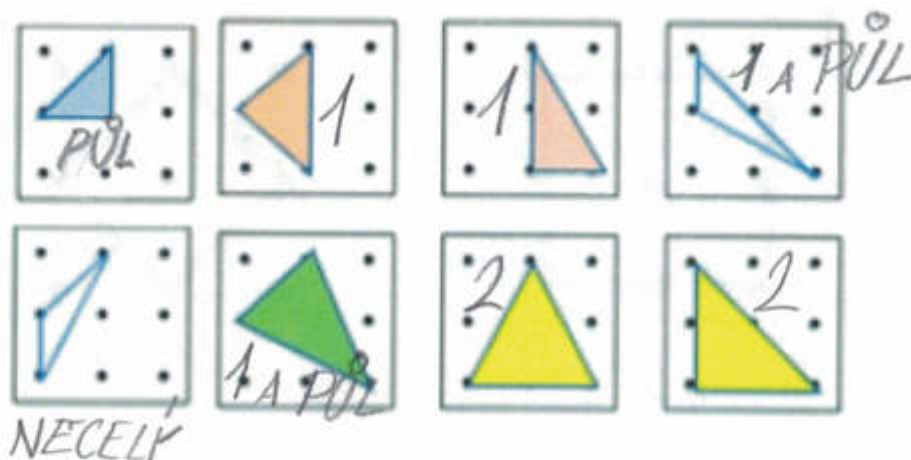


Chceme sledovat:

- jednotky, ve kterých žák obsah určuje (zejména pokud ve třídě není konsenzus),
- žakovské strategie určení obsahu (viz úloha výše),
- zápis výsledku „polovina čtverce“ (zejména v ročnících, kde se ještě zlomky formálně nezapisují).

Poznatky:

- Úlohu žáci vnímali jako výrazně složitější než úlohu se čtverci.
- Někteří žáci (3. ročník) dostali zadání, kde nejsou viditelné kolíky, které jsou uvnitř obrazce, viz následující řešení:

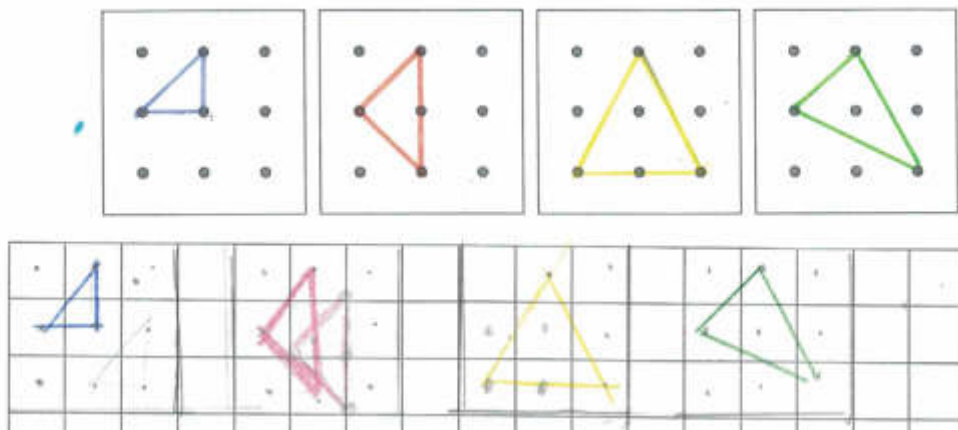


Tento žák evidentně umí poznat polovinu, správně ji ve svém řešení určil. Podle tohoto usuzujeme, že jeho slovo „necelý“ vnímal tak, že to je ještě menší než polovina, ale neuměl to vyčíslit.

Žáci poměrně snadno určili obsah 1., 3., 7. nebo 8. trojúhelníku, obtíže dělaly trojúhelníky 2., 5., 6. (nejsou vidět vnitřní kolíky). Žáci (i ti starší) tvrdili, že u nich obsah nelze určit.

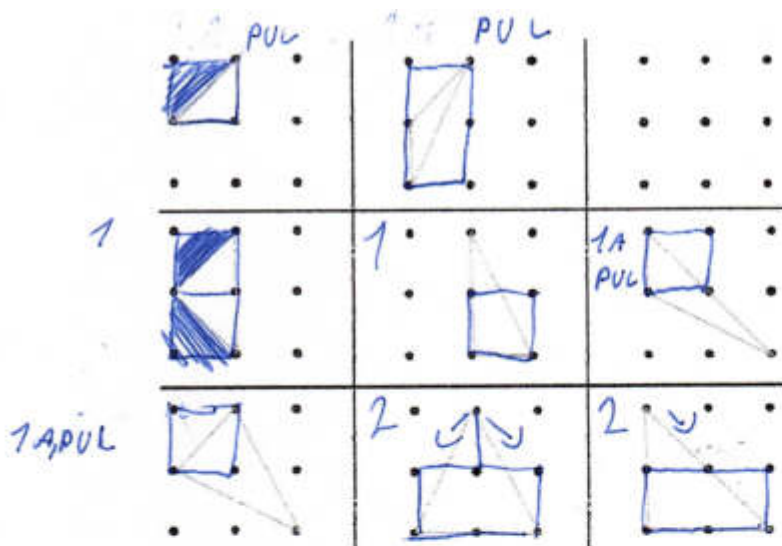
- Někteří žáci využívali rámování, jiní překreslovali, stříhali a následně skládali jednotlivé díly do nového útvaru.
- V následujícím řešení je patrná obtíž při přenosu situace z geoboardu (šablony) do mříže:

2. Urči obsah trojúhelníků, které jsi na geoboardu sestavil, a zakresli je do čtvercové sítě.



Žáci dostali k dispozici arch papíru s předrýsovanou mříží. Žák, jehož řešení vidíme výše, si nejprve potřeboval vymezit plochu, se kterou bude pracovat (ohraničení čtverců 3×3), a následně zaznačil jednotlivé kolíky. Mezi ně dále zaznačoval jednotlivé trojúhelníky a vůbec nerespektoval mřížové body. Úlohu dále neuměl vyřešit.

- Řešitelské strategie určování obsahu (4. ročník): Někteří používají metodu rámování, která už se ve třídě objevila dříve, někteří doplňují chybějící necelé části do celých čtverečků a pak počítají obsah po jednom čtverečku.
- Další řešení (ze 4. ročníku) zachycuje strategii doplnění na čtverec/obdélník a využití přesunu různých dílků z původního trojúhelníku:



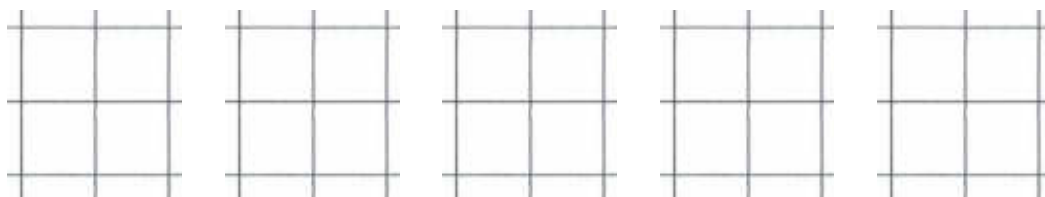
- Způsob zápisu výsledku obsahu (v jakých jednotkách, 4. ročníky): Způsoby se hodně různí, někdo využíval desetinná čísla, někdo zlomky, někdo zapisoval slovem polovinu, objevila se ikona čtverečku, „ob“ jako zkratka pro obsah, číslo bez jednotky, centimetry čtvereční.

Následná diferenciacce, reedukace:

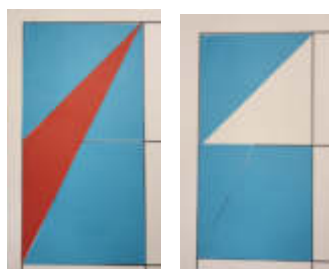
- Pokud má žák potíže s přechodem mezi geoboardem a mříží (i naopak), využijeme spolupráci se spolužákem, který to dělá dobře. Možností je také využít rastr odpovídající mříže čili 2×2 . Na geoboardu (fyzickém nebo šabloně) jsou vizuálně dominantní kolíky, tedy body, kdežto na mříži jsou dominantní čtverečky. Tudíž žák vidí, že geoboard má rozměry 3×3 , a přenáší to do mříže. Ale neuvědomí si, že u geoboardu jsou to 3 kolíky a tedy to dělá jako 3 čtverečky. Reedukace by mohla spočívat v tom, že si dokreslí linky mříže do geoboardu a zvýrazní kolíky v mříži jako průsečíky mříže.

Úloha:

Přerýsuj útvary z geoboardů do mříže.



- Dále zmíněný postup zachycuje reedukaci pro výpočet obsahu skrze modelování vybraných situací. Žáci pracovali ve dvojicích. Každá dvojice dostala modrou šablonu geoboardu (mříž) a větší bílou šablonu a červený trojúhelník. Nejprve měli žáci určit, o jaký trojúhelník se jedná, a zkusit určit jeho obsah. Dále překreslili červený trojúhelník na modrou předlohu. Obsah se snažili určit přestřižením trojúhelníku na takové části, které by jim vyplnily část čtverce (jasně určitelnou).



Zde je vidět postup určování obsahu: Nejprve si žáci poskládali červený trojúhelník spolu s modrými díly, pak odstranili červený trojúhelník a přesunuli jeden modrý díl tak, aby vyplnili plochu jednoho čtverce a nahoře jim tedy zůstala polovina druhého čtverce. Z toho odvodili, že obsah červeného trojúhelníku je půl čtverce.

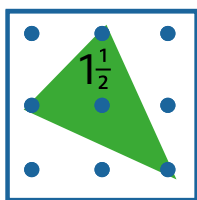
Úloha:

Vytvoř na geoboardu obrazce s níže zadaným obsahem.
U každého hledej 2 řešení. Obrazce poté přerýsuj do šablony.

- a) 0,5
- b) 1
- c) 1,5
- d) 2

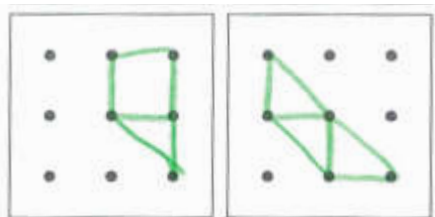
Komentář pro učitele:

Žáci experimentují, tvoří útvary a počítají jejich obsahy. Hodně bude záležet, jaké zkušenosti již mají za sebou. Dá se očekávat, že úlohy a), b) i d) budou snazší. Alespoň při hledání jednoho řešení. V úloze b) žáci vytvoří základní čtvereček, v úloze a) jeho polovinu, v úloze d) zase pravděpodobně obdélník 2×1 . Náročnější může být hledání dalších řešení i úloha c). Ta má toto řešení, případně i otočené shodné řešení.

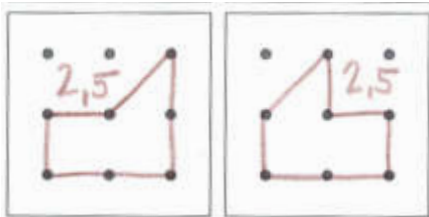


Poznátky:

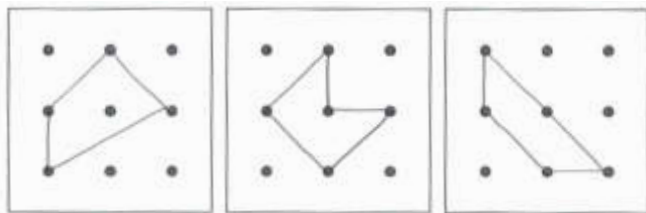
- Někteří žáci obrazce skládali z několika částí, aby dosáhli daného obsahu.



- U následujícího řešení vznikla bouřlivá diskuze, zda jsou útvary stejné. Žák shodnost dokazoval překrytím vystřižených obrazců přes sebe.



- Objevily se také zajímavé a nestandardní útvary. To lze podpořit způsobem, kdy učitel zadá úlohu tak, aby žáci hledali takové útvary, které nebude mít nikdo jiný ve třídě.



- Mnoho žáků při hledání druhého řešení našlo stejný útvar a pouze ho umístili do jiné polohy. Zajímavé bylo, že toto se objevilo i u čtverce.
- Někteří žáci zakreslovali i nemřížové útvary, jejichž obsah byl správně dle zadání.

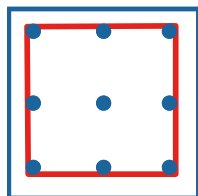
Následná diferenciacce, reedukace:

- Žáci, kteří měli s touto úlohou potíže, potřebují více manipulovat (např. skládat nastříhané trojúhelníky a tvořit z nich jiné útvary). Tento krok může pomoci ukotvit zkušenost, že útvary můžeme púlit, což nám při určování obsahu může pomoci.
- Pokud žák nedodržel měřítko při překreslování útvaru z geoboardu na mříž, respektive pletou se mu kolíky a úsečky mříže, je vhodné překreslit útvar z geoboardu na tečkovaný papír a teprve poté na mříž nebo si v mříži vyznačit 9 mřížových bodů jako geoboard a do toho následně útvar zakreslit.
- Nejsnáze se žákům hledaly útvary s celočíselným obsahem. Útvary s obsahem, kde byla součástí polovina, pak někdy hledali transformací těchto celočíselných útvarů (přidáním nebo odebráním části s obsahem polovina).
- Pro žáky, kterým úloha nečinila potíže, můžeme zadat následující výzvy:
 - U obrázků určit obvod (a dále můžeme cílit na zjištění, že stejný obsah se nerovná stejný obvod útvaru).
 - Hrát Sovu s vybranými obrázky se stejným obsahem.
 - Hra Vysílač/přijímač – přepošli svůj obrazec někomu jinému.

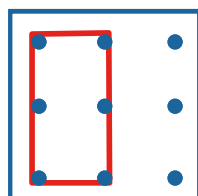
Úloha:

Každý obrazec rozděl na 2 shodné obrazce.

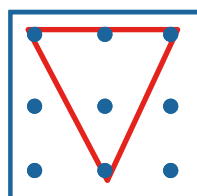
A



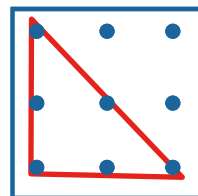
B



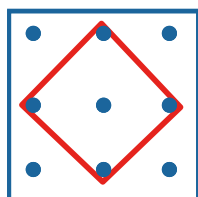
C



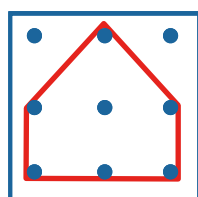
D



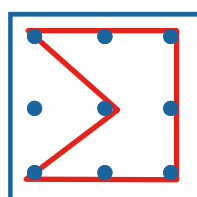
E



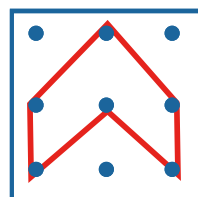
F



G



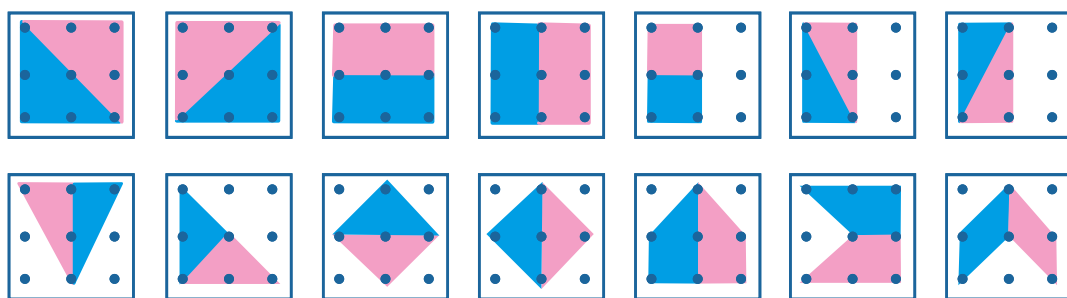
H



Komentář pro učitele:

Je důležité, aby žák zakresloval do šablony kvůli evidenci strategie. Můžeme zadat barvy a pracovat s barevnými gumičkami na geoboardu a s pastelkami v šabloně, formulace zadání by zněla: „Každý obrazec rozděl na 2 obrazce, červený a modrý.“

Řešení:

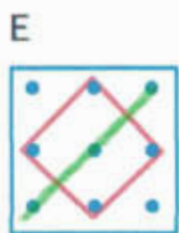


Chceme sledovat:

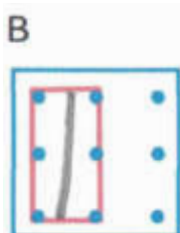
- jak žák rozdělení vyznačí (buď nová gumička představuje osu souměrnosti daného útvaru, nebo v případě útvaru B to může být i úhlopříčka, nebo je útvar rozdělený na dvě stejné části a každá je vyznačena gumičkou jiné barvy),
- které útvary žák rozdělí a které ne,
- zda žák považuje souměrná řešení za různá, příp. jak to argumentuje,
- zda se žák snaží rozdělit obrazec E na dva obdélníky, ačkoli to nelze vyznačit gumičkou (v případě formulace s barvami – pokud bude formulace bez barev, zřejmě lze předpokládat gumička v diagonále desky),
- zda žák potřebuje k řešení úlohy geoboard (zadání to neukládá, výsledkem je řešení v šabloně).

Poznátky:

- Žáci si často překreslovali zadání na svoje šablony, velká část žáků rozdělené plochy vybarvovala.
- Mnoho žáků 2. ročníků ověřovalo správnost svého řešení na geoboardu.
- Nikdo z žáků nepoužil toto řešení:

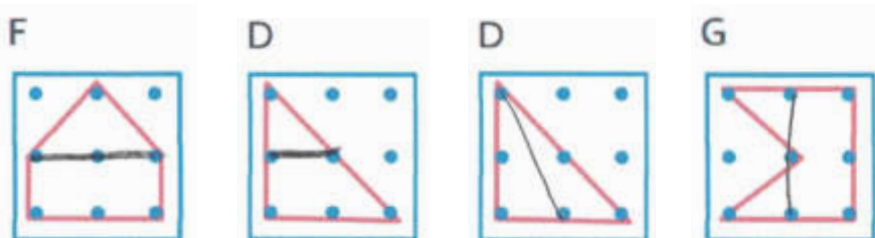


- Žák rozdělil obrazec správně na 2 poloviny, ale nerespektoval geoboard (zadání k tomu nevybízelo). Toto řešení se objevilo ve 2. i 3. ročnících:

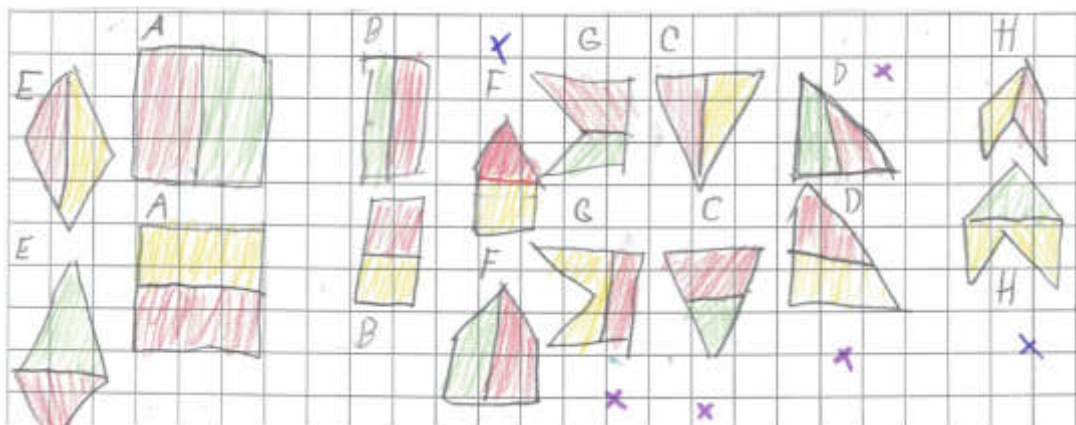


Správnost necháme na třídní diskuzi. Ocenění si zaslouží fakt, že z hlediska matematiky je toto řešení v pořádku (dělí útvar na dva shodné). To, že odporuje naší konvenci, je v tomto případě druhořadé.

- Nikdo z žáků nenaznačil u čtverců, že by existovalo více možností rozdělení.
- Ukázky chybných řešení z 2. ročníků:



- V jednom 2.ročníku dostali žáci k úloze výzvu, aby obrazce překreslili do mříže a v ní úlohu řešili:

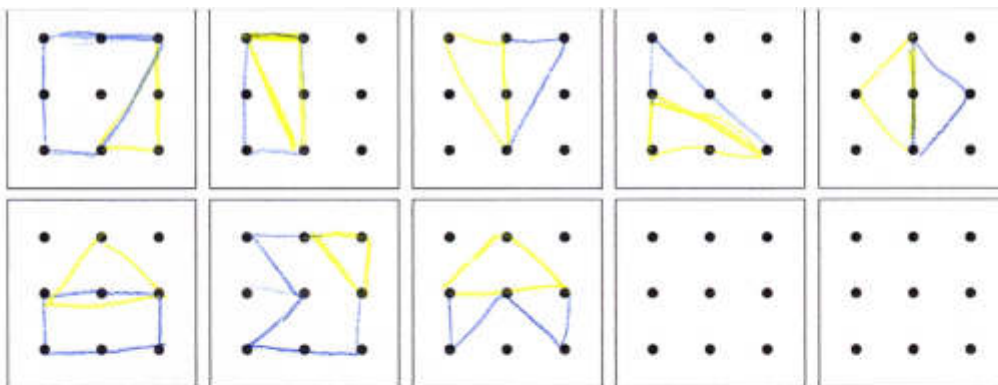


V řešení je zjevné, že některé útvary žák zakresluje do mříže bez respektování mřížových bodů. Půlení některých obrazců i přesto žák zvládl správně, u jiných chybně či nepřesně.

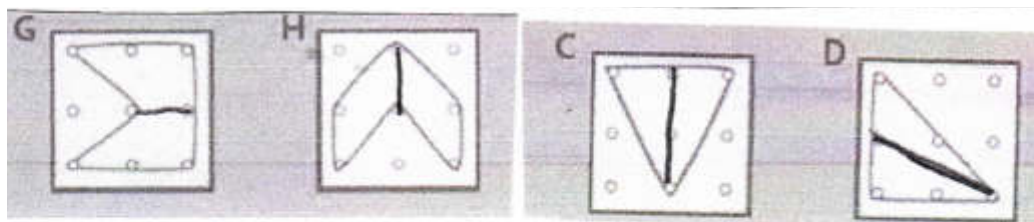
- Některým žákům se pletla shodnost tvarová a shodnost obsahu.
- Někteří žáci (i ze 4. ročníků) měli tendence klást doplňující otázky nebo měnit zadání a rozdělovali obrazce na 3 obrazce, které nejsou tvarem shodné, ale mají shodný obsah:



- Další ukázky řešení ze 3. ročníků:



Rozdělení pětiúhelníku na střechu a stěny domečku se objevovalo hojně nejen ve 3. ročnících, ale i ve 2.ročnících.



- V tomto řešení u úlohy D nevytvořil žák 2 shodné obrazce. Tento jev se objevoval často. Poznatzky ze 4. ročníků korespondovaly s výše zmíněným.

Následná diferenciacce, reedukace:

- Pokud se žákům úloha nedařila, ideální cestou pro reedukaci je reálné modelování s papírem, tedy vystřihnout obrazce a přeložit je na polovinu tak, aby se obě části překrývaly.
- Při nerespektování mřížových bodů lze využít postupy popisované výše, tedy dát výzvy k překreslování geoboardu do mříže s malým rastrem a naopak, případně využít pomoc spolužáků. Situaci můžeme zadat opačně (zadání umístit do mříže a nechat žáka modelovat na geoboardu), následně půlit. Lze využít také diskuzi ve třídě, zvláště v nižších ročnících. Většina geoboardů má podkreslenou mříž přímo na desce. Žákům lze zadat výzvu, aby popsali, co na geoboardu vidí, jaký to má význam a k čemu nám to může pomoci.
- Pokud se žákům úloha dařila bez potíží, můžeme zadat navazující úlohy:

Jeden z útvarů v předchozí úloze lze rozdělit na tři stejné obrazce. Který?

Správné řešení: G.

– Poznatzky z 2. ročníku:

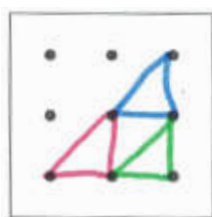
U následujícího řešení žáci popisovali, že tři díly jsou stejně velké (předsupeň vnímání obsahu). Ve společné diskuzi potom slovo obsah již zaznělo. Dále žáci popsali, že na plochu jsou tvary stejně velké, ale cílem bylo hledat tvary shodné tvarově.



- Zde byl žák přesvědčený, že se jedná o 3 stejné útvary, protože se v obrazci objevují (neporozumění zadání v kontextu úlohy):

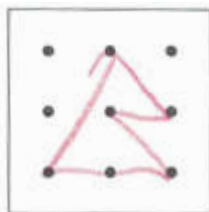


V tomto řešení našel žák 4 shodné obrazce:



Vytvoř obrazec, který nelze rozdělit na dva stejné obrazce.

- Poznátky z 2. ročníků:
Řešení byla různorodá. Velká diskuze vznikla u následujícího řešení:



- Několik žáků bylo přesvědčeno, že obrazec je možné rozdělit na dva stejné obrazce, ostatní jim s pomocí geoboardu ukázali, že to tak není.
Diskuzi vyvolal ještě tento trojúhelník:

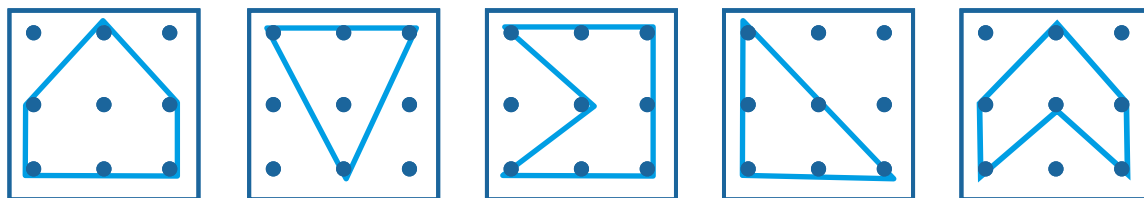


- Žáci přišli s návrhem, že kdyby se geoboard nastavil, šel by trojúhelník rozdělit. Nakonec ale jeden žák přeměřením dokázal, že strany by byly jinak dlouhé a i obě části by byly jiné. Následně to ještě demonstroval překreslením na papír, který vystříhl a přeložil.

Obvod

Úloha:

Přerýsuj obrazce do centimetrové mříže.
Porovnej obvody obrazců nejdříve odhadem
a pak ověř co nejpresnějším měřením v milimetrech.



Komentář pro učitele:

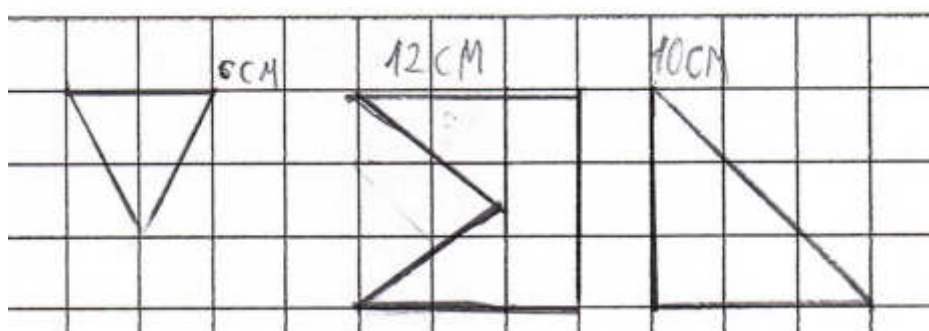
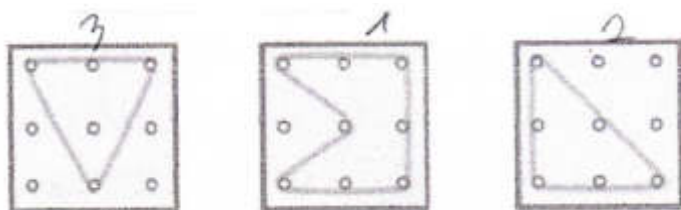
Tuto úlohu lze zadat žákům v různých obdobích (ročnících). Učitel může sledovat, zda žáci dokáží některé z útvarů seřadit dle jejich obvodů. Žáci se víceméně dostávají k **argumentaci**, k odůvodňování, k důkazu nějakého tvrzení. Žáci mohou např. říct: „Útvary 1 a 4 mají stejné obvody, protože jejich strany si délkově odpovídají (4 strany čtverce 1×1 , 2 úhlopříčky čtverce 1×1).“ Nebo řeknou: „Útvar 3 má větší obvod než útvar 4 (útvar 3 má stejně dlouhé strany jako útvar 4) a navíc má ještě dvě strany čtverce 1×1 .“ To je dobrá diagnostika, zda si žáci již takových myšlenek všímají – porovnávají délky úseček v geoboardu bez měření.

Chceme sledovat:

- jak žáci argumentují,
- zda žák porovnává délky úseček v geoboardu bez měření a jak.

Poznátky:

- U mnoha žáků chyběly zkušenosti s odhadem,
- Problém při překreslení do sítě se objevoval napříč 3. i 4. ročníky – rozdíl mezi mřížovým bodem (odpovídá kolíku) a čtvercem. Často neodpovídala délka stran (zaměňováno za celé čtverečky, viz druhý a třetí útvar):



- Někteří žáci nerozlišovali při počítání obvodu jednotkovou úsečku a úhlopříčku jednotkového čtverce a počítali obvod jako počet těchto úseček.
- Žáci se lišili v určování pořadí velikostí obvodů, ale shodli se na tom, že třetí útvar má největší obvod.
- Většina žáků preferovala zápis v centimetrech v kombinaci s desetinným číslem.

Následná diferenciacce, reedukace:

- Využít při práci s geoboardem provázky. Žáci by modelovali obvod na geoboardu a následně stříhali odpovídající délky provázků, které by následně porovnali.
- Při potížích s přenosem útvaru z geoboardu do mříže můžeme nechat žáky zapsat nejprve útvary šipkovým zápisem a podle šipkového zápisu následně útvar rýsovat na mříž.

Vysílač–přijímač/Telefon

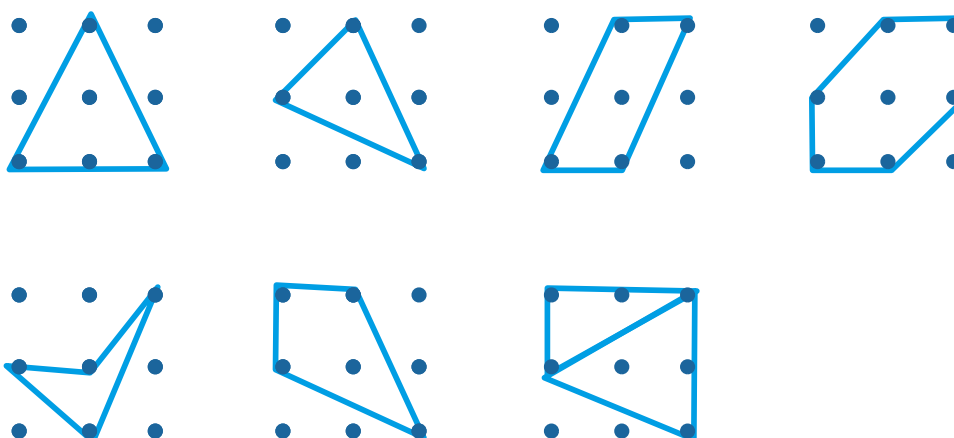
(Vysílač je jednosměrný, tj. nepřipouští otázky. Telefon je obousměrný, tj. připouští otázky.)

Úloha:

Žáci pracují ve dvojicích (v online učitel/žáci). Každý má geoboard a 3 různobarevné gumičky. Žák A vymodeluje na svém geoboardu nějaký obrazec tak, aby ho žák B neviděl. Potom slovně instruuje žáka B, aby vymodeloval stejný obrazec. Když je žák B hotov, oba žáci si obrazce porovnají. Pokud se neshodují, diskutují, co mohlo být příčinou nepochopení.

Komentář pro učitele:

Modifikací může být skládání obrazce podle projekce. Žák A vidí na projekci obrazec, složí jej na svém geoboardu a slovně instruuje žáka B, který na projekci nevidí. Ten skládá na svém geoboardu, nakonec si obrazce porovnají a diskutují.



Chceme sledovat:

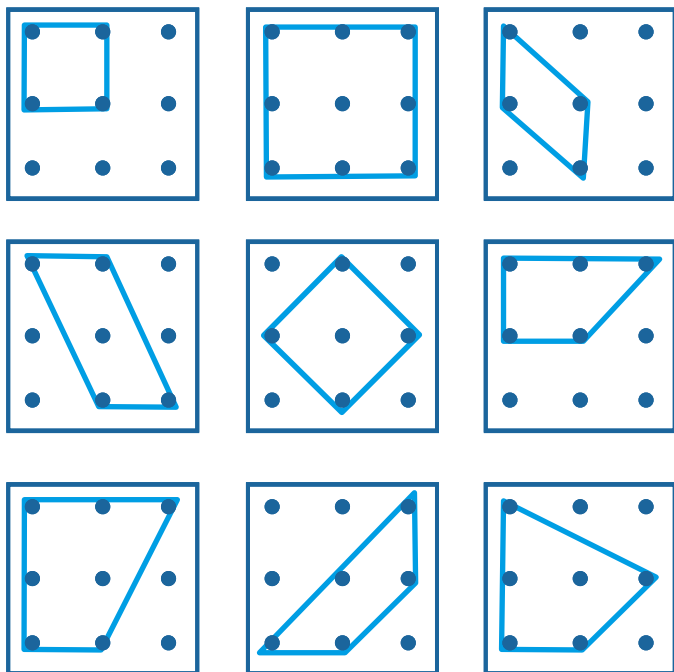
- jaká slova vysílač používá,
- zda těmto slovům přijímač rozumí.

Sova

Úloha:

Uhodni, na který obrazec sova myslí.

Ptát se můžeš jen tak, aby sova mohla odpovědět ano/ne.



Komentář pro učitele:

Pokud žáci s touto aktivitou nemají zkušenosti, začínáme s menším počtem objektů v galerii, pro začátek postačí 4. Při hře nepoužíváme otázky na polohu obrazce, např. zda je umístěn vpravo nahoře apod.

Chceme sledovat:

- jaká slova žák používá pro formulaci otázky,
- zda žák klade nejmenší možný počet otázek, tj. neptá se na něco, co už ví z otázek předchozích. (Učitel může v modifikaci úlohy vyzvat k formulaci co nejmenšího počtu otázek, ale v úvodní úloze je počet otázek dobrý diagnostický parametr.)

Průřezové úlohy

Úloha:

Sestroj střed dané úsečky, která je:

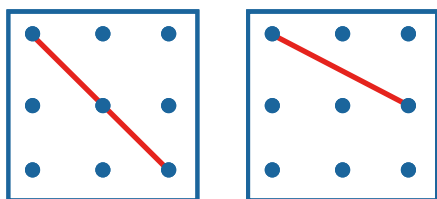
a) modelována kouskem provázku.

b) úhlopříčkou papírového obdelníku.

Střed vyznač pouze skládáním papíru.

c) modelována gumičkou na geoboardu.

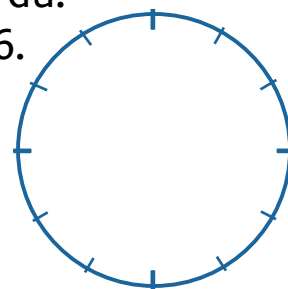
Střed vyznač pomocí druhé gumičky jako průsečík dvou úseček.



d) je modelována gumičkou na ciferníku geoboardu.

Krajní body jsou v číslech **a) 3, 9; b) 8, 12; c) 4, 6.**

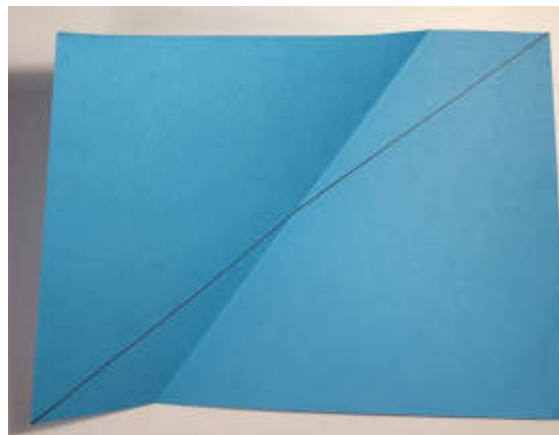
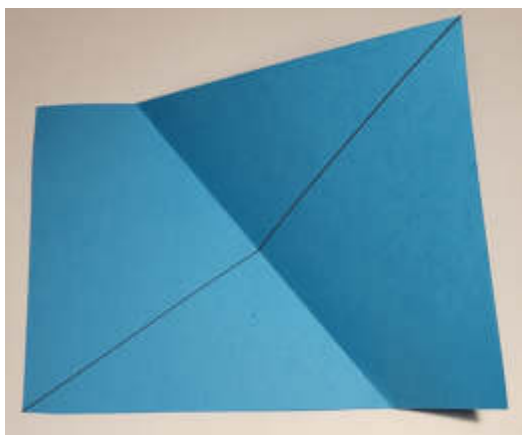
Střed vyznač pomocí druhé gumičky, nebo rýsováním na obrázku ciferníku.



Poznátky:

2. ročník (pouze část úlohy):

- Hledání středu pomocí provázku nebyl pro žáky problém, měli hned vyřešeno všichni.
- U druhé úlohy velká část žáků našla střed pomocí přehnutí obdelníku na polovinu, méně žáků našlo střed přehnutím přes úhlopříčku.
- Jiní žáci hledali střed pomocí přeložení (překládali úsečku na sebe nebo překládali dva protilehlé vrcholy obdelníku).

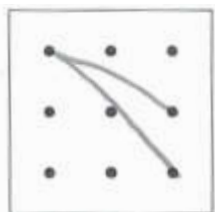


- U tohoto řešení je patrná kontrola žáka, který si přeložil papír několikrát, aby si potvrdil správnost.

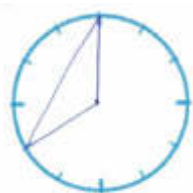


4. ročník:

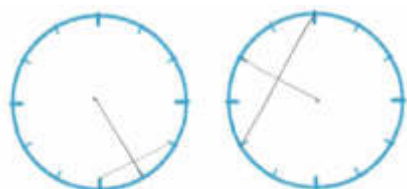
- Náročný byl zejména pojem střed a průsečík. Přestože je žáci používají v rýsování, nemají je ještě zvnitřněné.
- V úloze c) většina žáků napoprvé vyřešila úlohu tak, že pouze vymodelovali dvě úsečky ze zadání a považovali to za hotové:



- Někteřím žákům pomohlo přeformulovat zadání takto: „Pomocí druhé gumičky najdi střed té modré.“ Nebo „rozděl“, „rozpul“, „najdi polovinu“. Následně žáci reagovali, že to je vlastně jednoduché.
- V úloze d) žáci vůbec nevěděli, jak vymodelovat dané úsečky, tedy jak spojit např. vrcholy 3 a 9. Vůbec je nenapadlo oba body spojit rovnou čarou, často vyznačili nějaký trojúhelník s vrcholem ve středu ciferníku:



- Někteří žáci mátlí pojmy „střed ciferníku“ a „střed úsečky“:



Následná diferenciacce, reedukace:

- Nechat žáky přeformulovat zadání, aby mu sami rozuměli.
- Přeformulovat zadání synonymy učitelem („pomocí druhé gumičky najdi střed té modré“ nebo „rozděl“, „rozpul“, „najdi polovinu“).

- Více se před úlohou věnovat modelování úseček na geoboardu, protože žáci jsou zvyklí tam tvořit spíše mnohoúhelníky a úsečka jako 1D útvar se na pomůcce znázorňuje těžko (někteří žáci vnímají „tloušťku“ gumičky, což jim brání vidět v tom úsečku).
- Vymodelovat z 12 žáků ciferník ve třídě. Žáci by stáli ve vrcholech ciferníku a pomocí házení klobíčka nitě by tvořili tyto úsečky.

Závěr: Sledujeme matematický obsah prostředí Geoboard

1. geometrické útvary a jejich vlastnosti (mnohoúhelníky),
2. obsahy mnohoúhelníků,
3. zlomky,
4. geometrická zobrazení.

ad 1) Trojúhelník, čtverec, obdélník, kosodélník, lichoběžník, pravidelný šestiúhelník, ...

ad 2) Urči obsah mnohoúhelníku sestaveného na geoboardu.

ad 3) Rozděl mnohoúhelník na dvě stejné části (polovina)...

ad 4) Rozděl mnohoúhelník na dvě stejné části (osová souměrnost). Na geometrická zobrazení se žáci připravují při porovnávání řešení, určování počtu různých řešení, změně měřítka při modelování obrazce, překlápěním z horizontální do vertikální polohy nebo plněním podmínky zadání, která se geometrického zobrazení týká.

- Porovnávání řešení, určování počtu řešení – žáci budou diskutovat, zda dva obrazce jsou jedním a tímtéž řešením, či nikoli (viz výše). Např.

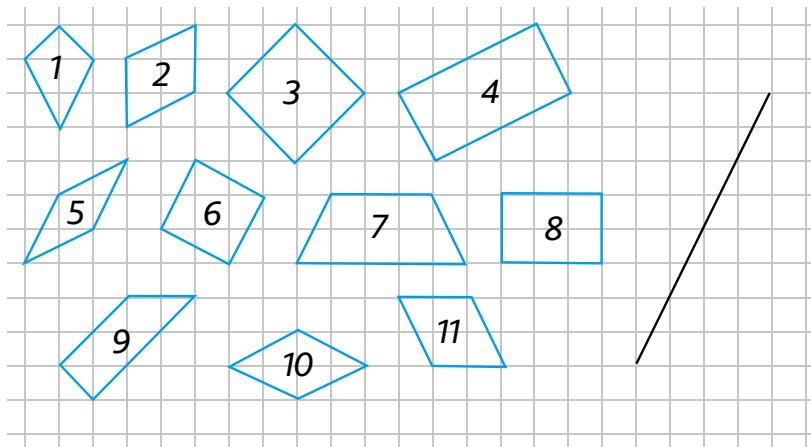


Není nutné, aby se na tom sjednotili. Důležité je, jaký uvedou argument. Velmi vyspělý argument by byl tento: Řešení jsou stejná, protože bychom mohli jedno pootočit a dostali bychom druhé. Žák, který by toto například méně obratně formuloval, vnímá již objekty jako geometrické, tedy nezávislé na jejich poloze. Učitel ví, že se jedná o obrazce navzájem shodné (navzájem v osové souměrnosti). Žák, který bude shodné obrazce považovat za stejná řešení, bude nacházet méně řešení, což může být často efektivnější (bude se zabývat jen neshodnými řešeními).

- Změna měřítka při modelování obrazce – žák obrazce buď zvětšuje, například při práci s učebnicí, nebo zmenšuje, je-li obrazec dán na tabuli.
- Překlápění obrazce z horizontální do vertikální polohy – pokud je obrazec zadán na tabuli (svislá rovina), žák musí překlápnout do vodorovné roviny (sešit) a naopak. Tyto transformace v prostoru mohou být pro žáky zejména v nižších ročnících velmi náročné a v některých případech se nedoporučuje je používat (tedy nezadávat či neprezentovat řešení úloh v nerovnoběžných rovinách).

Ukázka úlohy:

Najdi útvary, které mají stejný obvod, jako je délka černé úsečky.

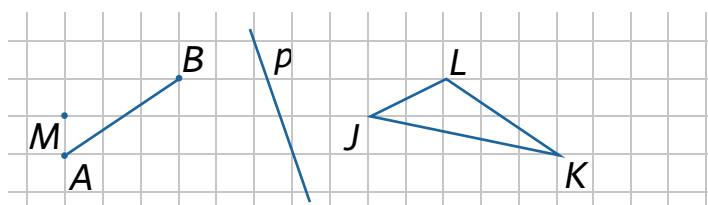


Řešení úlohy:

Stejný obvod, jako je délka černé úsečky, mají útvary 5, 6 a 10.

Prostředí Mříže navazuje zcela přirozeně na úlohy z prostředí Geoboardu. Postupem času jsou žáci v úlohách vyzýváni, aby útvary, které modelují na geoboardu, překreslovali nebo přerýsovali na pravoúhlou čtvercovou mříž. Tím se **manipulativní poznávání posouvá na abstraktnější úroveň**, kde si na útvary již nemůžeme sáhnout. Vlastnosti mříže ale dávají žákům silný nástroj k tomu, aby argumentovali a zdůvodňovali vlastnosti rovinných útvarů. Kupříkladu v uvedené úloze nemusí žáci vůbec využívat znalosti metrické soustavy (jednotek délky), aby úlohu vyřešili. Stačí, když si všimnou, že černou úsečku lze rozdělit na čtyři stejné úsečky, které jsou úhlopříčkami obdélníku 2×1 . Pak už jen stačí zjistit, které ze stran uvedených útvarů jsou úhlopříčkami stejného obdélníku. Podobně jednoduše můžeme u útvarů určit, zda mají vnitřní pravé úhly (bez znalosti stupňů a bez použití úhloměru), zda jsou jejich strany rovnoběžné (bez pravítka), nebo zda jsou osově souměrné. Opět nám ke všemu postačí základní vlastnosti mříže. Toto prostředí také velmi silně **propojuje geometrii s aritmetikou**, a proto ho ve výuce použijeme k zavedení souřadnicového systému. Na střední škole může stejně dobře posloužit jako zdroj zkušeností pro učivo analytické geometrie. **Na 1. stupni je předstupněm rýsování a konstrukcí na čistém papíru, které bývá jinak pro žáky velmi abstraktní a náročné.**

Bod, ve kterém se protnou dvě na sebe kolmé linky čtverečkováného papíru, nazveme **mřížový bod**. Každá úsečka, jejíž krajní body jsou mřížové, se nazývá **mřížová úsečka**. Každá přímka, která prochází alespoň dvěma mřížovými body, se nazývá **mřížová přímka**. Obdobně budeme používat termíny **mřížová polopřímka**, **mřížový trojúhelník**, **mřížový n-úhelník** apod.



Prostředí čtvercové mříže je velmi přínosné pro snadnou tvorbu izolovaných modelů zkoumaného jevu nebo situace, které jsou žákům dobře dostupné. Z nich pak mohou samostatně odhalit generický model, který je již vlastně obecným řešením původní úlohy na čistém papíru.

Cesta v mříži

Úloha:

- Kolik různých cest existuje z bodu A do bodu B?
- Kolik krátkých cest existuje z bodu A do bodu B?
- Zápis cesty z bodu A do bodu B.

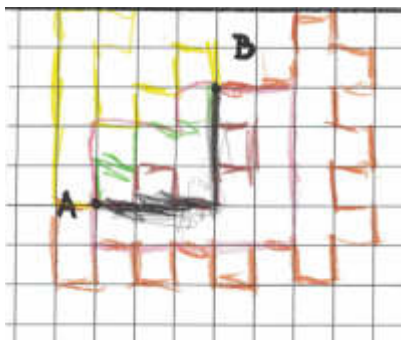
Komentář pro učitele:

Krátká cesta je cesta, k níž neexistuje kratší. Učitel může pracovat v posloupnosti „hledejte jakékoli cesty“, „čím se liší“ (délkou), „kolik měří“, „která je nejkratší“, „pojďme chodit tou nejkratší cestou“ – od jisté chvíle budeme pracovat jen s krátkými cestami (směřujeme do kartézské soustavy souřadnic).

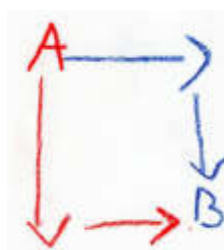
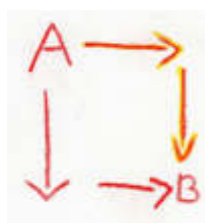
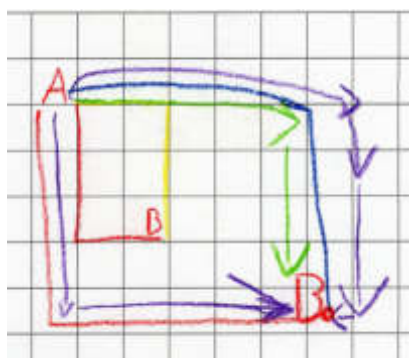
Jedná se o kombinatorickou úlohu „Hledej všechny cesty“, kde učitel může diagnostikovat i systematickост žakovy práce – systém pomáhá nevynechat žádné řešení a žádné řešení neuvést opakovaně.

Poznátky:

- Tato vstupní aktivita byla testována v 1. a 2. ročnících. Někteří žáci zažili vstup do tohoto prostředí skrze autíčko, se kterým cestovali mezi dlaždicemi. Důležitou podmínkou byla jízda po spárách (to jsou naše „silnice“). Následně žáci závodili z bodu A do bodu B (učitel vyznačil barevné křížky – mřížové body) a porovnávali délku svých cest. Tyto cesty se pokoušeli zapsat (pomocí čárek, šipek). V diskuzi žáci komentovali, že nejlepší cesta je ta krátká (propojili to s reálnou zkušeností – je levnější, ekologičtější apod.).
- Ukázka řešení, kdy žák barevně vyznačoval různé cesty do mříže:



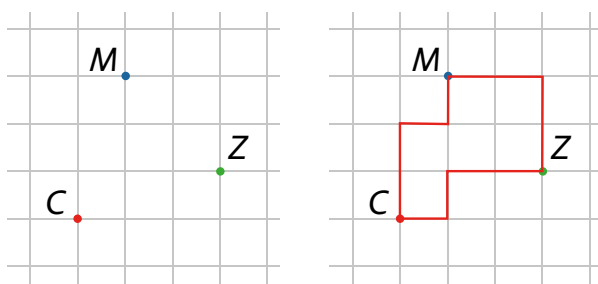
- V následujícím řešení je zjevné využití jazyka šipek, ale není zohledněno, přes kolik čtverců (mřížových úseček) se musíme přesunout:



Úloha:

- Každý z dvojice vyznačí ve své čtvercové mřížce tři různé body (vrcholy trojúhelníku) tak, aby dvojice měla vyznačeno stejně. Body pojmenuje C, Z, M.
- Jeden z dvojice vyznačí libovolnou cestu z bodu C do bodu Z, z bodu Z do bodu M a z bodu M do bodu C tak, aby druhý cestu neviděl.
- Cestu z C do Z popisuje spoluhráči slovně, ten ji kreslí do své mřížky.
- Cesty ze Z do M a z M do C předá spoluhráči napsané (ne nakreslené) na papíře, ten je kreslí do své mřížky. Zápis může být zcela libovolný.
- Vyznačení cest si spoluhráči porovnají.
- Dvojice navrhne optimální zápis cesty.

Ukázka možného řešení:



Komentář pro učitele:

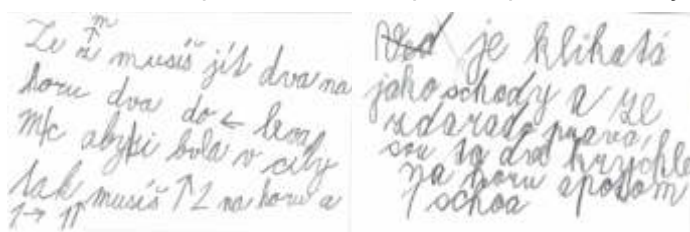
Úloha má smysl v případě, že se žáci setkávají s cestou v mřížce a způsoby jejího záznamu poprvé. Určitě můžeme zařadit do nižších ročníků než v učebnici, tj. 2. nebo 1. ročník.

Chceme sledovat:

- jaká slova používá vysílač při slovním popisu cesty, zda je popis konceptuální, nebo procesuální (konceptuální používá slova „je“, „leží“, „je spojeno“, ..., procesuální používá slova „udělej“, „nakresli“, „spoj“),
- jaký způsob používá vysílač při grafickém záznamu cesty, zda je záznam pro přijímač srozumitelný a jak spolupracují při konstrukci společného návrhu záznamu.

Poznatky:

- V 1. i ve 2. ročnících většina žáků popisovala proces. Většinou se dvojicím hra dařila. Pokud se nevedla, bylo to často dáno přílišnou složitostí cesty a chybami spojenými s pravolevou orientací.
- Někteří žáci potřebovali pomoc do mřížky vyznačit bod, od kterého budou cestovat.
- I přesto, že žáci neměli velké zkušenosti, aktivita je bavila a byla na nich patrná velká snaha a zaujetí.
- Druháci často využívali slovní zápis cesty, viz následující ukázky:



Rýsování mnohoúhelníku podle šipkového zápisu (od procesu ke konceptu)

Opakujeme, že přechod od procesu (žáci tvoří pomocí šipkového zápisu) ke konceptu (hotový obrázek) a naopak umožňuje žákům hlubší porozumění takovým situacím. Jednou tedy žáci ze šipkového zápisu vytváří geometrický útvar, jindy zase daný obrázek popisují pomocí šipkového zápisu. Aktivita a úlohy se k těmto myšlenkám dají různě gradovat, takové možnosti popisuje i tento dokument. Jako příklad uvedeme následující ilustrativní úlohu, vhodnou např. při zavádění pravoúhlého trojúhelníku.

Úloha:

Ze šipkového zápisu pravoúhlého trojúhelníku UVW vypadlo písmeno V.
Vraťte ho tam zpět. $U \rightarrow \rightarrow \uparrow \uparrow \leftarrow W$

Úloha:

Ve čtvercové mříži sestroj trojúhelníky ABC , DEF , GHI , kde
 $A \rightarrow \rightarrow B \uparrow \uparrow C \leftarrow \leftarrow \downarrow \downarrow A$,
 $D \rightarrow \rightarrow E \uparrow \uparrow F \leftarrow \leftarrow \downarrow \downarrow D$,
 $G \rightarrow \rightarrow H \uparrow \uparrow I \leftarrow \leftarrow \downarrow \downarrow G$.

Komentář pro učitele:

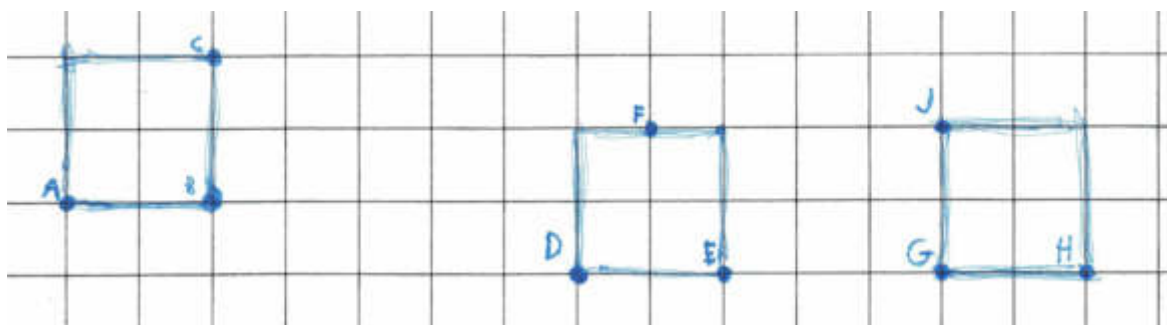
Pro řešení dalších úloh je důležité, aby již žáci měli **upevněný šipkový zápis**, který slouží k popisu vzájemné polohy bodů v mříži. Po vyznačení tří bodů je potřeba, aby žáci ještě sestrojili trojúhelník, tedy aby každé dva jeho vrcholy spojili čarou. Poněvadž v této fázi konstruování geometrických útvarů ještě není cílem rýsování, mohou žáci vrcholy spojit čarou od ruky. Pokud ale někdo pravítko použije, můžeme ve třídě otevřít diskuzi, zda je taková konstrukce přesnější než náčrtek provedený od ruky.

Chceme sledovat:

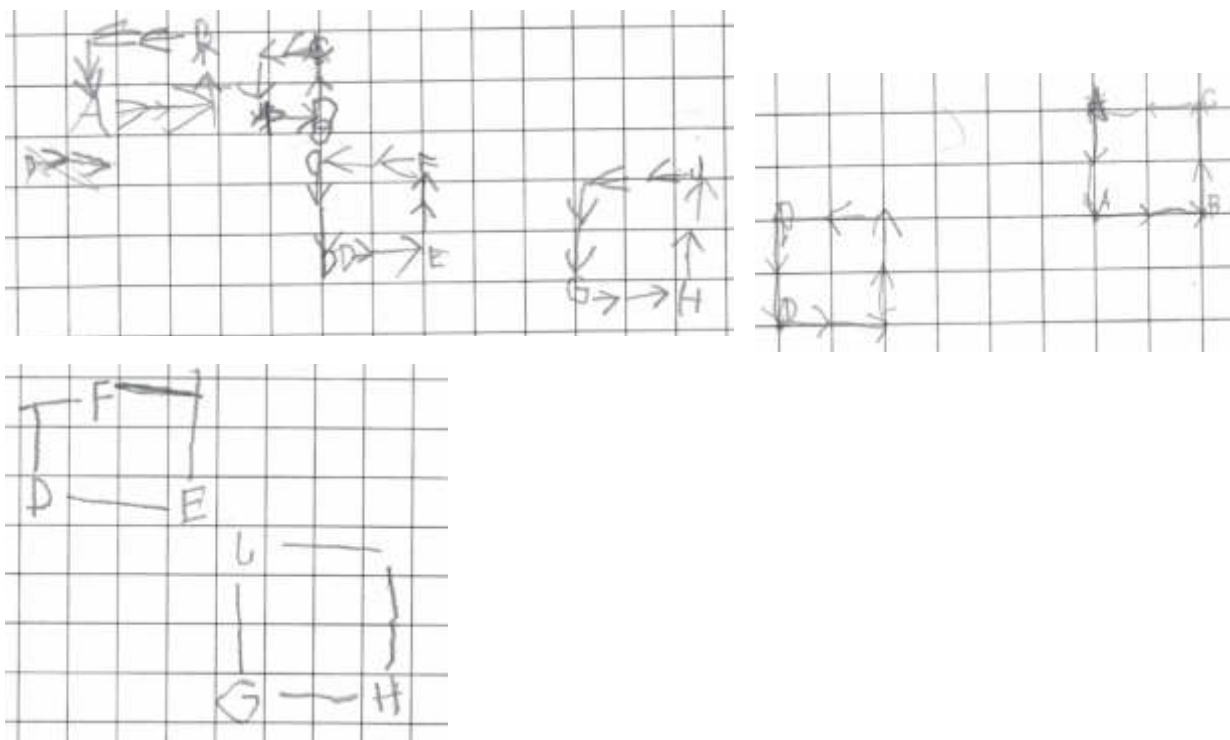
- zda žák správně znázorní polohu bodů,
- zda žák vyznačí trojúhelníky s vrcholy v zadaných bodech nebo jiné útvary. (Stává se, že žák místo trojúhelníku vyznačí čtyřúhelník, protože nespojuje body úsečkou, ale krátkou cestou v mříži, tj. lomenou čarou. Zde nás zajímá, proč někdo chybuje a někdo ne, resp. jakou informaci je potřeba chybným žákům doplnit.)

Poznátky:

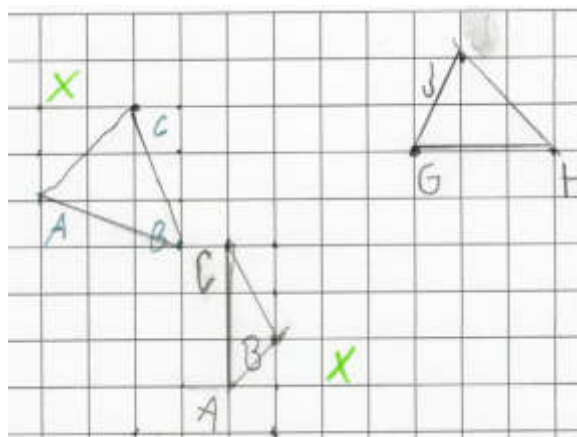
- V 1. i 2. ročnících jsme opakovaně zaznamenali úskalí jazyka šipek, a to právě v podobě vyznačování cesty v mříži namísto mřížového bodu, viz následující ukázka řešení:



- Objevovala se také řešení, kdy žáci necestovali pouze po mřížových úsečkách, ale využívali i celé čtverce mříže, případně volili také další způsob záznamu:



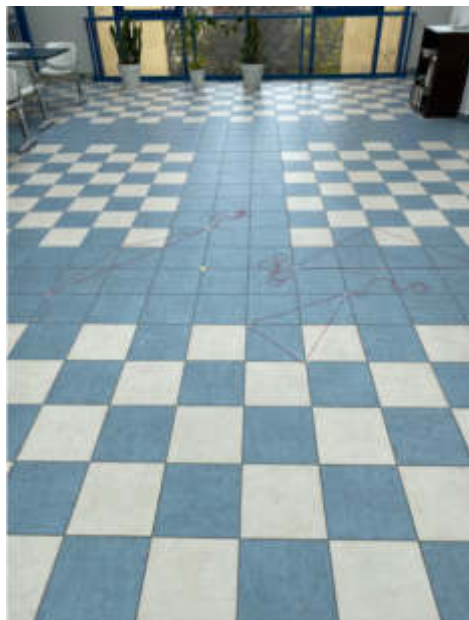
- Výjimečně žáci dokázali vyznačit pouze trojúhelníky, u některých se objevila kombinace vyznačení celé cesty a následné spojení mřížových bodů.
- Objevovalo se také chybné vyznačení mřížových bodů a následně vznik jiných trojúhelníků:



Následná diferenciacce, reedukace:

- Pokud žáci místo bodů vyznačují celou cestu v mříži, pomůže společná diskuze.
- Efektivním způsobem se také ukázalo využití figurky, která cestuje po mříži, ale až v místě cíle (hledaný mřížový bod) se označí její pozice tužkou.
- Vhodnou aktivitu nejen pro reedukaci, ale i pro zavedení a otevření prostředí mříže a šipkového zápisu na ní představuje dramatizace. Žáci prochází po velké mříži sami (přesněji řečeno po linkách mříže). K tomu může sloužit podlaha z dlaždic jako na obrázku. Lze ji ale vytvořit i lepicí páskou. Tuto aktivitu lze použít jak pro cestování po mříži (žáci si dávají navzájem pokyny), tak pro tvoření mnohoúhelníků v mříži. Jeden žák diktuje postupně třem žákům šipkový zápis trojúhelníku (např. Albert si stoupne do jednoho mřížového bodu. Bára udělá od Alberta dva kroky nahoru a jeden doleva a zůstane stát. Cecílie udělá od Báry jeden krok doleva a jeden krok doza

du a zůstane stát.) Nakonec stojí tři žáci v těch mřížových bodech, které tvoří vrcholy trojúhelníku. Učitel dá žákům provázek, který mezi sebou napnou, a vymodelují tak trojúhelník. Následně provázek položí na zem a ve vrcholech trojúhelníku ho přilepí izolepou. Žáci tak zažívají proces cestování v mříži na vlastní kůži a zároveň díky tomu, že vymodelují trojúhelník provázkem, vidí, že výsledný útvar vznikne spojením třech vrcholů rovnou čarou. Následná konstrukce mnohoúhelníků na mříži by jim tedy neměla dělat potíže. Pokud ano, dramatizaci opakujeme, dokud to není jasné.

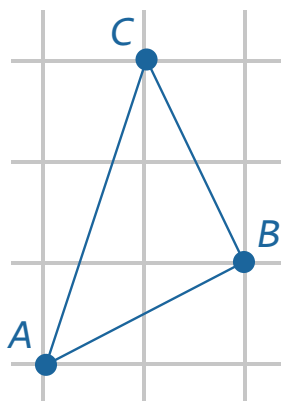


Úloha:

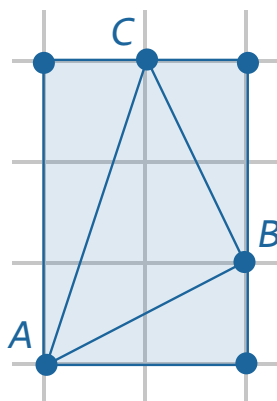
Sestroj v mříži obrazec: $A \rightarrow \rightarrow \uparrow B \uparrow \uparrow \leftarrow C \leftarrow \downarrow \downarrow \downarrow A$.
Jaký útvar vznikne?

Komentář pro učitele:

Oproti předchozí úloze je tato náročnější, protože žádná strana výsledného trojúhelníku neleží v přímce mříže. Očekáváme trojúhelník jako na obr. 1. Běžně se ale ve třídách stává, že žáci sestrojí obr. 2. Tím se v mříži objeví nejen požadovaný trojúhelník, ale také jeho rám (tedy šipkový zápis trojúhelníku), někdy dokonce jen rám bez trojúhelníku. Žáci vlastně zaznamenávají celé cesty, nikoli jen vrcholy, které mají spojit úsečkou.



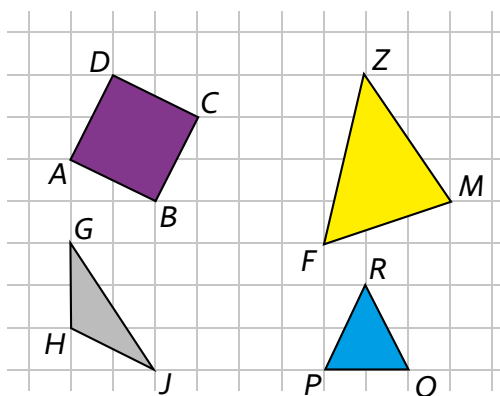
Obr. 1



Obr. 2

Najdi v mříži bod, v němž cesta končí/začíná (od konceptu k procesu)

Úloha:



Najdi v mříži bod, v němž cesta končí.

- a) $A \rightarrow \uparrow \uparrow$
- b) $A \downarrow \downarrow$
- c) $A \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \downarrow \leftarrow \leftarrow$
- d) $R \uparrow \uparrow \leftarrow \downarrow$
- e) $A \uparrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \rightarrow \rightarrow$
- f) $B \leftarrow \leftarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \uparrow \uparrow \uparrow$

Komentář pro učitele:

Úkolem žáků v úloze je dokončit neúplný šipkový zápis. Zatím nezapisují šipkovým zápisem celý útvar, ale pouze vzájemnou polohu dvou bodů. Tyto body jsou však zároveň vrcholy mřížových mnohoúhelníků. Pro některé žáky to může být komplikujícím parametrem. Také například proto, že výplň útvarů neumožňuje vidět linky mříže.

Chceme sledovat:

- jak žák koncový bod najde (zda jde z výchozího bodu podle šipek, zda zkouší zvolit koncový bod a pak kontroluje, že šipky odpovídají, atd., tedy sledujeme strategie řešení).

Poznátky:

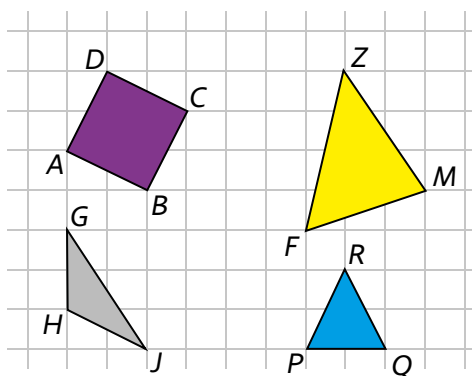
- Úlohu žáci řešili velmi rychle. Začínali vždy ve výchozím bodě a cestu si ukazovali v obrázku prstem, někdo značil tužkou a následně gumoval.
- V úloze se objevovaly drobné chyby, především v momentě, kdy se žáci přepočítali v počtu šipek (nejčastěji u předposlední a poslední úlohy). Někdo si do samostatné mříže vyznačil počáteční bod a cestu, ale koncový bod vyznačit zapomněl.
- Ojediněle některým žákům dělalo potíže ujasnit si, kde je počáteční bod.
- Někteří žáci si do obrázku zakreslovali část mříže.
- Objevila se také strategie krácení cesty, kdy u této cesty šel pouze 2 šipky doprava a 1 šipku dolů:

f) $B \leftarrow \leftarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \uparrow \uparrow \uparrow$

Následná diferenciacce, reedukace

- Jako následnou práci můžeme vytvořit podobnou úlohu s nevybarvenými geometrickými útvary, případně postupovat dle dalších typů úloh.
- Při potížích úlohu zjednodušíme tím, že pod geometrickými útvary necháme rastr mříže.

Úloha:



Najdi v mříži bod, v němž cesta začíná.

- a) $\uparrow\uparrow G$; b) $\downarrow\downarrow\leftarrow P$; c) $\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow P$; d) $\uparrow\rightarrow\downarrow\downarrow R$.

Komentář pro učitele:

Oproti předchozí úloze, kde žáci hledali koncový bod šipkového zápisu, zde je úkolem žáků najít výchozí bod. To je obecně náročnější, protože je nutné směr šipek změnit na opačný, abychom výchozí bod našli (například v úloze d) můžeme jít od bodu $R \uparrow \rightarrow \downarrow \downarrow F$, což je hledaný bod).

Chceme sledovat:

- jak žák výchozí bod najde (zda se vrací od koncového bodu proti směru šipek, zda zkouší zvolit počáteční bod a pak jde ke koncovému, tedy sledujeme strategie řešení),
- zda je tato úloha pro žáka obtížnější než hledání koncového bodu.

Poznátky:

- Žáci řešili tak, že vycházeli z koncového bodu a obraceli směr šipek.
- Někteří žáci dokreslovali mříž pod geometrické útvary.

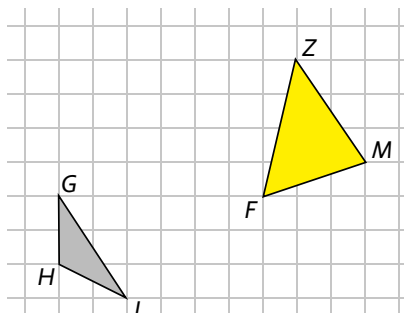
Následná diferenciaci, reedukace:

- Reedukaci řešíme buď diskuzí, nebo vzájemnou žakovskou pomocí, třeba i na velkém modelu (na flipchartu nebo na interaktivní tabuli). Pokud bude někdo chybovat, tak buď neotočí směr šipek, nebo se přepočítá. Tím, že se vyzkouší řešení před spolužáky, se ukáže i chyba nebo správné řešení.

Doplnění zápisu mnohoúhelníku (od konceptu k procesu)

Úloha:

Do čtvercové mříže narýsuj pomocí pravítka trojúhelníky FMZ a GHJ. Dopln chybějící šipky do zápisu těchto trojúhelníků.



$F \rightarrow \rightarrow \rightarrow \uparrow M \uparrow \uparrow \uparrow \leftarrow \leftarrow Z$ F
 G H $J \uparrow \uparrow \uparrow \leftarrow \leftarrow G$

Chceme sledovat:

- zda se žák, který chyboval v předchozí úloze (namísto trojúhelníku rýsoval čtyřúhelník), u této úlohy opraví, tedy zda porozumí, že jsou vrcholy spojeny úsečkou, a ne lomenou čarou,
- zda žák přerýsuje útvary správně, tedy zda některé strany nezkrátí, neprodlouží, neumístí do jiné polohy v mříži,
- podle čeho žák rýsuje trojúhelníky do mříže (zda podle doplněného šipkového zápisu, nebo podle obrázku, tedy zda preferuje procesuální – šipkový zápis –, nebo konceptuální zadání – obrázek),
- zda má smysl tuto úlohu zadávat jako první ze série úloh se šipkovým popisem mnohoúhelníku v mříži,
- zda je náročnější doplnit zápis trojúhelníku GHJ (když schází první šipky).

Poznátky:

- Evidovali jsme potíže žáků 3. ročníků zaznamenat/přenést trojúhelníky do svých mříží, přičemž většinou žáci upřednostňovali přenos konceptuální (podle obrázku).
- Doplnění šipkového zápisu většinou potíží nečinilo. Při reflexi žáci popsali, že pokud znají počáteční bod, nemají potíží najít další bod dle šipkového zápisu.

Následná diferenciací, reedukace:

- Pokud žák chyboval v překreslování, můžeme snížit obtížnost tím, že zadáme jen jeden útvar, jednodušší, např. jedna jeho strana bude v přímce mříže.
- Dále lze využít vzájemnou kontrolu ve dvojici nebo ve skupině a vysvětlení v rámci diskuze žák–žák.

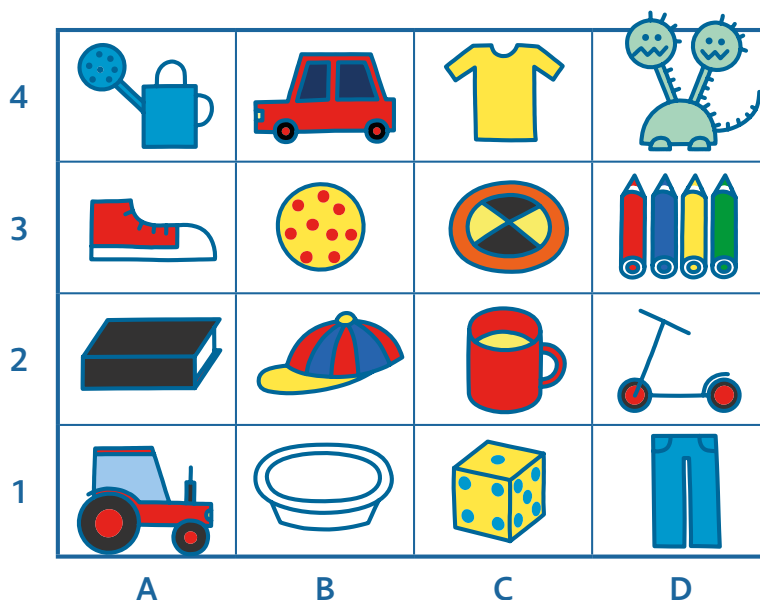
Přechod od šipkového zápisu k souřadnicovému

• Kimova hra

Dříve než se objeví jazyk souřadnic, je vhodné zařadit aktivity připravující tento jazyk. Tím mohou být různé hry (lodě, šachy, Kimova hra), kde se se souřadnicemi pracuje. Dále uvádíme ukázkou Kimovy hry:

Úloha:

Zahraj si Kimovu hru.



Komentář pro učitele:

Cílem Kimovy hry je především rozvíjení krátkodobé paměti. Žák se dívá na obrázek např. 30 sekund, pak se obrázek zakryje a žák zapisuje objekty, které si zapamatoval. Hru lze obohatit o souřadnice. V takovém případě se jedná o přípravnou úlohu k souřadnicovému systému na mřížce. Učitel se může ptát: „Jaký objekt je na poli C2?“ apod. To jsou dobré přípravné úlohy.

Chceme sledovat:

- zda se žák dokáže orientovat v tabulce,
- zda žák dokáže přenést objekt, který vidí, na správné místo na svém obrázku (na své mřížce),
- zda žák k překreslení využívá popis okénka podle souřadnice (např. pole C2).

Poznátky:

- Pro žáky je Kimova hra přitažlivá a velmi je baví. Pokud se hra hrála pouze na množství zapamatovaných věcí, bylo to pro žáky jednodušší než si objekty pamatovat a umisťovat je na správné místo.
- Ukázalo se, že míra úspěšnosti závisí mimo jiné na tom, zda si žáci evidují a překreslují obrázky sami, nebo do předem připravené tabulky. Úspěšnost se také zvyšovala s větším počtem opakování.
- Někteří žáci si pro lepší zapamatování seskupovali obrázky do skupin podle společných znaků.

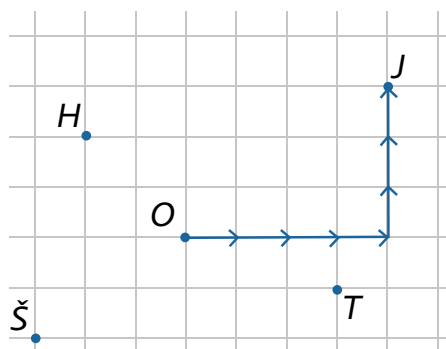
Následná diferenciac, reedukace:

- Protože se jedná o hru, reedukace zde není potřeba. Hru můžeme zjednodušit snížením počtu objektů nebo tím, že budeme nejprve hrát pouze na množství zapamatovaných objektů bez ohledu na umístění.

• Zavedení počátku

Úloha:

Zahrada má studnu v bodě **O**. Zahradník chce postupně zalít jabloně, hrušně, švestky a třešně. Může ale chodit pouze po vyznačených pěšinkách (po mříži). Na obrázku je vidět cesta k jabloním, ta by šla popsat: $O \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \uparrow \uparrow \uparrow J$. Zapište další cesty od studně k ostatním stromům.



Bod **O** budeme nazývat počátek (počáteční bod), protože při každé cestě budeme začínat v tomto bodě. Nejprve půjdeme vždy ve vodorovném směru, poté ve směru svislém.

Poznátky:

- V úvodní části si žáci připomněli šipkový zápis. Následně učitel (4. ročník) využil na zavedení počátku vlastní aktivitu „Automat“. Ve třídě si žáci vytvořili na podlaze čtvercovou mříž ze švihadel, do mřížových bodů umístili předměty ze třídy. Hru realizovali žáci ve dvojici, kdy jeden žák popisoval cestu druhému, který stál na začátku (na počátku). Ve třídě v tuto chvíli nebyla zavedena konvence, že se pohybujeme nejprve ve vodorovném směru a následně ve svislém. Dále nebylo zavedeno, že šipky stejného směru zapisujeme k sobě. Na tuto činnost učitel následně navázal následující úlohou, do které byl vložen počátek O:

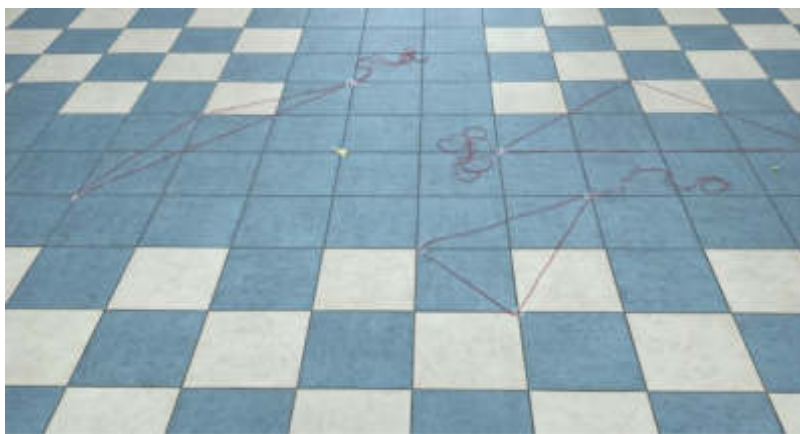
MŘÍŽ

Zapiš co nejvíce bodů z obrázku pomocí šipkového zápisu. Bod O je počátek.

O 2←3↑ A	O 1→1↑ F
O 1↑ B	5→2↑ M
O 1→4↑ C	3→5↑ Z
O 1←5↑ D	2→2↓ P
O 1←1↑ G	4→2↓ Q
O 2←1↓ H	3→ R
O 2↓ J	

Většina žáků úkol pochopila, objevily se dílčí chyby nebo nepřesnosti, a to nepoužití nejkratšího šipkového zápisu, popis trojúhelníku šipkovým zápisem, a ne od počátku, někteří nepřiradili šipky stejného směru k sobě, někteří špatně přečetli umístění bodů v síti. Tuto aktivitu zvládli i žáci, kteří nebyli přítomni na úvodní vyvozovací hře Automat.

Další vhodnou aktivitou je ukázka práce, která byla popsána i výše v úloze o rýsování mnohoúhelníku podle šipkového zápisu, kde byla zmíněná jako reedukační nebo evokační nástroj pro cestování v mříži. Využít tuto dramatizaci lze i pro vyvození počátku (počátečního bodu, od kterého udáváme polohu všech dalších bodů). Učitel zvolí mřížový bod na dlaždicové čtvercové podlaze (může ho označit nebo tam stát). Postupně k sobě volá žáky a dává jim pokyny, kam mají na dlažbě dojít. Všechny tyto povely provádí žáci od místa učitele (počátku). Žáci pak mohou tvořit různé mnohoúhelníky, jak je vidět na obrázku. Zbytek třídy, který není na dlažbě, si může učitelovy pokyny zapisovat pomocí šipek a vyznačovat body a útvary na papír do mříže.



- Jinou cestou pro vyvození bylo využití této úlohy:

Úloha:

Sestroj podle popisu body B , C , D . Bod A je počátek.
Jaký útvar body A , B , C , D vytváří?

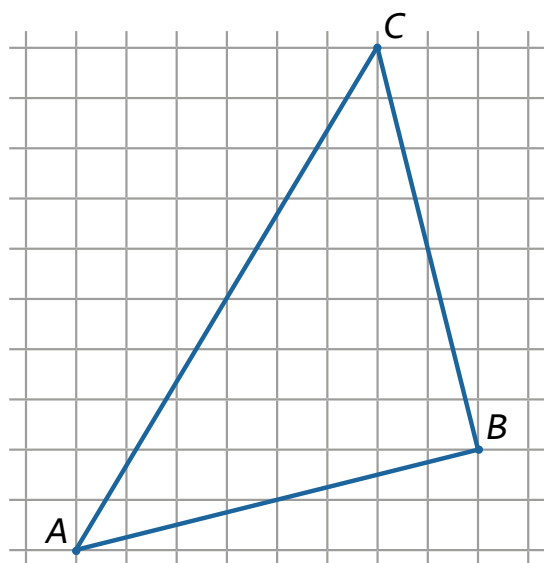
- $A \rightarrow \rightarrow \rightarrow B$, $A \rightarrow \rightarrow \rightarrow \uparrow \uparrow C$, $A \uparrow \uparrow D$
- $A \rightarrow \rightarrow \rightarrow \uparrow B$, $A \rightarrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow C$, $A \leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow D$
- $A \rightarrow \rightarrow \uparrow \uparrow B$, $A \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow C$, $A \leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow D$

Žáci dostali výzvu diskutovat, v čem se tato úloha liší od těch, které v mříži doposud řešili. Zaznělo, že vrcholy čtyřúhelníků jsou popsány od bodu A . Jako další aktivity lze porovnávat oba způsoby zápisu, jeden útvar zapsat oběma způsoby, zvolit jiný počátek a zapisovat stejné útvary. Žákům můžeme předložit zápisy, kde jsou vždy uvedeny nejprve šipky ve vodorovné orientaci a až následně ve svislé. Diskuzí nad nimi podpoříme vyvození konvence, kterou zmiňujeme dále.

V tuto chvíli žáci používají šipky. Podstatná je zde ale jiná věc – **konvence**. Ta zní: „**Nejprve se pohybuje me ve vodorovném směru, poté teprve ve svislém.**“

Jazyk souřadnic se objevuje vlastně z důvodu potřeby. Taková potřeba se objevuje v úlohách s větším počtem šipek. Žáci hledají jiné způsoby, jak situaci zaznamenat, protože zápis šipek je velmi zdlouhavý.

Úloha:



Já jsem si v mříži
narýsoval trojúhelník.



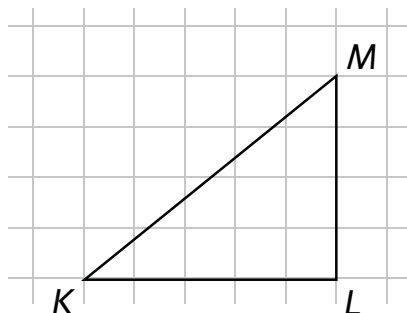
A takto jsem ho popsal:
A →→→→→ ↑↑ B,
A →→→→→ ↑↑↑↑↑↑↑↑ C.

• Zkrácení zápisu

Poté se již objeví zjednodušený jazyk, který dosti připomíná jazyk souřadnic.

Úloha:

Jednodušší zápis šipkového zápisu:



Místo zápisu

$K \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow L$, $K \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \uparrow \uparrow \uparrow M$,

používá zápis

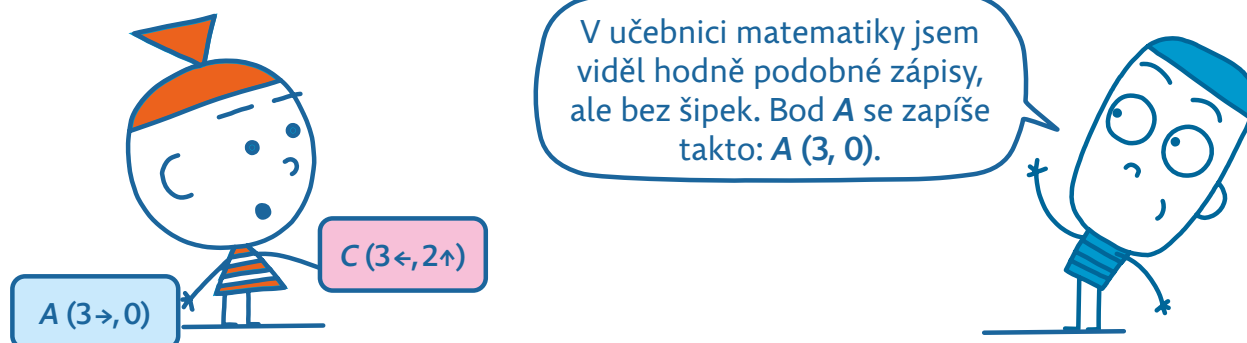
$K(5 \rightarrow, 0)L$, $K(5 \rightarrow, 4 \uparrow)M$.

• Souřadnicový zápis

Dále se již domluví **další konvence**: **vpravo a nahoru od počátku mají čísla znaménko +, vlevo a dolů od počátku znaménko -**. To je věc, kterou nelze objevit, je to dohodnuté pravidlo. Proto jej ukáže učitel nebo odhalí příběh dětí, jak ukazuje následující úloha.

Úloha:

Kira zjednodušila dlouhé šipkové zápisy použitím čísel.
Vyznač do mříže počátek $(0, 0)$ a body $A (3 \rightarrow, 0)$, $B (2 \rightarrow, 1 \uparrow)$, $C (3 \leftarrow, 2 \uparrow)$,
 $D (2 \leftarrow, 4 \downarrow)$, $E (3 \rightarrow, 2 \downarrow)$, $F (4 \leftarrow, 1 \downarrow)$.



Elmar: Když je šipka doprava nebo nahoru, napsalo by se znaménko plus, ale matematici ho nepíší. Když je šipka doleva nebo dolů, dám tam znaménko minus. Tedy bod C se zapíše takto: $C (-3, 2)$.

Zapiš bez šipek polohu bodů B , D , E a F .

Na výstupu z 5. ročníku očekáváme matematický zápis v **kartézské soustavě souřadnic**: $A (4, -1)$, $B (7, 0)$, $C (6, 3)$, $D (3, 2)$. Cesta k němu vedla přes jednotlivé etapy popsané výše, tedy od šipek bez čísel přes šipky s čísly, šipky s čísly v závorkách, závorky s čísly bez šipek (od sémantiky krokování k abstrakci v číslech).

Konstrukce čtverců v nevodorovných polohách

Úloha:

Známe střed O čtverce $ABCD$ (bod O je počátek) a vrchol A .
Narýsuj čtverec $ABCD$ a vrcholy B , C , D popiš souřadnicemi.

- | | |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| a) $A (1 \rightarrow, 1 \downarrow)$ | b) $A (2 \leftarrow, 0)$ |
| c) $A (2 \leftarrow, 1 \uparrow)$ | d) $A (3 \rightarrow, 2 \uparrow)$ |

Úloha:

Známe střed $S (3 \rightarrow, 3 \uparrow)$ čtverce $ABCD$ a vrchol A .
Narýsuj čtverec $ABCD$ a vrcholy B , C , D popiš souřadnicemi.

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| a) $A (4 \rightarrow, 4 \uparrow)$ | b) $A (5 \rightarrow, 3 \uparrow)$ |
| c) $A (1 \rightarrow, 2 \uparrow)$ | d) $A (6 \rightarrow, 5 \uparrow)$ |

Úloha:

Narýsuj čtverec $OKLM$, když je dána jeho uhlopříčka OL (bod O je počátek) a vrcholy K, M popiš souřadnicemi.

a) $L(0, 2\uparrow)$

b) $L(1\rightarrow, 3\uparrow)$

c) $L(2\rightarrow, 4\uparrow)$

d) $L(3\rightarrow, 5\uparrow)$

Komentář pro učitele:

Výrazně gradovaná série úloh, kdy žák propojuje znalosti o vlastnostech čtverce se souřadnicovým zápisem bodů. Jiné cíle plní úloha, když žáci řeší s pravítkem s ryskou a kružítkem, jiné, když tyto pomůcky nepoužívají. Osvědčenou cestou je konstrukce vrcholů bez použití pomůcek a následné ověření vlastností čtverce s pomůckami. Některé žáky může zmást zavedení počátku. Můžeme upozornit, že počátek O má souřadnice $(0, 0)$.

Chceme sledovat:

- práci žáka se souřadnicemi, porozumění zápisu (konstrukce počátku, osy, směr kladný/záporný, počet kroků),
- pojmy ve čtverci – vrchol, střed, uhlopříčka (nepředpokládáme, že by žák chyboval v pojmech, ale zda a jak používá vlastnosti čtverce),
- strategie řešení – jak žák najde scházející vrcholy čtverce, jak vysokou náročnost úlohy zvládne (poloha čtverce), zda a jak používá rámování a pokud ne, jakou volí alternativní strategii.

Mřížová úsečka, střed úsečky, osa úsečky, klasifikace trojúhelníků

Úloha:

Narýsuj úsečku UV : $U\rightarrow\rightarrow V$.

Najdi mřížový bod X tak, aby bylo $|UX| = |VX|$.

Najdi více takových bodů.

Popiš, jak je možné takové body hledat.

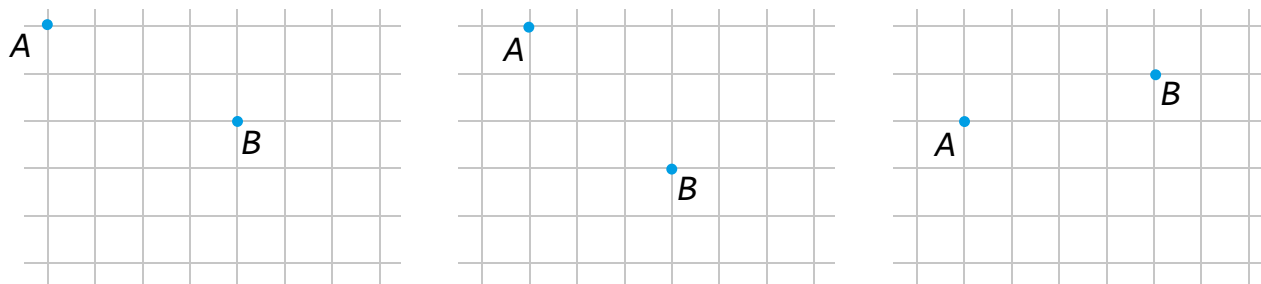
Rozhodni, zda pro všechny takové body platí:

UVX je trojúhelník rovnoramenný.

Hledej největší i nejmenší takový trojúhelník.

Úloha:

Najdi v mříži střed úsečky.



Komentář pro učitele:

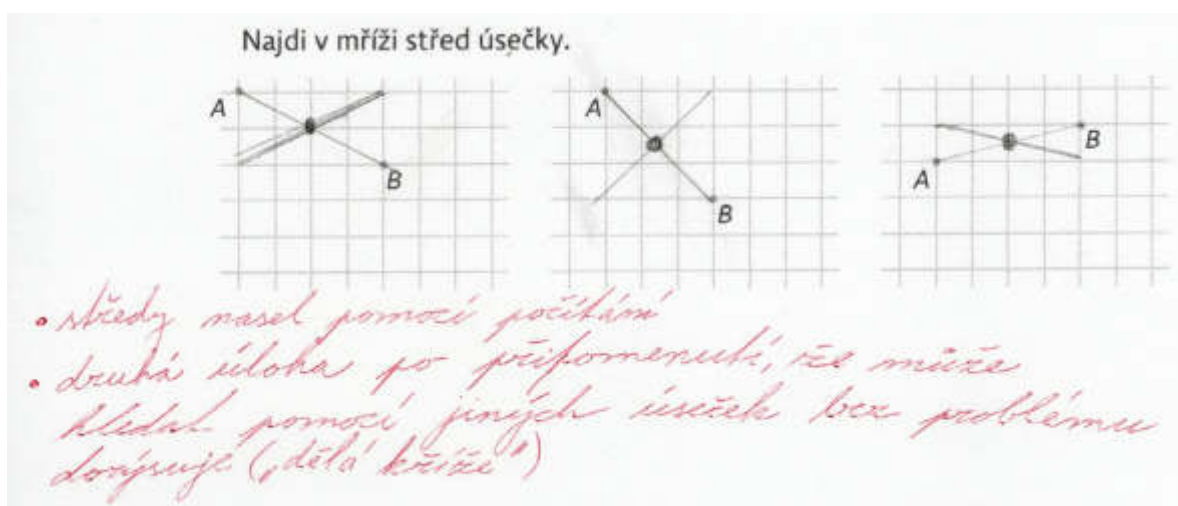
Úloha cílí na hledání strategií ke zjištění středu úsečky. Žáci by měli experimentovat a sdílet způsoby, jak tento úkol vyřešit. Záleží přitom na konkrétní délce a umístění dané úsečky a jejího středu. Lze očekávat, že pro žáky budou jednodušší ty úlohy, kde budou středy v mřížových bodech. Různé strategie jsou vhodné pro různé případy. Předtím než budou žáci hledat střed úsečky na mříži, měli by mít zkušenosti s hledáním středu provázku, proužku papíru nebo gumičky znázorňujícími úsečku na geoboardu.

Chceme sledovat:

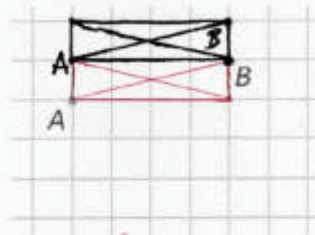
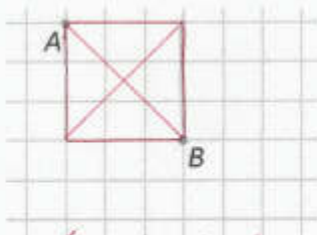
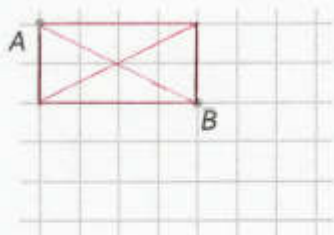
- jakou strategii žák zvolí pro nalezení středu úsečky,
- zda žák dokáže využít oporu o mříž, nebo se bude snažit využívat jiné pomůcky.

Poznátky:

- Žáci 4. ročníků využívali tyto strategie: odhad, využití čtvercové mříže, např. dokreslení jiné mřížové úsečky, která danou úsečku rozpůlí, nebo zarámování úsečky do obdélníku, jehož je úhlopříčkou, a rozdělení obdélníku, využití pravítka (měření poloviny nebo ověření správnosti řešení), početní metoda (změření délky úsečky a zjištění poloviny výpočtem), viz ukázky řešení:

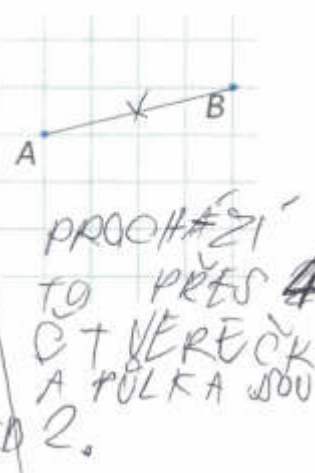
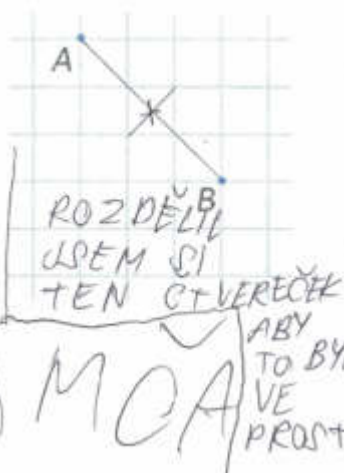


Najdi v mříži střed úsečky.



- vzhledem k umístění bodů by mělo čtyřúhelníky narysovat jinak (musí se vejít do čtverečové mříže)

3) Najdi v mříži střed úsečky.



- Někteří žáci si vzpomněli na zkušenosti z hledání středu úsečky na geoboardu.
- Někdo využil jednotkové úsečky mříže, jednotkové čtverečky nebo šipkový zápis (vše se týká toho, že střed lze najít pomocí kroků nebo jednotky mříže).
- V 5. ročnících se objevily obdobné strategie. Někteří žáci sestrojili úsečku, doplnili obdélník a zjistili, že úsečka je jeho úhlopříčkou. Sestrojili tedy druhou úhlopříčku a našli průsečík. Otázkou je, zda to bylo z důvodu ujištění se o správnosti řešení, nebo jako nezbytný krok k nalezení řešení. Objevilo se také vertikální dělení mříže. Někdo nerámoval celou úsečku, ale její části (skládání rámování).

Následná diferenciacce, reedukace:

- Pokud mají žáci potíže s terminologií (s pojmem střed), přeformulujeme zadání tak, že hledáme takový bod, který je od bodu A i B stejně vzdálený.
- Žáci, kteří řešili pomocí pravítka/kružítka, mohou být vyzváni k nalezení řešení bez této pomůcky.
- Další výzvy a diskuze směřují k tomu, jaké vlastnosti má střed úsečky, průsečík úhlopříček pravoúhelníku, výzva k sestrojení pravoúhelníků ve vodorovné poloze do mříže a vyznačení úhlopříček, sestrojení více mřížových úseček ve vhodné poloze (aby střed ležel v mřížovém bodě) apod.
- Jinou možností je jít v poznávacím procesu o úroveň níž a využít manipulaci s předměty – tedy hledat střed provázku, proužku papíru nebo gumičky znázorňujícími úsečku na geoboardu. Nebo lze využít dramatizaci na velké mříži (například čtvercová podlaha).

Úloha:

Je dán bod $A(0, 0)$. Najdi střed úsečky AB a urči jeho souřadnice, když bod B má souřadnice:

a) $(6, 0)$

b) $(4, 4)$

c) $(-4, -10)$

d) $(8, -2)$

e) $(-6, -10)$

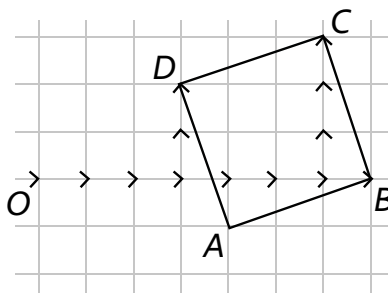
f) $(5, -2)$

Chceme sledovat:

- porozumění vazbě mezi šipkovým a souřadnicovým zápisem, zda má žák rozdílné výsledky v odlišných typech jazyků (např. šipkový používá správně, souřadnicový chybně a naopak),
- zda žák rozumí pojmu střed úsečky, zda používá pro řešení mříž (či si nějak pomáhá – pro ověření nebo samotnou konstrukci – měřením).

Úloha:

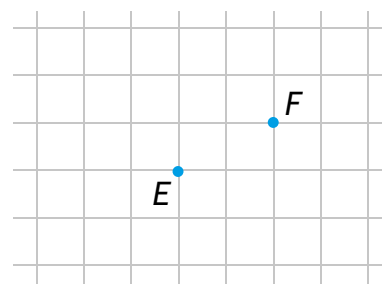
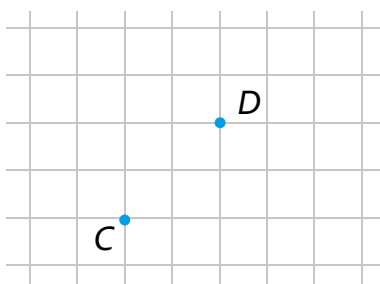
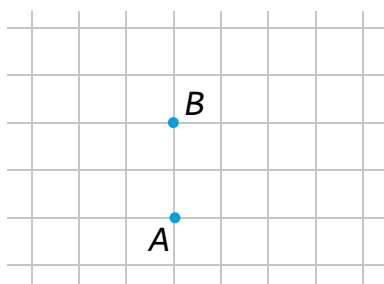
Přerýsuj obrázek do své mříže a dokresli do něj body $E(2 \rightarrow, 5 \uparrow)$, $F(10 \rightarrow, 1 \uparrow)$. Oba tyto body popiš i šipkovým zápisem. Sestroj a popiš oběma zápisy body G , H a J tak, aby G byl středem úsečky CF , H byl vrcholem čtverce $FCAH$ a J vrcholem čtverce $ACEJ$.



Příprava na osu úsečky

Úloha:

Vytvoř úsečky AB , CD a EF . Ke každé úsečce najdi bod, který je stejně daleko od obou krajních bodů. Najdi další takové body.



Komentář pro učitele:

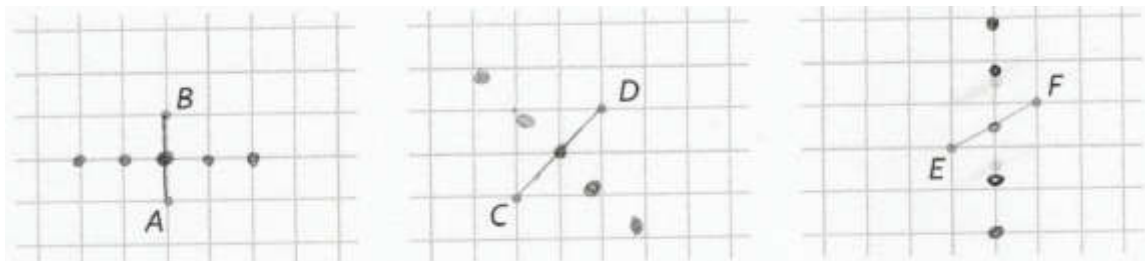
Navazujeme na úlohu s hledáním středu úsečky. To je bod, který je řešením i této úlohy. Avšak nyní jsou žáci vyzváni k tomu, aby hledali více bodů, které jsou stejně vzdálené od krajních bodů úsečky. Hledané body leží na přímce, která je kolmá k dané úsečce a prochází jejím středem (jedná se tedy o osu úsečky). Někteří žáci se mohou spokojit s nalezením mřížových bodů, které lze na omezeném obrázku zakreslit. Mohou se ale najít i žáci, kteří budou mříž prodlužovat a hledat další body. Nebo některý žák může přijít s tím, že takových bodů je mnoho (nekonečně mnoho), a popíše, kde leží, i když nebude mít potřebu je přímo zakreslovat. Tyto různé přístupy k řešení úlohy jsou pro učitele dobrou diagnostikou pokročilosti geometrického myšlení žáků – kdo z žáků zůstává na úrovni konkrétních bodů a kdo už je na prahu abstrakce a dokáže pracovat i s body, které přímo na mříži nevidíme.

Chceme sledovat:

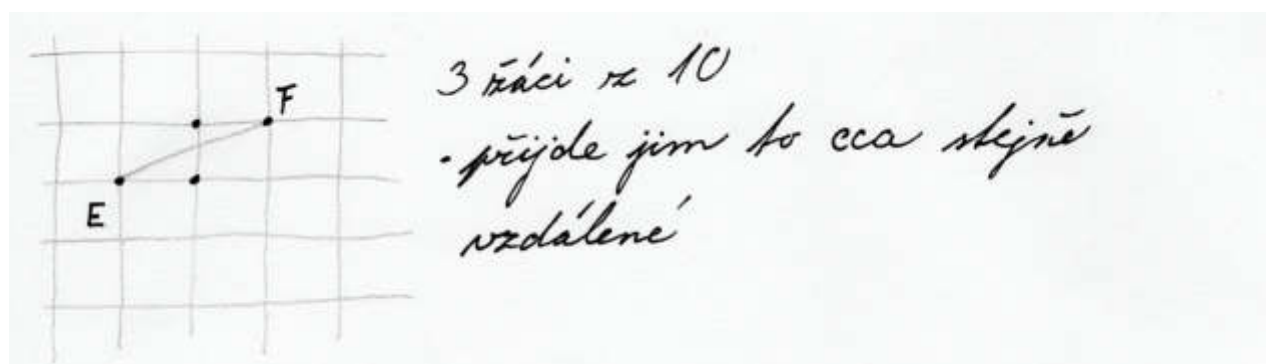
- zda žáci jako první vyznačí střed úsečky,
- jakou strategii žáci používají k nalezení dalších bodů,
- zda si uvědomí, že takových bodů je nekonečně mnoho,
- zda si uvědomí, že takové body mohou být i nemřížové,
- zda vyznačí nějaký nemřížový bod,
- zda si všimnou, že body leží na přímce,
- zda vyznačí všechny body (tj. přímku, osu).

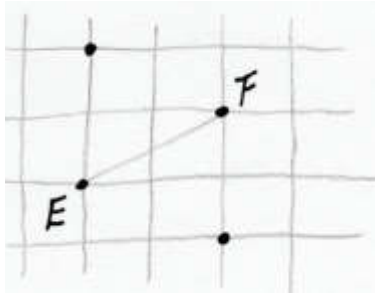
Poznátky:

- U podúloh a), b) žáci neměli potíže.
- Někteří žáci si nalezené body v mříži přeměřovali pomocí pravítka, zda jsou skutečně stejně daleko od výchozích bodů.
- Někdo odhadoval a nevyužil linky mříže.
- Někteří žáci hledali i další body, u podúlohy c) se objevilo i chybné řešení:

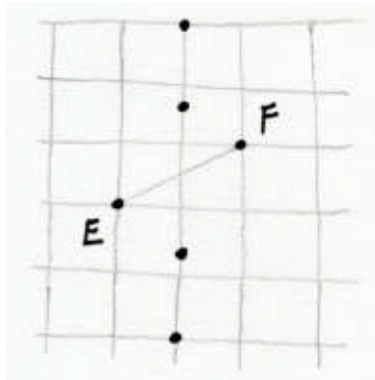


- Dále vkládáme ukázkou, jaká řešení podúlohy c) se objevila v rámci jednoho 4. ročníku:

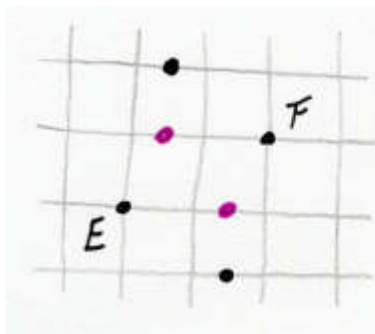




2 žáci ≈ 10
- opticky jim to přijde stejně vzdálené



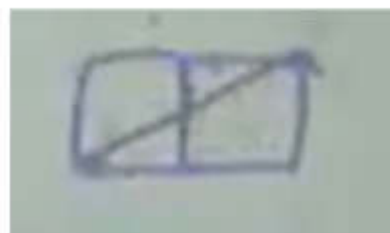
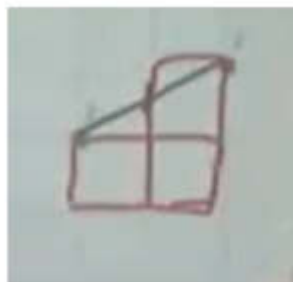
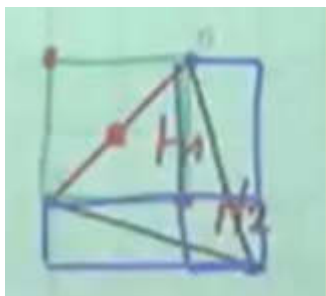
1 žákyně ≈ 10
• přijde ji to osově souměrné jako u a) a b)



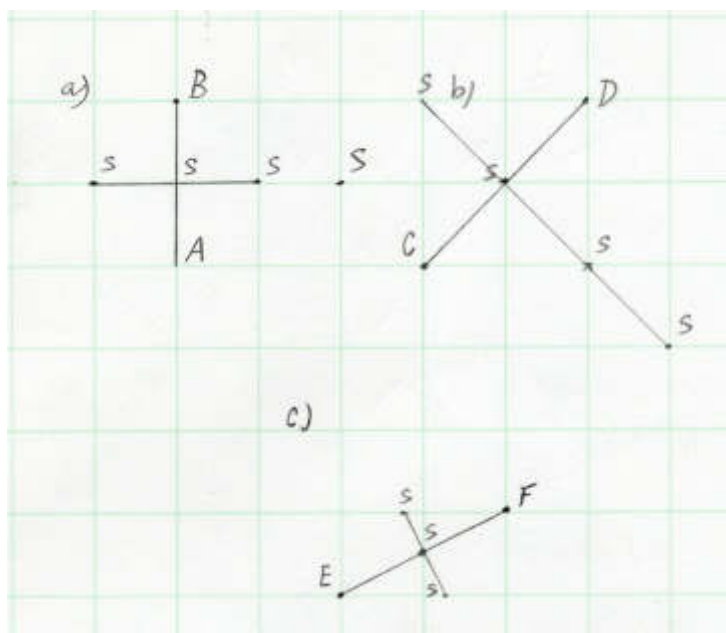
• počítají kroky (1 a půl a 2 a půl od obou bodů)

Tyto chyby vyplývají z nerozlišení délky úsečky v lince a úsečky, která je šikmá a její délka je většinou rovna iracionálnímu číslu. Dále místo vzdálenosti dvou krajních bodů berou žáci body, které jsou stejně vzdálené od středu úsečky EF, nebo hledají body, které jsou v podstatě středově souměrné podle tohoto středu. V posledním případě jsou černé body vzdálené „dva a půl kroku“ od bodu E i F, když cestujeme po linkách mříže. Ale nás zajímá „vzdušná vzdálenost“, tedy nejkratší možná vzdálenost bodů. A to v tomto případě žákovo řešení nesplňuje – kdybychom změřili pravítkem délku úsečky od černého bodu k bodu E a pak délku úsečky od černého bodu k bodu F, nebudou délky stejné.

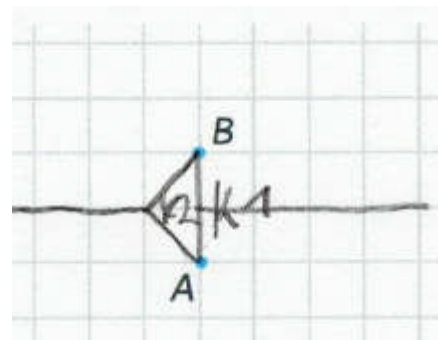
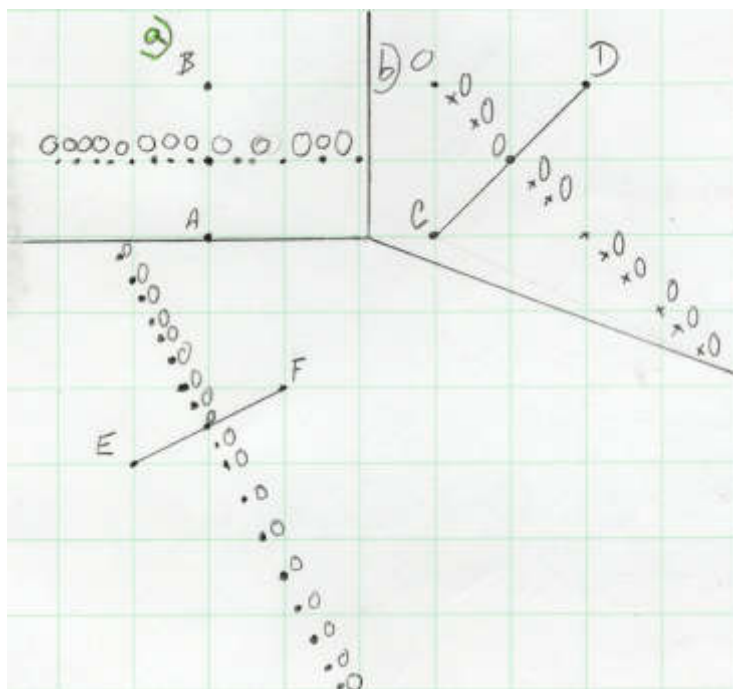
- Někteří žáci využili rámování. Našli jen několik (resp. jeden) mřížových bodů.



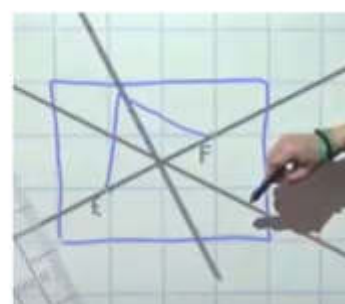
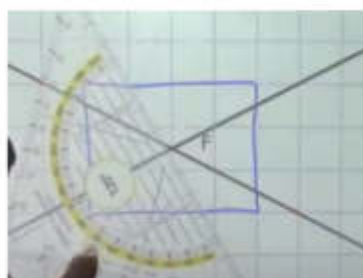
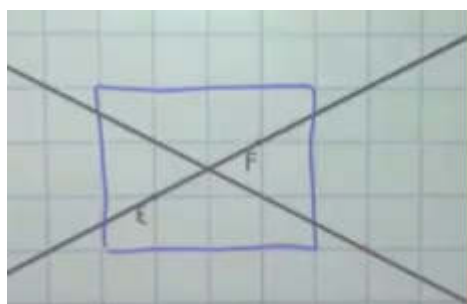
Objevilo se také využití kružítko a trojúhelníku s ryskou (tvorba kolmic):



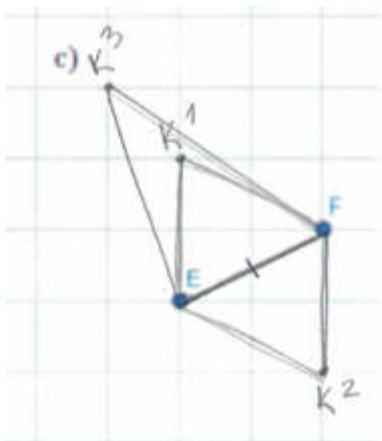
- Pro některé žáky nebyl problém vyznačovat nemřížové body, viz ukázky:



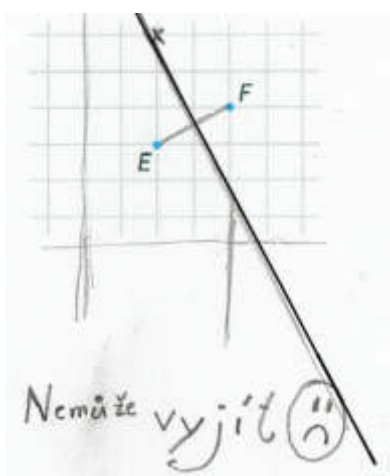
Ne všechna řešení jsou správně, žáci už objevili vlastnost osy úsečky (je kolmá k úsečce). Diskutují, kolik má vlastně úloha řešení, když nenašli žádný mřížový bod (nebo jen málo). Mřížové body zapisují desetinným číslem.



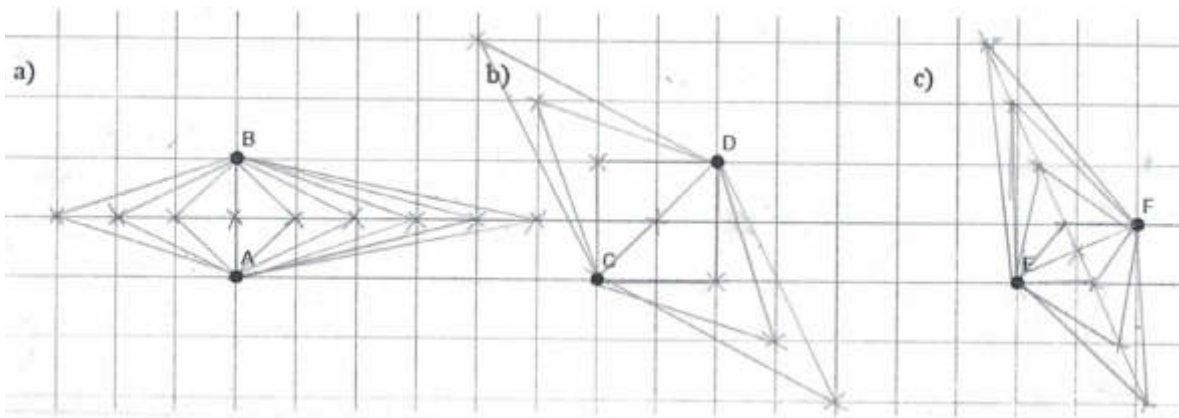
Opakuje se chybný úsudek, že úhlopříčka obdélníku je stejně dlouhá jako jeho strana.



Někdy žák správně použije kolmost osy, ale pak napíše, že žádný bod nesplňuje.



- Poměrně často se objevovalo konstruování rovnoramenných trojúhelníků:



Následná diferenciacce, reedukace:

- Cíleně lze pro reedukaci využít práci s rovnoramennými trojúhelníky (např. hledání třetího bodu ke dvěma zadaným tak, aby vytvořili takový trojúhelník).
- Manipulace s provázky nebo dřívky. Ke dvěma krajním bodům dané úsečky přiložíme stejně dlouhé provázky nebo dřívky (ke každému bodu přiložíme konec jednoho provázku nebo dřívky). Provázky napneme a hledáme místo, kde se druhé konce provázků spojí (nebo s dřívky). Dané místo je hledaným bodem, který je stejně vzdálený od krajních bodů úsečky.
- Můžeme také využít dramatizaci s žáky, kdy dva stojí a třetí se má postavit na takové místo, aby byl stejně daleko od nich.

Úloha:

Rodiny Kolářovi (K), Lounští (L) a Mladí (M) si chtějí koupit společnou chatu. Dohodli se, že chatu budou mít všechny rodiny stejně daleko. Pomoz jim najít správné místo. Urči jeho souřadnice.

a) K (0, 0), L (4, 0), M (2, 2)

b) K (0, 0), L (1, 5), M (6, 4)

c) K (0, 0), L (0, 4), M (3, 1)

Komentář pro učitele:

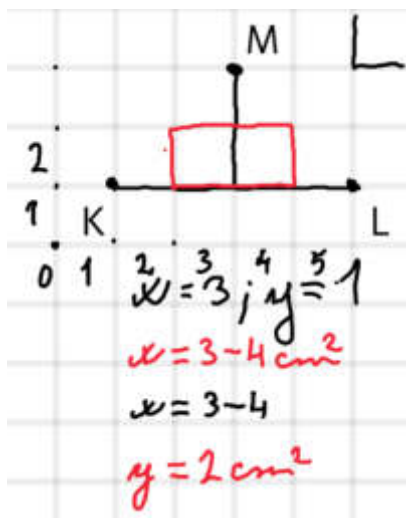
Jedná se o náročnou úlohu, kdy žáci hledají **střed kružnice opsané trojúhelníku**. Zajímá nás, zda jsou žáci schopni úlohu řešit s využitím předchozích zkušeností s osou úsečky. Jinou strategií, kterou žáci nejspíše použijí, je práce s mříží. K tomu jim pomohou úlohy, kdy žáci pracují se stejně dlouhými úsečkami v mříží (např. úhlopříčky dvou k sobě jinak natočených obdélníků 3×1). Úloha využívá předchozí série úloh.

Chceme sledovat:

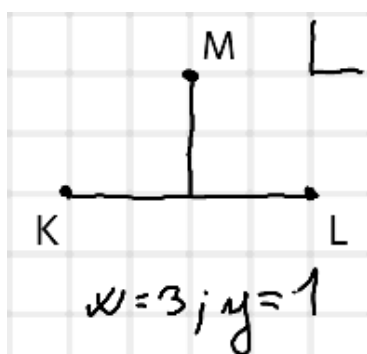
- zda jsou žáci schopni získané zkušenosti využít a pracují s novým pojmem osa úsečky,
- jak určí souřadnice, když nemají počátek soustavy.

Poznátky:

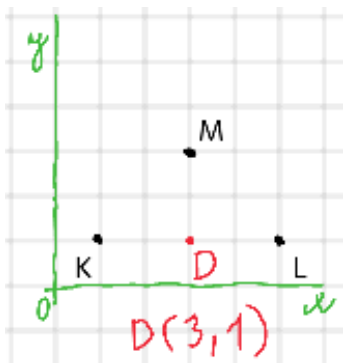
- Někteří žáci řeší znázornění chaty – zvažují, zda se jedná o bod, nebo čtverec/obdélník... viz obrázek, červený obdélník jako půdorys chaty:



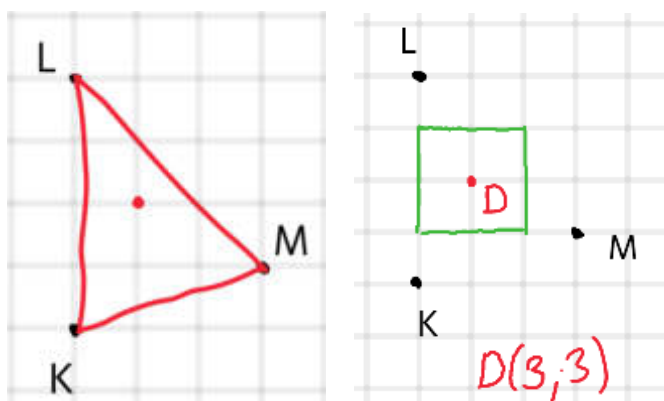
- Pro mnoho žáků obtížná úloha, nedokázali využít poznatků k ose úsečky.
- Strategie „podívám se a vidím“.



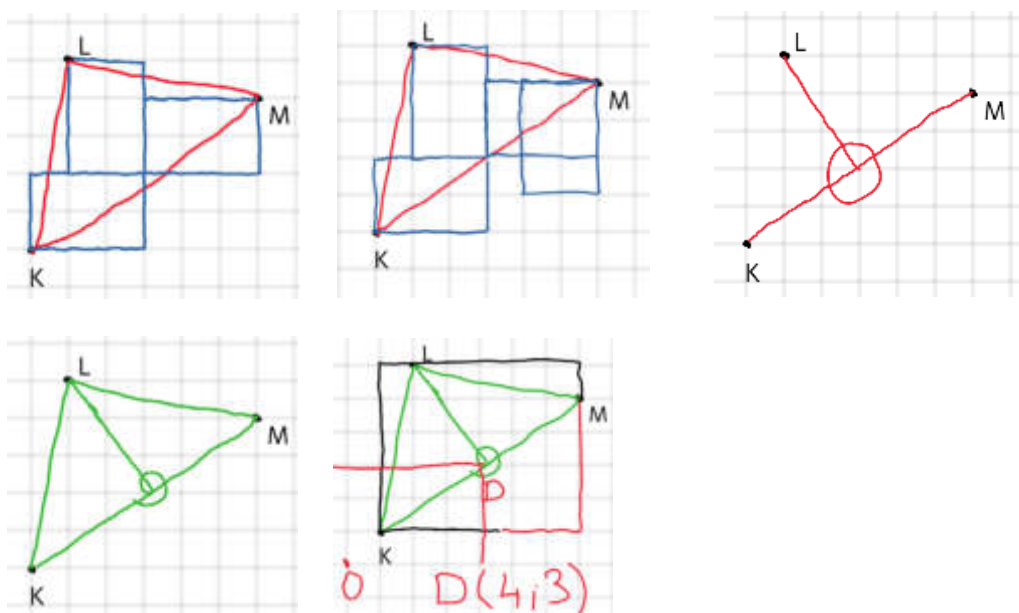
- Žákům vadí, že nemají určen počátek soustavy. Nevšimli si souřadnic K (0, 0), resp. je nespojili s poznatkem, že počátek soustavy má tyto souřadnice. Volí zcela nový bod O (také (0, 0)), takže změnili původní souřadnice. Našli bod D jako výsledek úlohy výše uvedenou strategií „podívám se a vidím“.



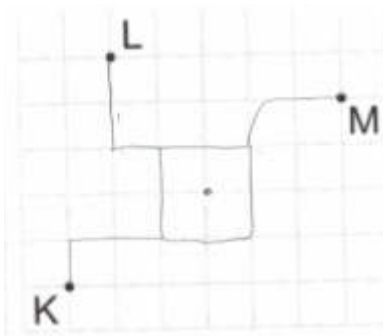
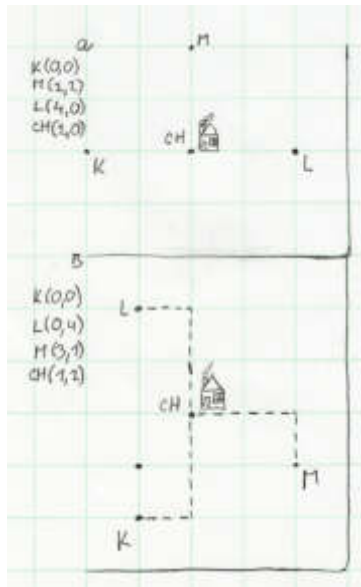
Žák dokreslil trojúhelník a intuitivně našel bod, jenž má být řešením. Vypadá to jako průsečík os stran, které ale nekonstruoval. Vzhledem k upraveným souřadnicím určil polohu průsečíku D (3, 3), což odpovídá původnímu počátku a poloze D (2, 2).



Žák načrtl trojúhelník, tři rámy, viz obrázek. Pak dokazuje, že úhlopříčky shodných obdélníků jsou shodné. Třída diskutuje, jak ví, kde budou rámy. Proč nemůže být rám jinak, viz obr.? Potvrzení strategie „intuitivně najít střed“. Strategie, co sestavit a co ne... nemusí být trojúhelník, viz obr. A diskuze k efektivitě strategií... nerámovat, stačí jen vyznačit úseky, viz zelený obrázek. A zápis souřadnic už bez potíží – nový počátek soustavy.



- Objevilo se putování po mříži a hledání stejně dlouhé cesty, jako počátek byl zvolen jeden z bodů, zde např. bod K:

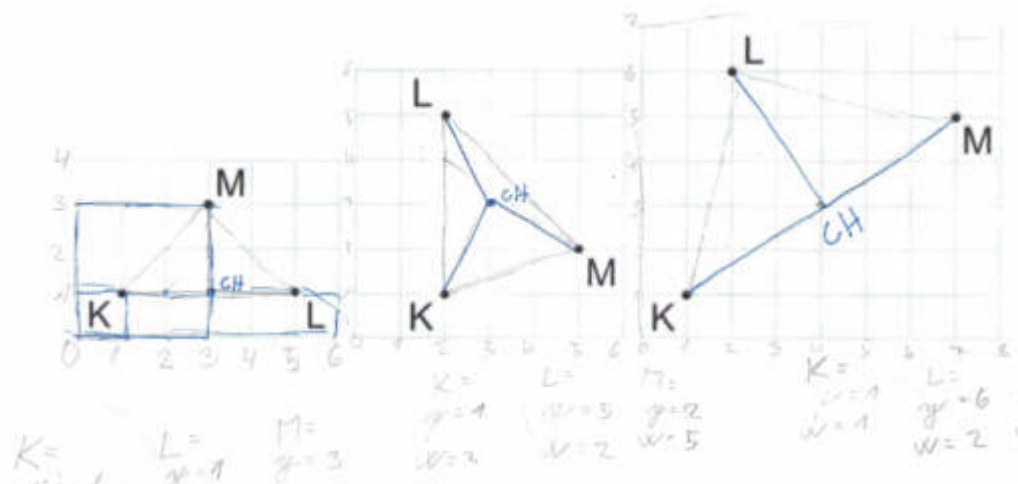


- Jinou strategií bylo hledání pomocí obdélníků. Chata je tam, kde se všechny 3 obdélníky setkaly svými vrcholy:

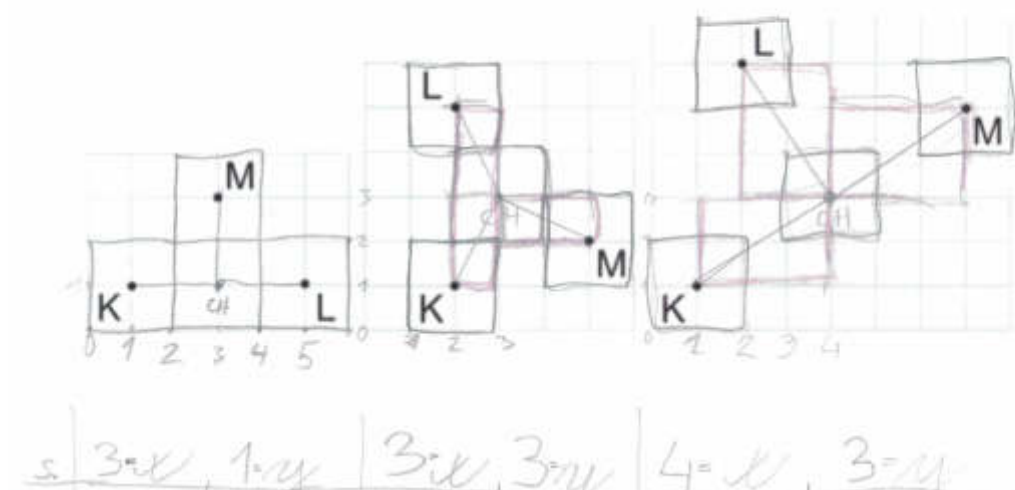


- Další ukázky zajímavých řešení:

Rodiny Kolářovi (K), Lounští (L) a Mladí (M) si chtějí koupit společnou chatu. Dohodli se, že chatu budou mít všechny rodiny stejně daleko. Pomoz jim najít správné místo. Urči jeho souřadnice.



Rodiny Kolářovi (K), Lounští (L) a Mladí (M) si chtějí koupit společnou chatu. Dohodli se, že chatu budou mít všechny rodiny stejně daleko. Pomoz jim najít správné místo. Urči jeho souřadnice.



Žák ověřoval, že hledané místo má stejně dlouhé šipkové cesty ke všem třem bodům K, L, M. Vždyť x, y jsou souřadnice bodů. Jenom žák zapomněl nebo nerespektoval, že počátek soustavy je v bodě K, určil si vlastní počátek $(-1, -1)$.

Následná diferenciacce, reedukace:

- Jednou z možností reedukace je opět manipulace s pomocí provázků nebo dřívěk popsaná u předchozí úlohy. Pokud budou mít žáci s touto strategií zkušenost v situaci se dvěma body, mohou ji využít i zde.
- Pro žáky je problém uvědomit si, že se jedná o průnik os stran, tedy že každá osa je množina všech bodů, ze kterých jsou krajní body úsečky stejně vzdáleny, ale osy jsou tři, protože strany (resp. rodiny) jsou tři. (Bylo by možné najít jen průsečík dvou os, ale to by žáci museli vědět, že se všechny tři protínají ve stejném bodě, což neví). Tvoříme tedy dvojice ze tří prvků. To už je kombinatorika. Hledáme množinu daných vlastností (všechny body, pro které platí...). Jedná se o obtížnou úlohu.

Velikosti geometrických útvarů

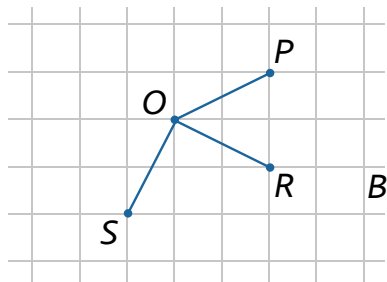
Velikost je obecný pojem pro délku úsečky, obsah obrazce a objem tělesa. Na 1. stupni místo pojmu „velikost“ doporučujeme používat konkrétní pojmy délka, obsah, objem. Tyto velikosti (délky, obsahy, objemy) se získají měřením – útvaru je přiřazeno číslo, tj. jeho velikost (délka, obsah, objem). V následujících podkapitolách se budeme věnovat jen délce a obsahu, tedy tématům pro čtvercovou mříž.

• Délka úsečky

Obvodem mnohoúhelníku rozumíme součet délek jeho stran. Délku strany lze snadno určit, pokud se jedná o stranu ležící v některé z přímek mříže. Stačí určit počet jednotkových úseček mříže (tj. délku strany jednotkového čtverce). Pokud ale strana mnohoúhelníku v přímce mříže neleží, musel by žák pro určení její délky použít pravítko. Měření nevyjde vždy přesně, např. přepona jednotkového čtverce má délku $\sqrt{2} = 1,414213562373095\dots$

Úloha:

- Která ze tří úseček OP , OR , OS je nejdelší?
- Sestroj další úsečku OT stejně dlouhou jako OR .
- Kolik takových úseček dokážeš sestrojit?

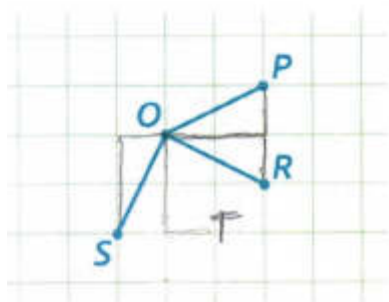


$O \rightarrow \rightarrow \uparrow P$
 $O \rightarrow \rightarrow \downarrow R$
 $O \leftarrow \downarrow \downarrow S$

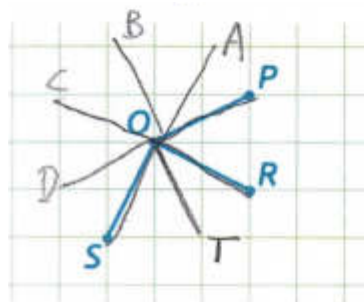
Komentář pro učitele:

Mříž je prostředím, ve kterém lze díky jejím vlastnostem určovat míru (délku, obvod, obsah) bez použití pravítka. Jednou z takových úloh je tato. Žáci zjistí, že všechny tři úsečky znázorněné na obrázku jsou úhlopříčkami shodných obdélníků 1×2 . Pak už je argumentace snadná. Pokud jsou obdélníky shodné, musí být shodné i jejich úhlopříčky. Druhým způsobem argumentace může být to, že všechny úsečky mají šipkový zápis tvořený dvěma kroky jedním směrem a jedním krokem směrem, který je k tomu původnímu kolmý (což je ale vlastně jinými slovy to samé jako výše uvedené tvrzení o úhlopříčkách v obdélníku 2×1). Tato úloha je velmi důležitá pro úspěšné řešení úloh následujících.

Poznátky:

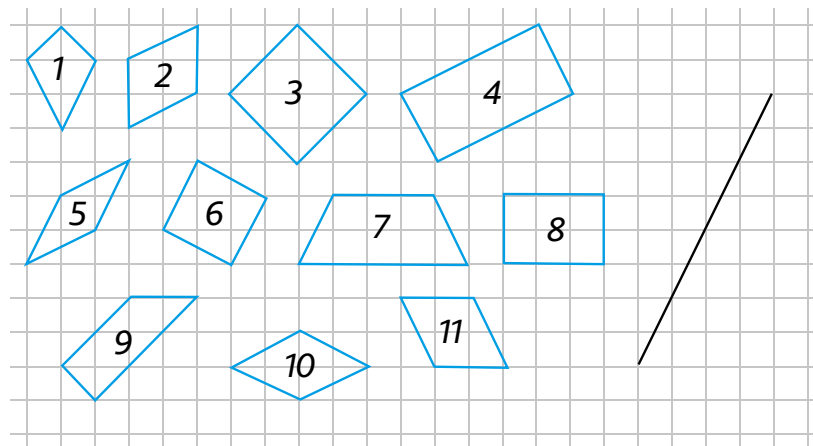


$O \rightarrow \rightarrow \uparrow P$
 $O \rightarrow \rightarrow \downarrow R$
 $O \leftarrow \downarrow \downarrow S$
 $O \downarrow \rightarrow T$



$O \rightarrow \rightarrow \uparrow P$
 $O \rightarrow \rightarrow \downarrow R$
 $O \leftarrow \downarrow \downarrow S$
 $O \downarrow \rightarrow T$

Najdi útvary, které mají stejný obvod jako je délka černé úsečky.

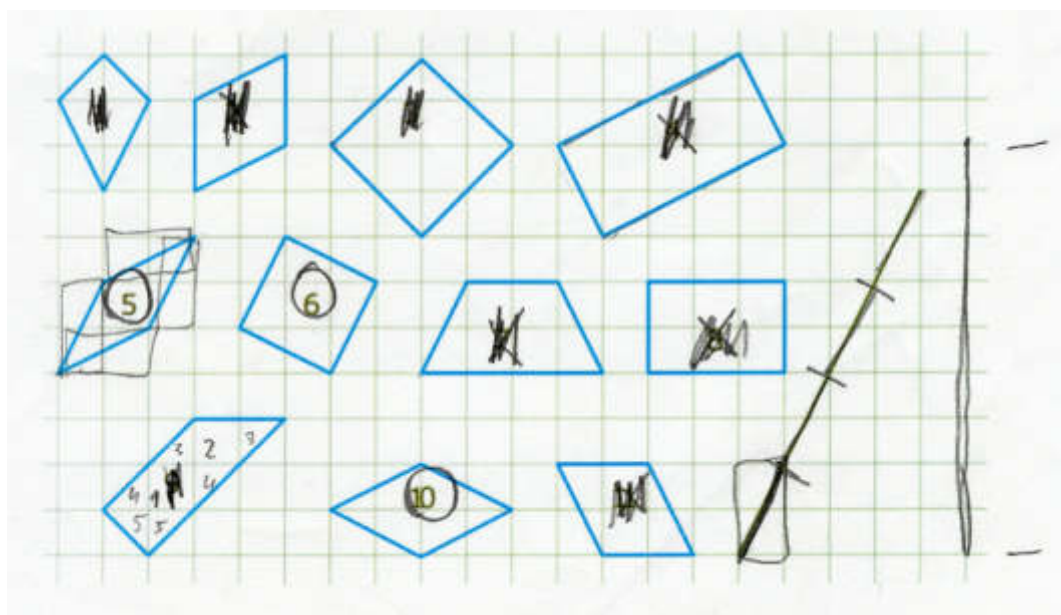


Komentář pro učitele:

Úlohu lze opět řešit bez pravítka a měření. Černá úsečka se skládá ze čtyř úseček, které jsou úhlopříčky obdélníku 1×2 . Stačí tedy najít takové čtyřúhelníky, jejichž strany jsou tvořeny právě těmito čtyřmi úsečkami. Žáci zjistí, že takových útvarů existuje více. Záleží totiž na tom, do jaké polohy tyto úsečky umístíme.

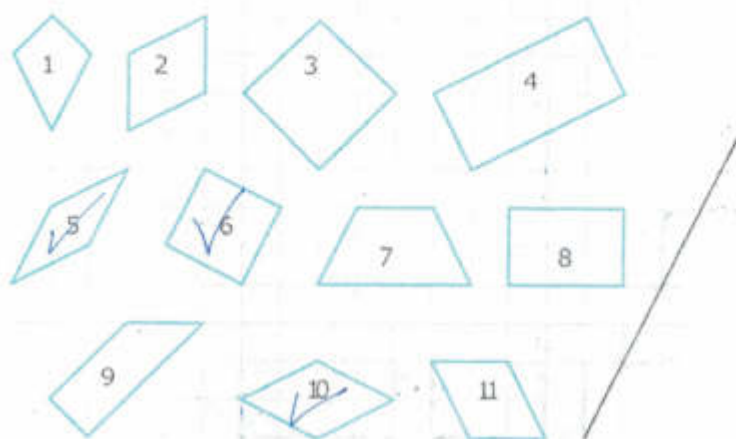
Poznátky:

- K měření žáci používali kružítko, kousek papíru, někteří odhadovali (3. ročníky). Nejprve nabírali délku celé úsečky, potom ale přicházeli s nápady měřit útvary postupně a přidávat je k úsečce (zaznamenávat body).
- Další strategií bylo odměřování pomocí tužky a počítání čtverečků.
- Pro některé žáky byla matoucí čísla uvnitř útvarů.
- Několik žáků považovalo útvary 10 a 11 za totožné.
- Objevilo se vyškrtávání vyřazených útvarů:



- Někteří žáci (4. ročníky) si měření obvodů útvarů usnadnili tím, že znali určité vlastnosti útvarů (např. že obdélník má protější strany stejně dlouhé).
- Někdo chyboval v nepřesném měření, protože například zanedbával milimetry a měřil jen na celé centimetry (typicky u šikmých úseček).
- Někteří žáci díky měření sice našli správně útvary 5, 6 a 10, ale navíc přidali útvary s podobným obvodem 2 a 11. Teprve v závěrečné diskuzi po řešení úlohy někteří žáci řekli, že 2 a 11 to být nemůže, protože ty šikmé strany nejsou stejně dlouhé jako ty svislé nebo vodorovné (připodobňovali to k cestám, ke zkratkám).
- Zaznamenali jsme také dělení černé úsečky na části, které jdou přes obdélníky 2×1 , a následné takové úsečky v útvarech (žák v popisu tím myslí ty trojúhelníčky, kterými z jedné strany rámoval černou úsečku):

Najdi útvary, které mají stejný obvod, jako je délka černé úsečky.



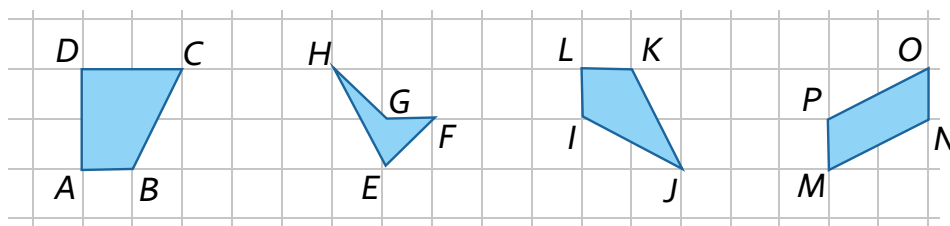
*Proč si vybrala právě tyto útvary?
Trojúhelníčky díky tomu jsem přišla na to že 10 a úsečka
mají stejný obvod. A takhle jsem přišla i na to že 5 a
úsečka mají stejný obvod. I 6 a úsečka mají stejný obvod.*

Následná diferenciaci, reedukace:

- Chyby v nepřesnosti měření (pravítkem, provázkem nebo jiným předmětem) lze reedukovat zvětšením mříže, kde se odchylky projeví ve větším měřítku.
- Pokud chceme žáky dovést k tomu, aby úlohu řešili bez měření spíše s pomocí toho, že černou úsečku lze rozdělit na kratší mřížové úsečky, je potřeba právě sytit zkušenosti žáků s mřížovými úsečkami. Nabízí se řešitelský proces v předchozí úloze otočit. Například zadáme žákům úsečku, která je úhlopříčkou obdélníku 1×2 , a vyzveme je, aby pouze za pomoci těchto úseček konstruovali různé útvary v mříži. Pak lze položit otázku, kolik těchto úseček tvoří obvod vytvořeného útvaru. Žáci by měli mít také zkušenosti s prodlužováním mřížových úseček tak, aby jim vznikaly úsečky delší. Opět se budeme žáků ptát, z kolika základních úseček se výsledná úsečka skládá.

Úloha:

Na obrázku jsou čtyři čtyřúhelníky. Každý z nich má aspoň jednu dvojici stejně dlouhých (shodných) stran. Najdi je a zdůvodni.



Komentář pro učitele:

Žáci aplikují a využívají zkušenosti z předchozích úloh. Nyní již není jejich úkolem porovnávat obvod celého útvaru s délkou mřížové úsečky, hledání dvou shodných (stejně dlouhých) stran v rámci jednoho útvaru.

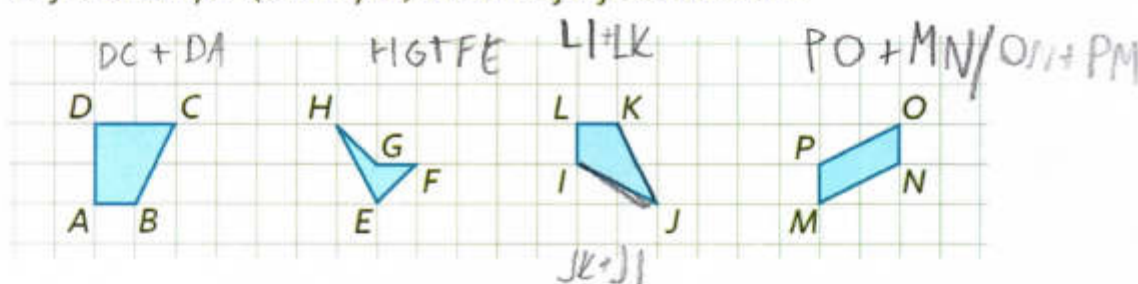
Chceme sledovat:

- zda žáci najdou alespoň jednu dvojici stejně dlouhých stran u každého útvaru,
- zda žáci najdou pouze dvojice stran, které jsou v přímce mříže, nebo objeví i dvojice stran, které procházejí mříží jinými směry,
- zda některý žák dokáže objevit všechny stejně dlouhé strany,
- jakým způsobem žák strany porovnává a jak argumentuje, že jsou shodné.

Poznátky:

- Úlohu zkoušeli realizovat žáci 2. ročníků. Úloha pro ně byla obtížná a minimum žáků našlo všechna řešení. Chybně označovali za shodné strany v 1. obrazci úsečku BC a AD. Jako nejsnadnější se ukázal pro tyto žáky poslední útvar (byl pro ně opticky nejpříznivější).
- Následující ukázka je z 5. ročníku:

Na obrázku jsou čtyři čtyřúhelníky. Každý z nich má aspoň jednu dvojici stejně dlouhých (shodných) stran. Najdi je a zdůvodni.



Následná diferenciacce, reedukace:

- Při potížích je podstatný návrat k předchozím úlohám – porovnání délky mřížových úseček (s využitím mříže). Žáci potřebují vytvořit vědomí, že úhlopříčka není shodná se stranou obdélníku, což si mnoho z nich myslí.
- Můžeme použít větší model zadání a nechat žáky, aby provázkem přeměřili (nebo vymodelovali) každou stranu a pak zkoušeli porovnávat.

Obsah obrazce

Aby žáci dokázali určovat obsahy náročnějších útvarů (např. obsahy tupoúhlých trojúhelníků), postupně se „vylepšují“ jejich řešitelské strategie.

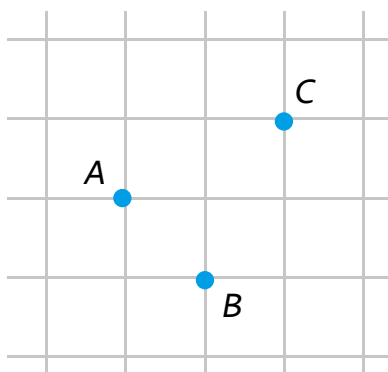
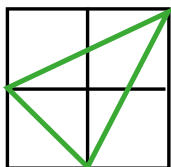
• Strategie rámování pro určení obsahu

Ze zkušeností učitelů silně převažuje žákovská strategie dávání částí dohromady (i na 2. stupni), aby vznikaly celé čtverečky. Nabízí se otázka, jak žáky posunout k „lepší“ strategiím (zejména rámování).

K tomu je důležité sledovat, zda žáci mají zkušenosti k tomu, aby rámování šlo použít.

Úloha:

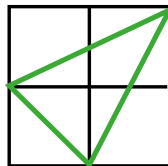
Zjisti obsah zeleného trojúhelníku na obrázku geoboardu a na obrázku s mříží.



Komentář pro učitele:

Učitel může sledovat v této nebo podobných úlohách, zda se řešitelská strategie žáků bude lišit, pokud použijí geoboard (první obrázek) nebo mříž (druhý obrázek). Geoboard zde prezentuje jakýsi **rám**, úlohy podobného typu by mohly myšlenku rámování pomoci. Pokud budou mít žáci zkušenosti s rámem, objevují se další důležité zkušenosti. Ty se objevují v následující úloze.

Žáci si postupně zvykají na to, že dávání částí čtverečku dohromady tak, aby vznikl celý čtvereček, je dobrá strategie, ale u náročných úloh dochází k chybovosti, a především takové počítání vyžaduje hodně času. Zkušenost, která je důležitá, je umět **určit polovinu nějakého útvaru**.

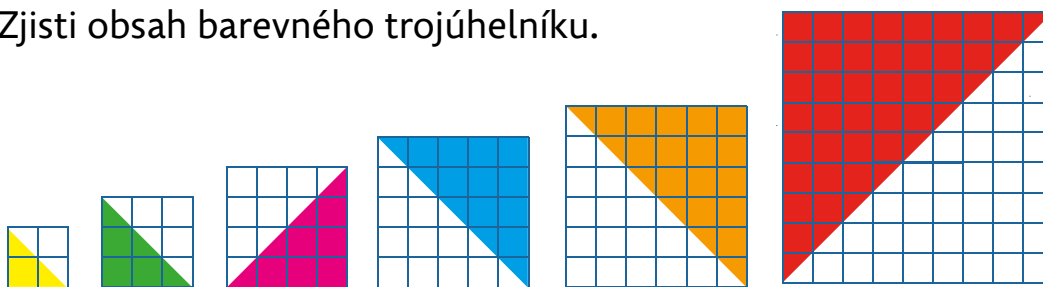


Pokud bychom na mříži použili předchozí úlohu s geobardem:

Žáci (při rámování) musí určit polovinu obdélníku 2×1 , resp. 1×2 . Výše uvedené úlohy takové myšlenky připravují.

Úloha:

Zjisti obsah barevného trojúhelníku.



Komentář pro učitele:

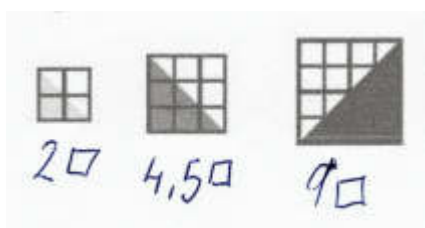
Jedná se o úlohy, které žákům umožní využívat metodu rámování. V té je často vnímání poloviny náročnější, protože se v rámu nachází více útvarů. Proto je důležité začít s těmito „lehčími“ úlohami a sledovat, zda žáci polovinu útvaru vnímají.

Chceme sledovat:

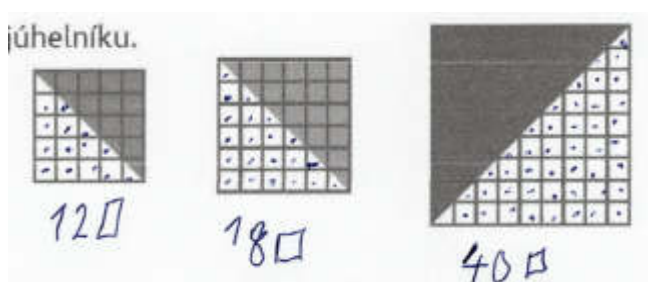
- jakým způsobem budou žáci zjišťovat obsah,
- zda žáci vypočítají obsah čtverce a výsledný obsah vydělí, nebo budou počítat jednotlivé celé čtverečky, z polovičních budou sestavovat rovněž celé čtverečky a následně všechny sečtou,
- zda závisí míra úspěšnosti řešení na velikosti výchozího trojúhelníku.

Poznátky:

- Úloha byla realizována ve 2. ročnících. Žáci mají s obsahem poměrně dost zkušeností, počítají po celých čtverečcích. Většina žáků řešila tak, že si doplňovali ze dvou polovin (trojúhelníků) celý čtvereček a následně pak počítali počet celých čtverců. Pouze několik žáků spočítalo obsah celého útvaru a vydělilo dvěma. Část žáků zapisovala polovinu jako desetinné číslo, část slovně. Někteří žáci chybovali nebo si nedokázali poradit s útvary, kde obsah zahrnoval polovinu nebo byl sestaven z příliš mnoha čtverečků.



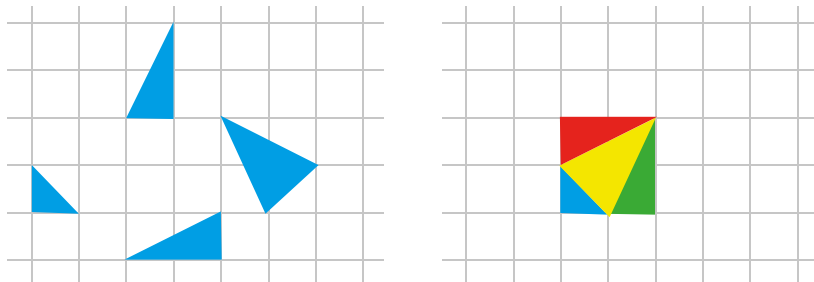
- V dalším řešení je patrné, že u větších obsahů žák počítal po jednom čtverečku, a aby se nespletl, dělal si do nich tečky:



- Žáci také diskutovali o tom, že u posledního trojúhelníku je těžké spočítat obsah, jelikož je příliš tmavý a čtverečky na něm nejsou vidět. Při diskuzi ve třídě ale brzy přišli na to, že mohou spočítat obsah nevybarvené části, protože vybarvený trojúhelník tvoří přesně polovinu čtverce.

Úloha:

Urči, kolik čtverečků obsahují všechny barevné trojúhelníky na obrázcích.



Komentář pro učitele:

De facto se jedná o stejné úlohy, ale v úloze vlevo se čtverce objevují odděleně, zatímco v úloze vpravo všechny společně vytvářejí geometrický útvar (čtverec).

Chceme sledovat:

- zda žáci vyřeší pouze jednu úlohu, nebo obě dvě.

V další úloze se objevuje další myšlenka důležitá pro strategii rámování – tzv. myšlenka **komplementu (doplňku)**.

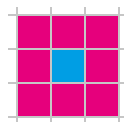
Úloha:

Zjisti obsah růžového a modrého útvaru.

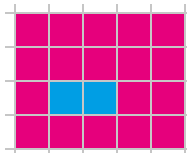
a)



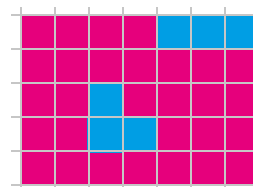
b)



c)



d)



Komentář pro učitele:

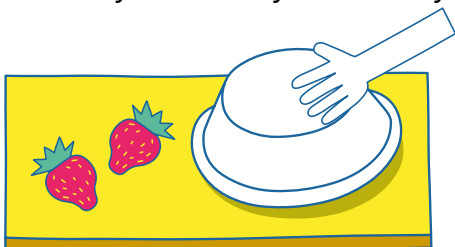
Učitel na těchto úlohách diagnostikuje, jak žák úlohu řeší. Pokud počítá jednotlivé růžové a modré čtverečky a určuje jejich součet, myšlenky komplementu nepoužívá. To se projevuje především u úloh, kde se vyskytuje hodně čtverečků.

Pokud ale např. v úloze d) řekne: „Obdélník má $5 \cdot 7 = 35$ čtverečků, modrých vidím 6, tak růžových musí být zbytek $35 - 6 = 29$,“ pak tento žák komplement dobře vnímá.

S myšlenkou komplementu se žáci setkávají již od 1. ročníku. Např. v úlohách typu:

Úloha:

Na stole je celkem 6 jahod. Kolik jich je pod miskou?

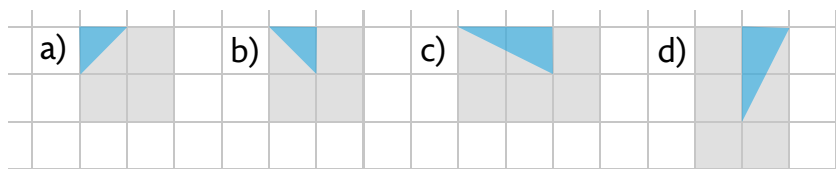


Poznátky:

- Úloha byla testována ve 2. ročnících. Většinou nedělala žákům potíže, ovšem myšlenka komplementu byla blízká spíše menšímu počtu žáků. Minimum žáků využilo násobení, několik žáků počítalo pole po 2, objevilo se i přičítání po 3 nebo po 5 polích a následné odečtení modrých čtverečků.
- Nejčastěji žáci chybovali v podúloze c), d), a to v numerice při počítání počtu růžových polí.

Úloha:

Zjisti obsah šedého a modrého útvaru.



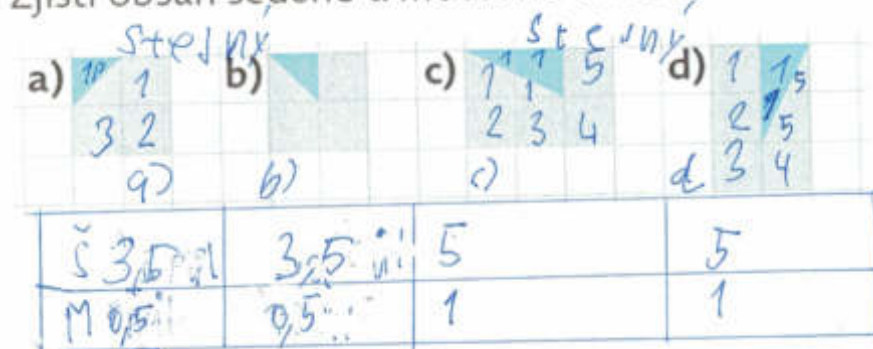
Komentář pro učitele:

Úlohy s doplňkem útvaru začínáme se čtverečky, zde i s trojúhelníky. Dá se očekávat, že pro žáky budou náročnější. Ale pokud mají vybudovanou strategii, nemusí tomu tak být. Důležitá je zde myšlenka komplementu (obsah celého – obsah modrého = obsah šedého).

Poznátky:

- Ve 3. ročnících této realizaci předcházela aktivita, kdy žáci určovali obsah dílků čokolády, pracovali s jednotkou čtverečku i trojúhelníku (řešili manipulativně). Následující den byla úloha realizována na papíře, kde docházelo k daleko vyšší chybovosti.
- Většina žáků (kteří řešili úspěšně) odhalila, že podúlohy a), b) jsou stejné, to samé žáci objevili u podúloh c), d). Zde zmiňovali, že se jedná o pootočení trojúhelníku.
- Žáci, kteří chybovali, myšlenku komplementu nevnímali (nepromítlo se to do jejich řešení).
- Velmi často se v zadání c), d) objevilo chybné řešení jako 2,5 nebo 1,5. Po diskuzi se ukázala příčina. Nastalo to proto, že žáci věděli, že v zadání a), b) je řešení 0,5, a docházelo k jistému transferu, aniž by reflektovali fakt, že u c), d) jde o polovinu, ovšem z celkového počtu 2.
- Někteří žáci nevěděli, jak zapsat polovinu.
- Ve 4. ročnících se objevil zápis pomocí desetinného čísla (i s chybami, např. polovinu značili jako 0,1), pomocí slov, pomocí obrázku čtverečku. Zlomek se objevil minimálně.
- Žáci si poměrně rychle všimli stejnosti podúloh.
- Několik žáků si pod úlohy zapsalo tabulku, do které evidovali počty.

Zjisti obsah šedého a modrého útvaru.



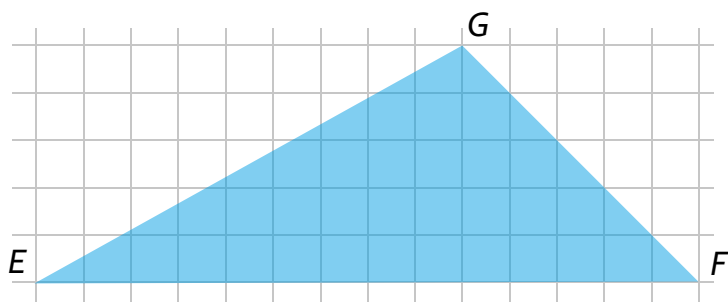
- Další ukázka řešení:



Pokud chceme žáky přirozeně vést k objevení „výhodnější“ strategie než skládání do celých čtverečků, lze jim zadávat výzvy, kde je taková strategie nevýhodná. Např. v této úloze:

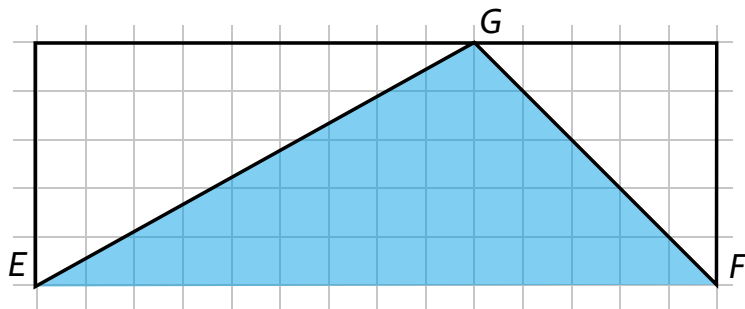
Úloha:

Jaký je obsah tohoto trojúhelníku?



Komentář pro učitele:

Pravá „bílá“ část nebude pravděpodobně obtížná, protože se v ní objevují půlky čtverečků. Ale levá „bílá“ část bude z hlediska skládání dohromady obtížná. Pokud žáci budou mít dostatek zkušeností, mohou navrhnout zarámování obdélníku a přes poloviny pravoúhelníků (čtverec 5×5 a obdélník 9×5) a myšlenku komplementu zjistit obsah modrého trojúhelníku.



Poznátky:

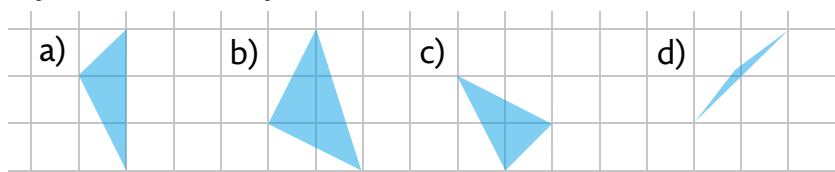
- Zde se jedná o ukázku neefektivního využití metody určování obsahu přes počítání jednotlivých čtverečků.



V následující úloze bez zarámování bude mít asi více žáků obtíže. Např. trojúhelník d) je velice obtížný.

Úloha:

Zjisti obsah trojúhelníků.



Komentář pro učitele:

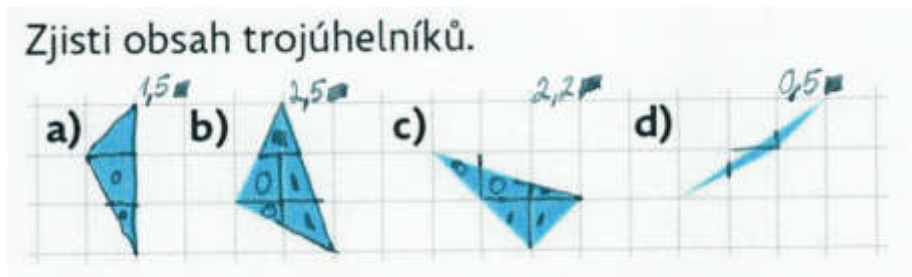
Strategie rámování je výhodná např. při objevování tzv. Cavalieriho principu. V jednoduchosti řečeno: „Pokud trojúhelníky mají stejnou základnu i výšku, jejich obsahy jsou stejné.“ K takovému závěru se obvykle dochází až na druhém stupni, ale ze zkušeností mohou podobné úlohy a výzvy řešit i žáci 4. a 5. ročníků.

Chceme sledovat:

- zda žáci doplní trojúhelník na obdélník a z jeho obsahu budou odečítat části, které nejsou modré,
- jakou strategii zvolí ke zjištění obsahu trojúhelníku za d).

Poznatky:

- Většina žáků 4. ročníků s úlohou neměla potíže. Opět se vyskytovaly různé zápisy „necelých“ obsahů, a to v podobě desetinných čísel, zlomků, slov, symbolů (přepůlený čtvereček).
- Nejčastěji žáci užívali metodu počítání po čtverečkách, někde také odhadovali. Metoda rámování se vyskytla zřídka. Objevila se i strategie rámování bez písemného záznamu (tedy jen mentálně).
- Ukázka řešení strategie pro určení obsahu:



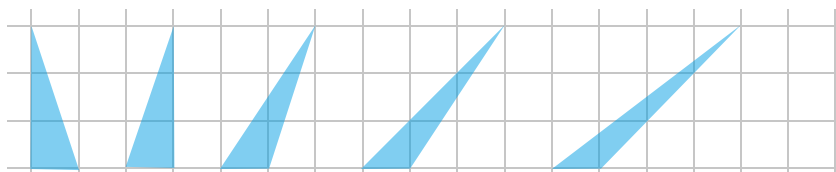
Následná diferenciaci a reedukace:

- Ideální je situace, pokud ve třídě přijde s rámováním někdo z žáků. Ten tuto strategii následně předvede ostatním. Na takový objev ovšem žák potřebuje velké množství takových izolovaných modelů (jednotlivých zkušeností), aby mu selhávalo počítání jednotlivých čtverečků. Pokud se

rámování ve třídě neobjeví, v učebnici se k tomu žáci dostanou skrze vyřešenou úlohu, která je komentována.

Úloha:

Zjisti obsah trojúhelníků.

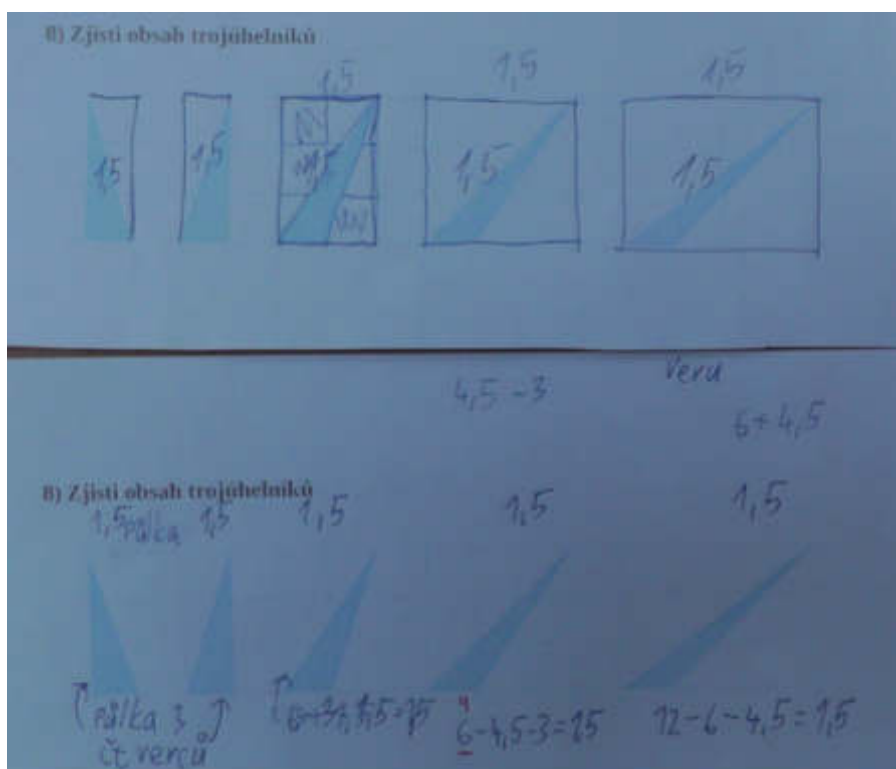
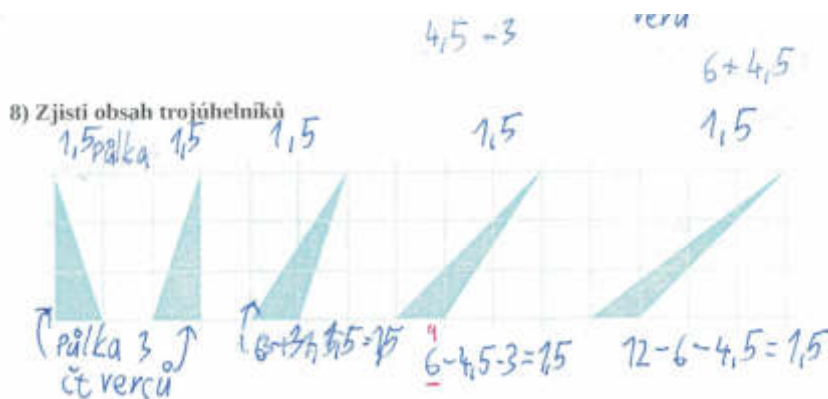


Komentář pro učitele:

Přes sérii úloh (zde je uvedena série 5 trojúhelníků se základnou 1 a výškou 3) žáci objevují, že obsah trojúhelníku závisí pouze na straně a její příslušné výšce. Pokud s tím získají dostatek zkušeností, nebudou mít problém ani s přechodem na čistý papír (naměří si důležité údaje a obsah spočítají).

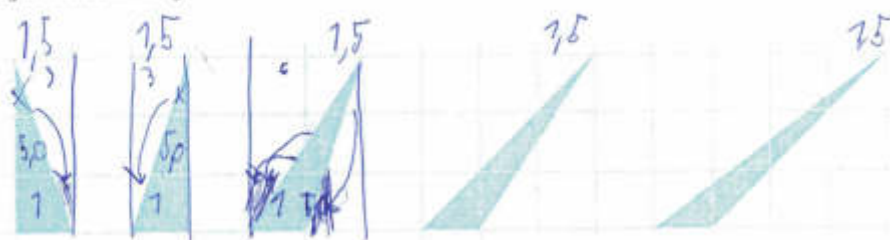
Poznátky:

- Objevily se opět různé strategie, přičemž metoda rámování byla spíše v menším zastoupení.



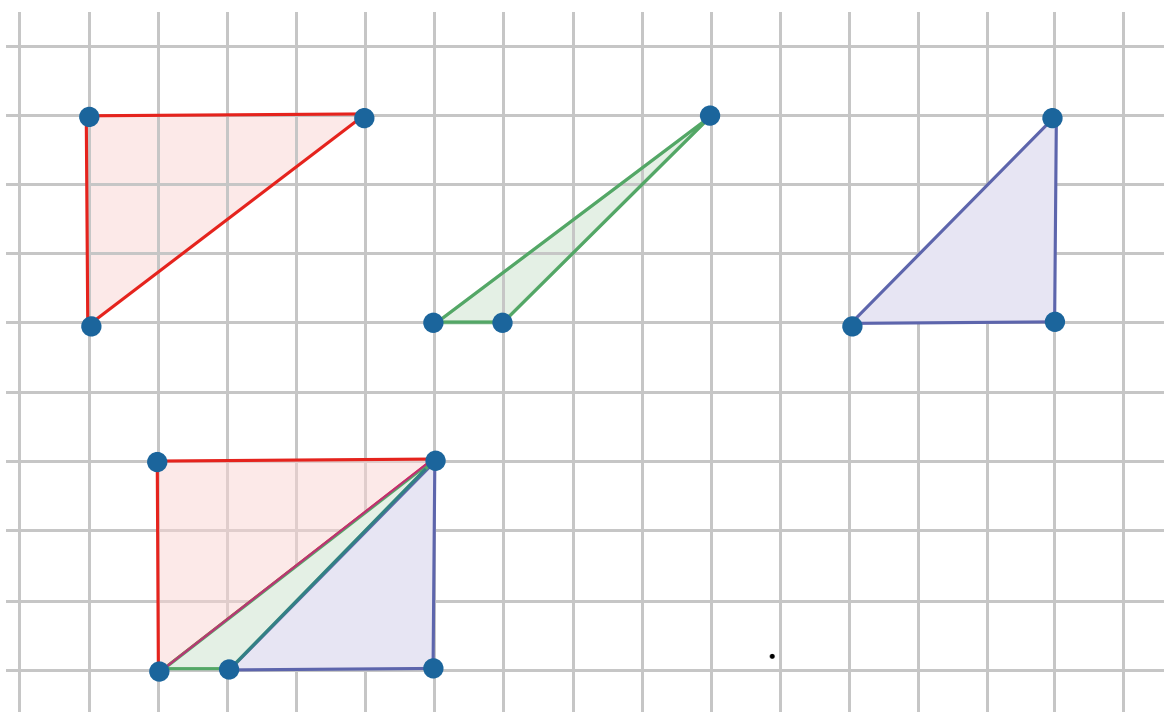
- V následujícím řešení žák počítal obsah prvních třech trojúhelníků a pak řekl, že když všechny narovná jako první dva, tak je jasné, že mají stejný obsah:

8) Zjistí obsah trojúhelníků



Následná diferenciaci a reedukace:

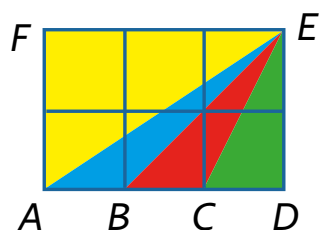
- Jednou z možností reedukace je, že učitel žákům trojúhelník zarámuje. To je návodný krok, díky kterému by pro ně určení obsahu mohlo být jednodušší.
- Druhou možností je nechat žáky určit obsah všech trojúhelníků, které tvoří celý rám. Ukážeme to na posledním trojúhelníku z druhé úlohy výše:



Další dobrou úlohou k získávání zkušeností je tato:

Úloha:

Kolik je na obrázku trojúhelníků?
Urči obsah každého z nich.



Chceme sledovat:

- zda žák najde jen jednobarevné trojúhelníky (tj. 4) nebo i další (tj. 4 + 3),
- jakou obtížnostní úroveň žák zvládne (zelený + žlutý – červený – modrý...),
- jakou používá strategii v jednotlivých úlohách: zda přemísťuje části čtverců tak, aby získal celé čtverce, nebo rámuje a od které obtížnosti rámuje (resp. kdy začne rámovat),
- v jakých jednotkách určuje obsah (čtverce, kachle, cm × cm...) a co má na použití jednotek vliv (např. v zadání není rozměr mřížky – používá čtverce),
- zda, kdy a co je příčinou, že si všimne, že se obsahy jednobarevných trojúhelníků (zelený, červený a modrý) nemění, zda jde do úvah, že by bylo možné takto dokreslovat mnoho dalších trojúhelníků se stranou 1j a výškou 2j se stejným obsahem, že tedy obsah trojúhelníku závisí na velikostech strany a příslušné výšky.

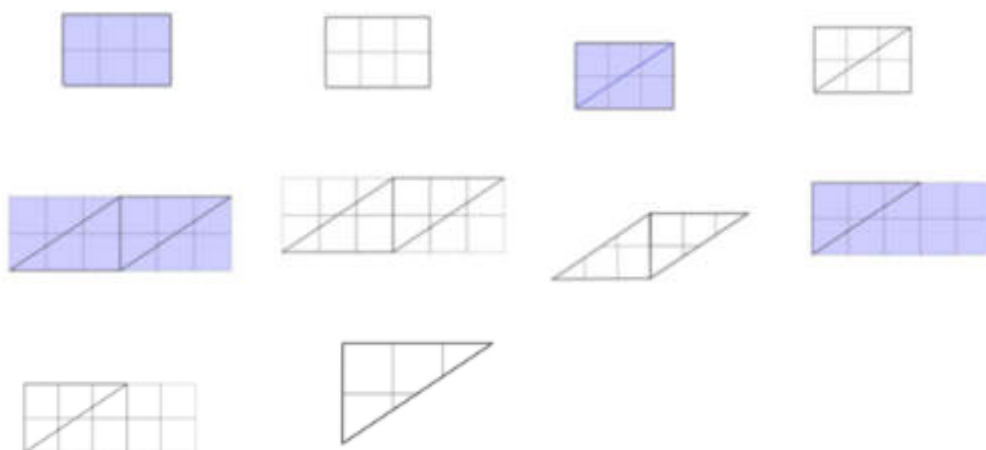
Učitel může budovat porozumění výpočtu obsahu trojúhelníku – propojit tuto úlohu s manipulativní úlohou „obdélník“ – výpočet obsahu, rozdělení na 2 trojúhelníky a přesun na rovnoběžník – poznání, že obsah rovnoběžníku je roven obsahu původního obdélníku, tj. strana · příslušná výška (strana obdélníku = výška rovnoběžníku) – poznání, že obsah trojúhelníku je roven polovině obsahu rovnoběžníku, tj. strana · příslušná výška : 2.

Manipulativní činnost, stříhání a skládání částí dohromady jsou výbornou zkušeností k tomu, aby si žáci podobné vzorce upevnili.

$$S = a \cdot b$$

$$S = a \cdot b = a \cdot va$$

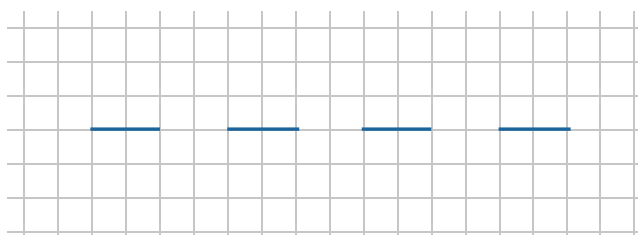
$$S = a \cdot va : 2$$



Velice dobrou diagnostiku přináší následující úloha:

Úloha:

Daná úsečka je stranou trojúhelníku.
Hledej různé trojúhelníky s obsahem 2.



Komentář pro učitele:

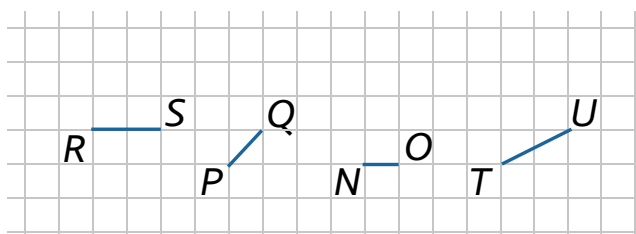
Žák, který porozuměl (díky skládání a stříhání, sérii úloh s Cavalieriho principem atd.) myšlenke obsahu trojúhelníku, nebude mít problém řešení najít. Vrchol zvolí někde na rovnoběžce ve výšce 2. Pokud žák myšlenku ještě neobjevil, najde pravděpodobně jedno řešení („hezký“, např. pravoúhlý, trojúhelník). Zde otázka na hledání více řešení cílí na diagnostiku, zda žák myšlenke (obsahu čtverce) porozuměl.

Další úloha směřuje k zjevnému tvrzení: „Pokud má čtverec větší obsah než jiný čtverec, musí mít i delší stranu.“ Ze zkušenosti ale plyne, že žákům taková věc nemusí být a není samozřejmá. To může diagnostikovat následující úloha:

Úloha:

Každá úsečka na obrázku je stranou čtverce.

- Čtverce narýsuj.
- Zjisti obsah čtverců. Seřaď čtverce vzestupně podle velikosti jejich obsahů.
- Seřaď úsečky vzestupně podle jejich délky.



Komentář pro učitele:

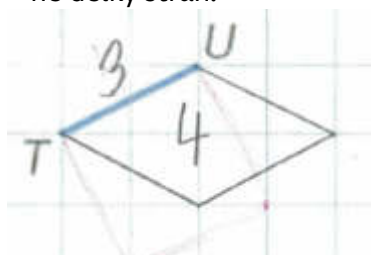
Podobné výzvy přinášejí žákům dobré zkušenosti s porovnáváním úseček. Vodorovné a svislé úsečky porovnají snadno, ale ty „šikmé“ jsou náročnější. K určení jejich velikostí jim pomůže až Pythagorova věta na druhém stupni. Proto porovnávání délek úseček přes odpovídající obsahy čtverců jsou dobrou strategií před příchodem „silnějšího“ nástroje. Úloha také obsahuje důležitou myšlenku, že obsah čtverce závisí na délce jeho strany a že čím delší tato strana je, tím větší je obsah čtverce. Žáci zjistí, že řazení čtverců v b) i c) je stejné.

Chceme sledovat:

- jak žáci argumentují, že se jedná o čtverec.

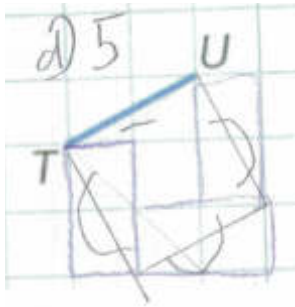
Poznátky:

- Většinou žáci (4. ročníky) začali řešit úsečky v daném pořadí, ale objevilo se i jiné pořadí.
- U poslední podúlohy se objevila chyba v podobě narýsovaného kosočtverce, se zachováním stejné délky stran:



- Výjimečně žáci vyznačili do pracovního listu 2 řešení, ale při diskuzi a sdílení u tabule se objevily u každého čtverce 2 možnosti.

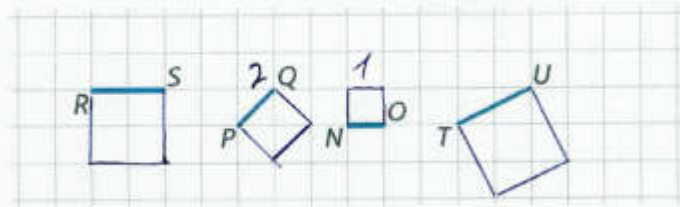
- U posledního čtverce téměř všichni využili metodu skládání do celých čtverečků pro zjištění obsahu.



- Poměrně dost žáků nerozumělo pojmu vzestupně, bylo nutné vysvětlení.
- Někde zazněla souvislost mezi pořadím délky úsečky a obsahy čtverců:

Každá úsečka na obrázku je stranou čtverce.

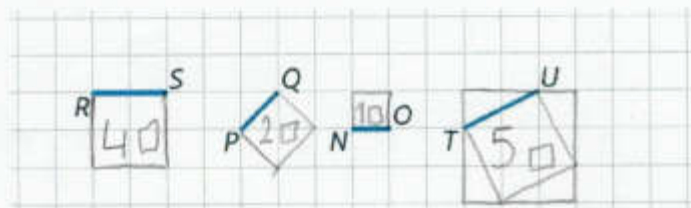
- Čtverce narýsuj.
- Zjisti obsah čtverců. Seřaď čtverce vzestupně podle velikosti jejich obsahů. *NO, PQ, RS, TU.*
- Seřaď úsečky vzestupně podle jejich délky *NO, PQ, RS, TU.*



- Následující ukázky ilustrují různé strategie pro určení obsahu: rámování

Každá úsečka na obrázku je stranou čtverce.

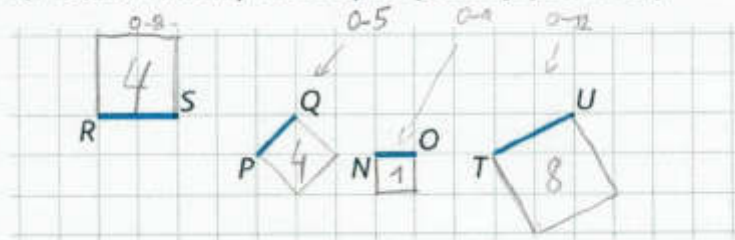
- Čtverce narýsuj.
- Zjisti obsah čtverců. Seřaď čtverce vzestupně podle velikosti jejich obsahů.
- Seřaď úsečky vzestupně podle jejich délky



počítání po čtverečcích

Každá úsečka na obrázku je stranou čtverce.

- Čtverce narýsuj.
- Zjisti obsah čtverců. Seřaď čtverce vzestupně podle velikosti jejich obsahů.
- Seřaď úsečky vzestupně podle jejich délky

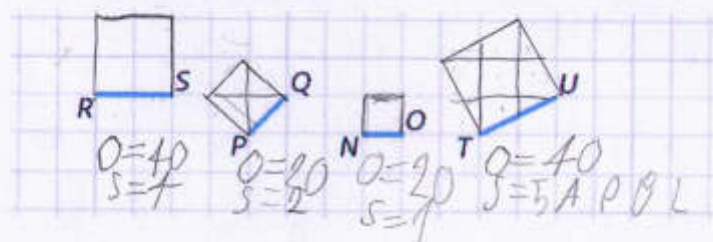


Každá úsečka na obrázku je stranou čtverce.

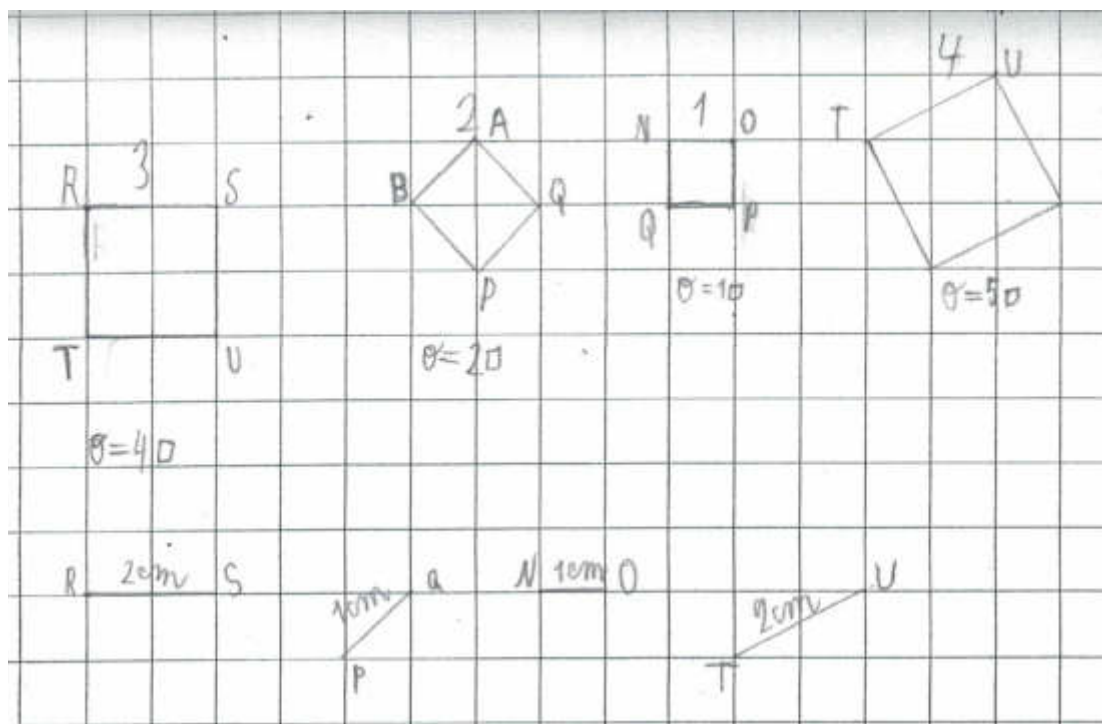
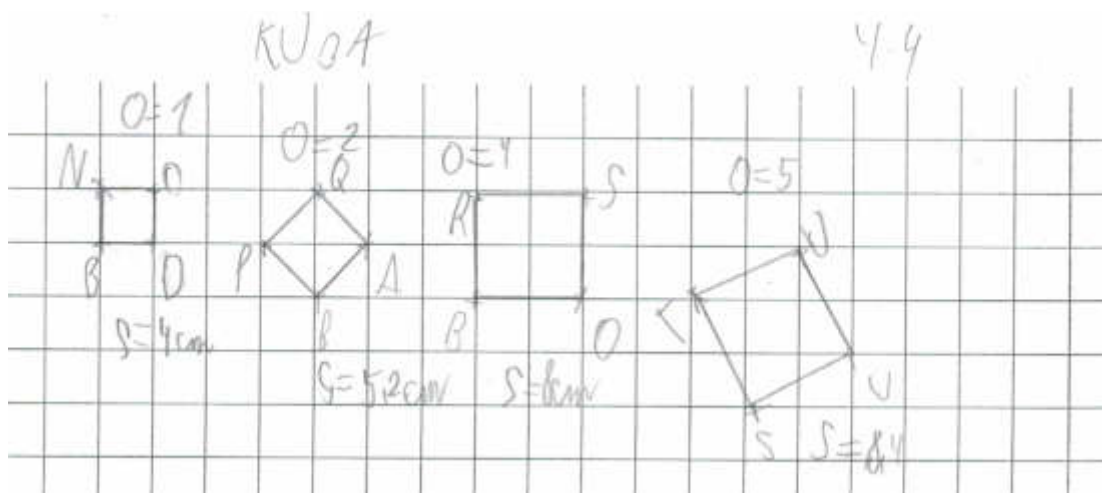
a) Čtverce narýsuj.

b) Zjisti obsah čtverců. Seřaď čtverce vzestupně podle velikosti jejich obsahů.

c) Seřaď úsečky vzestupně podle jejich délky



Lucka

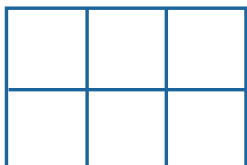


Vztah mezi obsahem a obvodem

Až žáci vyřeší větší množství úloh na obsahy a obvody zvlášť, přicházejí úlohy, kde se vyskytují oba pojmy dohromady. To ostatně může být také věc, co učitel sleduje. Pokud zavede oba pojmy najednou, pletou se pak žákům? Asi vhodnější edukační strategií je zavést nejprve jeden z pojmů, později až druhý.

Úloha:

Obsah každého obdélníku je 6 čtverců. Jaký je jejich obvod?



Komentář pro učitele:

Toto je dobrá úloha na propojení aritmetiky a geometrie. Žák vlastně hledá nevědomky dělitele čísla 6 ($1 \cdot 6$, $2 \cdot 3$).

Chceme sledovat:

- zda žák dokáže hledat různá (všechna) řešení.

Následná diferenciacce, reedukace:

- Případná reedukace proběhne díky spolupráci se spolužáky.

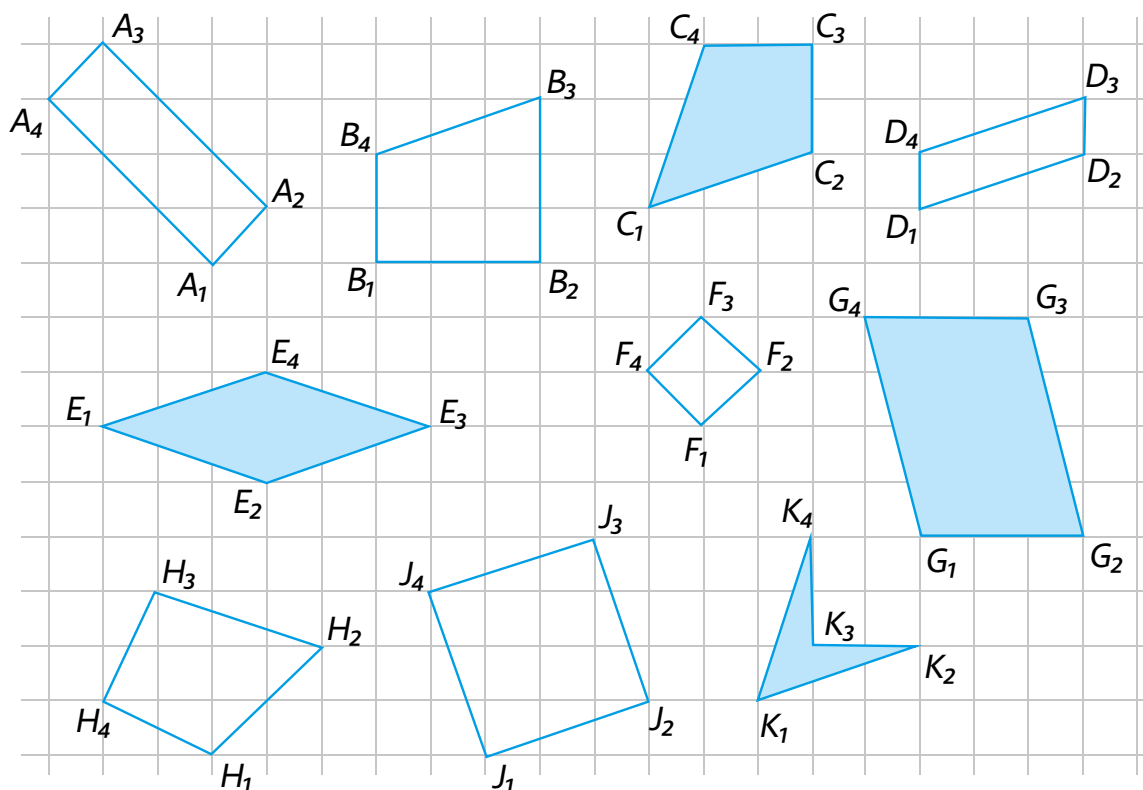
Úloha:

Jaký obvod může mít obdélník, jehož obsah je
a) 12 čtverců, b) 120 čtverců, c) 121 čtverců, d) 840 čtverců?

Chceme sledovat:

- jakou obtížnostní úroveň žák zvládne,
- jakou používá strategii v jednotlivých úlohách:
 - a) OBSAH: zda počítá čtverce „po jedné“, nebo sčítá řady/sloupce, nebo násobí počet čtverců na straně $\cdot$ počet čtverců ve sloupci,
 - b) OBVOD: zda počítá jednotky „po jedné“ na všech čtyřech stranách, nebo jen na dvou a násobí dvěma,
- zda považuje obdélníky $a \cdot b$ a $b \cdot a$ za totožné, např. $1 \cdot 12$ a $12 \cdot 1$,
- zda používá systém, např. rozklady $1 \cdot 12$, $2 \cdot 6$, $3 \cdot 4$, $4 \cdot 3$, $6 \cdot 2$, $12 \cdot 1$,
- zda zobecnění z úlohy a) použije pro řešení dalších úloh.

Ve čtvercové mříži jsou vyznačeny čtyřúhelníky, viz obrázek. Urči jejich obvod a obsah.



Komentář pro učitele:

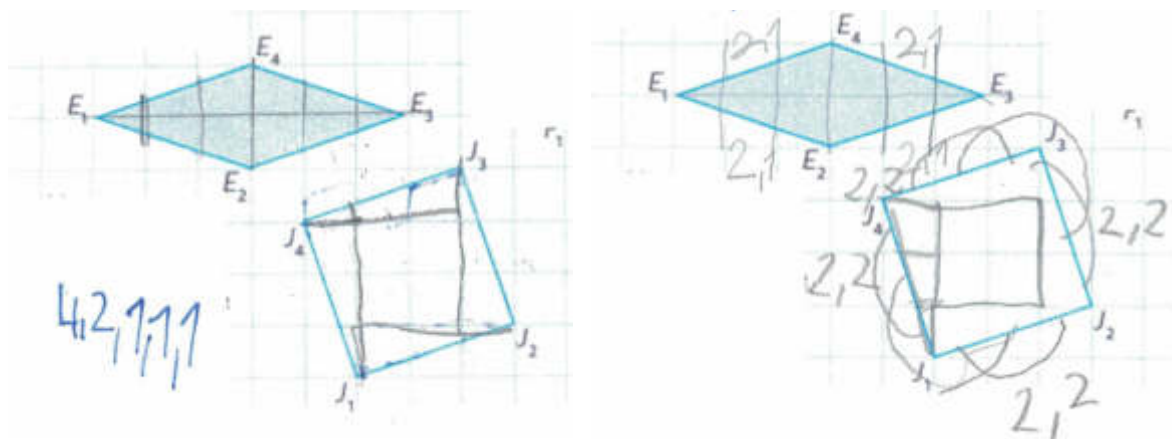
Jedná se o aplikační úlohu, ve které žáci určují obsah a obvod mřížových mnohoúhelníků. S úlohou lze pracovat ale i jinak. Například žáci mohou nejprve porovnávat obvody některých útvarů bez použití pravítka. Porovnáním jednotlivých stran některých útvarů lze určit, který z nich má delší obvod bez toho, abychom museli obvod přímo změřit. Žáci mohou pracovat i s odhady. Mohou například odhadem seřadit útvary dle velikosti jejich obsahů a potom svůj odhad ověřit přesným výpočtem.

Chceme sledovat:

- jakou obtížnostní úroveň žák zvládne,
- jakou používá strategii v jednotlivých úlohách:
 - a), b) zda počítá čtverce „po jedné“, nebo sčítá řady/sloupce, nebo násobí počet čtverců na straně $\times$ počet čtverců ve sloupci,
 - c)–f) zda přemisťuje části čtverců tak, aby získal celé čtverce, a jde do strategie a)–b), nebo rámuje, od které obtížnosti rámuje (resp. kdy začne rámovat),
- zda žák lépe řeší úlohy, kdy jsou obrazce „průhledné“,
- zda se liší strategie řešení obsahů „průhledných“ obrazců od „neprůhledných“,
- v jakých jednotkách určuje obsah (čtverce, kachle, cm $\times$ cm,...) a co má na použití jednotek vliv (např. v zadání není rozměr mříže – používá čtverce).

Poznatky:

- Žáci 3. ročníků u určování obsahu využívali často zakreslení mříže přímo do útvaru a pak počítání čtverců nebo jejich částí. Objevilo se také určování obsahu odčítáním z orámovaného útvaru. Jako jednotky se objevoval symbol čtverečku, slovo kachlík, byla i řešení bez jednotek.

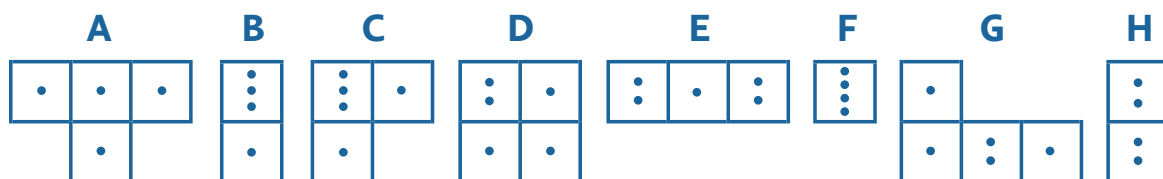


- U obvodu došlo k nepochopení u úsečky mezi vrcholy E2–E3, kdy žák tvrdil, že měří 3 cm, protože prochází 3 čtverci. Žáci často k určení obvodu využili toho, že některé strany útvarů byly shodné, čehož si všimli a danou délku pak násobili dvěma (např. u K). Někteří měřili obvod s využitím pravítka.

KRYCHLOVÉ STAVBY

Ukázka úlohy:

Hra Sova.



Ariana hádá, jakou stavbu si myslí Elmar.

ARIANA: Má tvoje stavba právě jednu krychli ve druhém podlaží?

ELMAR: ANO.

ARIANA: Má v prvním podlaží méně než 4 krychle?

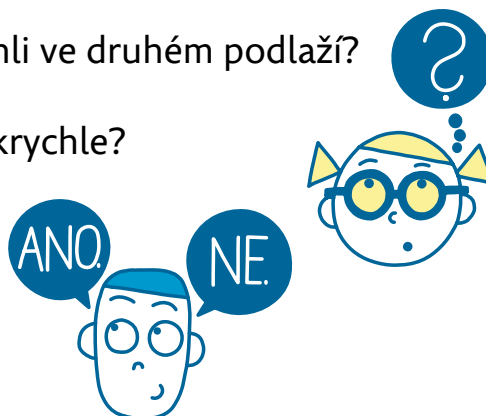
ELMAR: ANO.

ARIANA: Je postavena ze čtyř krychlí?

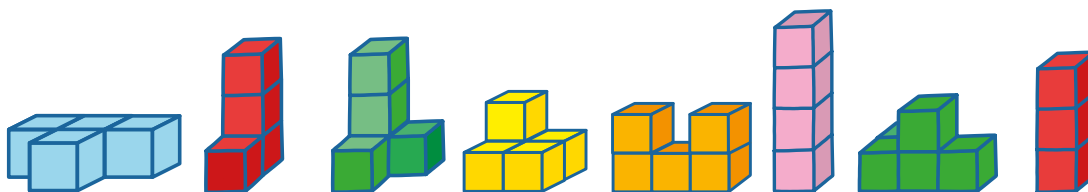
ELMAR: NE.

ARIANA: Tak si myslíš stavbu C.

Má Ariana pravdu?



Galerie krychlových staveb podle plánů v úloze výše:



Řešení úlohy:

Ariana má pravdu.

Učební aktivity s krychlemi rozvíjí u žáků **prostorovou představivost ve 3D geometrii** a přispívají k budování představ o **povrchu a objemu těles**. Žáci se učí zakreslovat **kolmé průměty staveb** (půdorys, nárys, bokorys), pracují s **plány staveb** a s **dalšími jazyky**, kterými lze tyto stavby popisovat. V neposlední řadě poznávají **vlastnosti krychlových staveb**, jak to můžeme vidět v uvedené úloze (hra Sova, ve které si jeden žák myslí stavbu z galerie a úkolem ostatních je pokládat vhodné otázky, aby myšlenou stavbu určili). Přitom se zcela přirozeně učí používat a **zpřesňovat geometrické pojmy**, což je podporováno jejich vnitřní potřebou odhalit myšlenou stavbu. Čím přesnější pojmy v otázkách žáci použijí, tím spíše se jim povede určit danou stavbu. Ve všech těchto aktivitách je zásadní, aby měli žáci možnost **manipulace se skutečnými krychlemi**. Haptické poznávání geometrického světa (tedy hmatem) pomáhá žákům budovat kvalitní a trvalé znalosti. V neposlední řadě toto prostředí umožňuje **propojovat geometrii s dalšími oblastmi matematiky, jako jsou aritmetika, kombinatorika a práce s daty**.

1. ročník

Pojem podlaží

Při práci s krychlemi se v praxi osvědčilo používání slova podlaží (jedna úroveň stavby) namísto známého slova patro nebo poschodí (část stavby nad přízemím). Tím odpadnou nejasnosti v komunikaci (první podlaží by tak bylo přízemí a druhé podlaží by bylo první patro – tomu se chceme vyhnout).

Zda žák dobře rozumí pojmu podlaží a aktivně s ním dokáže pracovat, lze dobře diagnostikovat.

Úloha:

Postav stavbu, která má 3 krychle v prvním podlaží a 1 krychli ve druhém podlaží.

Komentář pro učitele:

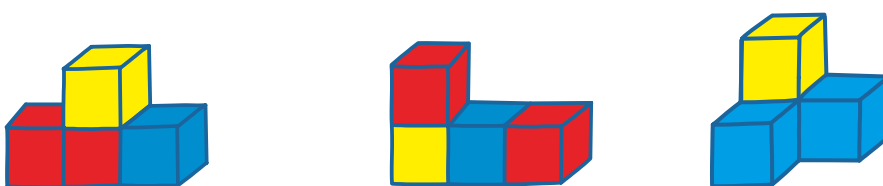
Úloha diagnostikuje, zda žák dobře rozumí pojmu podlaží a aktivně s ním dokáže pracovat. V budoucnu se v podobných úlohách bude zpřesňovat jazyk. V zadání se žáci setkají se slovem „právě“ (právě 3 krychle, právě 1 krychle). Více myšlenek k tomuto tématu lze najít v části **Slovo právě, přesnost jazyka**.

Chceme sledovat:

- zda žák rozumí pojmu podlaží,
- zda žák rozumí číselným údajům v úloze,
- zda žák využívá různé barvy krychlí.

Poznátky:

- Většina žáků stavěla 3 krychle lineárně vedle sebe (vláček), následně pak umístili čtvrtou krychli. Výjimečně se objevilo řešení „růžek“, viz obrázek:



Následná diferenciaci, reedukace:

- Jako náročnou úlohu lze žákům zadat výzvu, aby našli všechna řešení této úlohy (myslíme pro situaci, kdy žák pracuje s právě 4 krychlemi).

Později lze úlohy spojit i s **evidencí počtu** krychlí, jak uvádí následující úloha:

Doplň.



Ve věži jsou  . Ve věži jsou  .
 Ve věži je  . Ve věži je celkem  .
 je ve podlaží.
 je v podlaží a ve podlaží.
 je ve podlaží, v podlaží a v podlaží.

Chceme sledovat:

- zda si žáci stavbu reálně postaví (budou pracovat s modelem),
- jak budou žáci při řešení postupovat,
- jak budou žáci vnímat nevybarvenou krychli.

Poznátky:

- Co se týče čtenářské gramotnosti, zaznamenali jsme problém s orientací v textu a přiřazováním částí textu ke stavbě/obrázku, problematické je zmínění vícero podlaží v jedné větě.
- Někteří žáci si stavbu postavili, někteří to nepotřebovali. Je ale podstatné, aby krychle byly před žáky viditelně na stole, aby je mohli v případě potřeby použít.
- Opakovaně se objevovalo to, že žáci místo věže stavěli vláček, což ovlivňovalo vnímání podlaží.
- Bílá krychle působila nedorozumění, žáci ji interpretovali jako počet bílých krychlí, ne jako celkový počet, viz následující řešení:

DOPLŇ.  VE VĚŽI JSOU 2  . VE VĚŽI JSOU 3  .
 VE VĚŽI JE 1  . VE VĚŽI JE CELKEM 0  .
 JE VE 2 PODLAŽÍ.
 JE V 0^x PODLAŽÍ A VE 1 PODLAŽÍ.
 JE VE 3 PODLAŽÍ, V 5 PODLAŽÍ A V 6 PODLAŽÍ.

Následná diferenciac, reedukace:

- Pokud učitel zaznamenal potíže s náročností textu, může aktivitu změnit tak, že bude žákům prezentovat různá tvrzení a žáci budou určovat jejich pravdivost. Důležité je vždy následně pravdivost ověřit pomocí modelování/názornou vizualizací přímo na modelu stavby.
- Učitel může zadání úlohy žákům přečíst.
- Možností je také postupné odkrývání textu a následné předčítání učitelem nebo žáky.
- Vzhledem ke zkušenostem s nedorozuměním bílé krychli zde uvádíme zadání, kde je tento prvek nahrazen všemi barvami:

Úloha:

Doplň.



Ve věži jsou  .

Ve věži jsou .

Ve věži je .

Ve věži je celkem    .

 je ve podlaží.

 je v podlaží a ve podlaží.

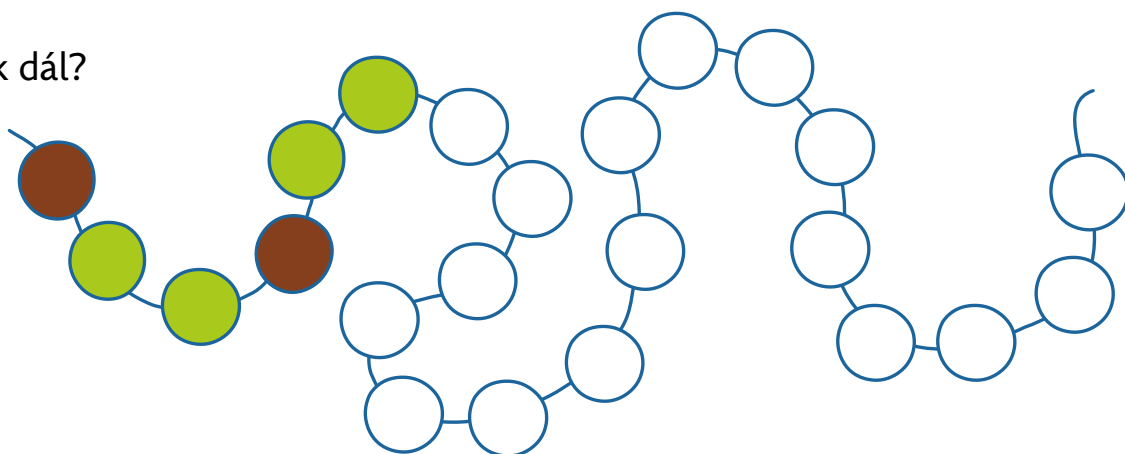
 je ve podlaží, v podlaží a v podlaží.

Rytmus ve stavebách

V Hejného metodě se prolínají témata, myšlenky v různých kontextech či prostředích. Úlohy s krychlovými stavbami lze také využít k diagnostice toho, zda žák vnímá vizuální rytmus, se kterým se setkává např. v podobných úlohách s korálky.

Úloha:

Jak dál?

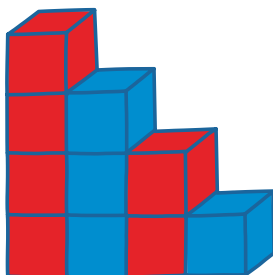


Takovou úlohou může být např. tato:

Úloha:

Máš 6 červených a 4 modré krychle.

Postav z nich tuto stavbu.

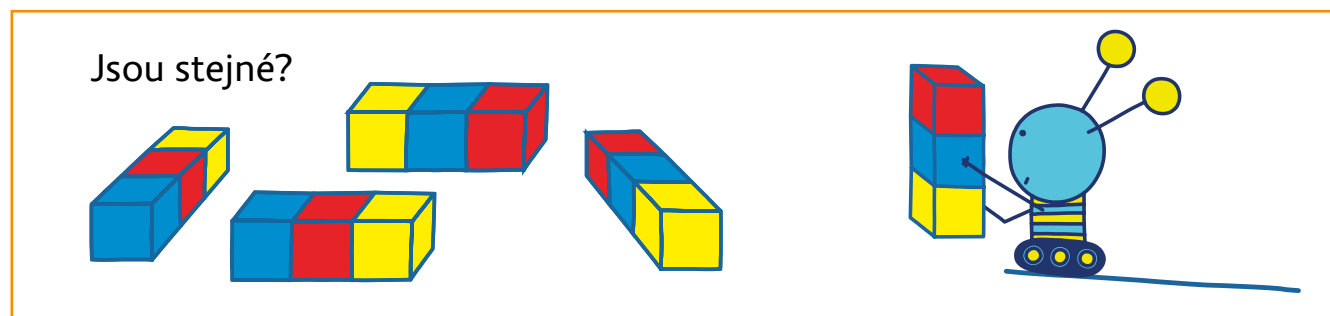


Komentář pro učitele:

Někteří žáci skládají krychle nahodile, ale objevují se i „rytmická“ řešení (nejprve staví věže z modrých krychlí, následně z červených, stavba po podlažích apod.). Z tohoto pohledu diagnostiky není třeba žádné reedukace. Společným sdílením a diskuzí ve třídě se podobné myšlenky pojmenují.

Důležité je diskutovat i to, **jakým způsobem žáci na stavby nahlíží**. Jak je to myšleno, ukážeme na další úloze.

Úloha:

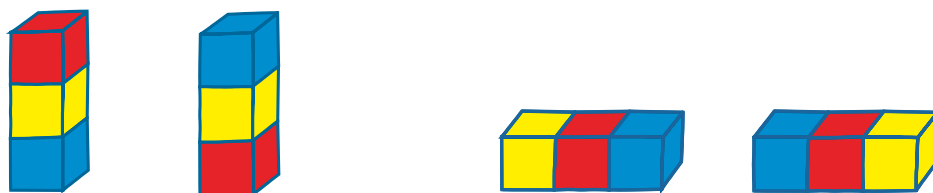


Komentář pro učitele:

Otázky stejnosti staveb jsou pro mladší žáky náročné. Nelze říct, jaké řešení je to správné. Záleží na individualitě žáka, na jeho zkušenostech a vnímání. Někteří žáci považují za stejné pouze stavby se stejnými barvami krychlí i jejich polohou v prostoru. Jiní žáci považují za stejné ty stavby, které lze otočením přemístit tak, aby byly totožné. Často u mladších žáků vítězí sémantické kotvení.

Např. u otázky, zda jsou tyto stavby stejné  , tito žáci řeknou, že nejsou, protože kdyby to byly vláčky (myšleno sémanticky, ze životní zkušenosti), tak u prvního vláčku je první modrý vagón, pak červený a na konci je žlutý, u druhého je to naopak. Na to, jak žáci tuto „stejnost“ vnímají, může být zaměřena diagnostika. Reedukace stejně jako u předchozí otázky rytmu není třeba. Žáci vlivem společných diskuzí a získáváním zkušeností i věkem tyto myšlenky upravují.

Zajímavé může být stejnou situaci s žáky vyzkoušet s komíny. Např. na dvou komínech (věžích) na obrázku jsou barvy v 1. a 3. podlaží prohozeny. Pokud se žáků zeptáme, zda jsou stavby stejné, pravděpodobně žáci odpoví, že ne. Na rozdíl od situace, kdy jsou krychle skládány v řadě, zde se více projevuje sémantické chápání, tedy stavění věží (věž nelze otáčet).



Nyní si obě situace blíže vysvětlíme. V tomto případě jsou obě stavby jednopodlažní a vždy můžeme jednu z nich obejít takovým způsobem, abychom ji viděli stejně jako tu druhou. Stavby samotné tedy ani otáčet nemusíme, abychom se o stejnosti přesvědčili. Oproti tomu v prvním případě věží mají sice obě stavby ve druhém podlaží žlutou krychli, ale barvy krychlí v prvním a třetím podlaží se liší. Na stavby se nemůžeme podívat takovým způsobem, abychom obě viděli z některých úhlů stejně (brání nám v tom podlaha). Z tohoto důvodu považujeme věže za různé stavby a vláčky za stejné. Na druhém stupni se situace zobecní – nemluvíme o sémantických stavbách, ale o desémantizovaných tělesech, u kterých neurčujeme podlaží a jejich umístění v prostoru pro nás není podstatné. Proto můžeme říct, že všechny tyto věže a stavby představují jedno těleso.

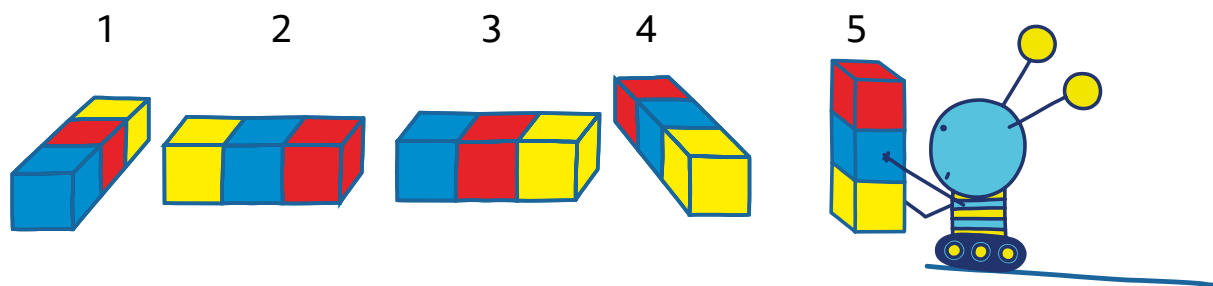
Chceme sledovat:

- jak žáci na stavby nahlíží, zda je vnímají jako stejné, či nikoli,
- jaké budou zaznívat argumenty.

Poznátky:

- Je těžké vyvodit obecné závěry (obáváme se generalizace).
- Měla by to být otevřená věc ve třídě, není dobré násilně úlohu uzavírat, tento okamžik nastane přirozeně ve chvíli, kdy se začne pracovat s plánem.
- Touto úlohou učíme žáky argumentovat.
- Žáci popisovali, že stavby jsou stejné, ale že se musí otočit.
- Žáci také využívali svoji zkušenost z prostředí Vláček.
- U věží opět zaznívalo, že jsou stejné, ale že by se druhá věž musela otočit.
- Osvědčilo se také využití sémantizace – barevná podlaží jako jména lidí, kteří v daném podlaží bydlí, a stěhování lidí (paní Modrá, pan Červený apod.)

Dále uvádíme přepis diskuze mezi učitelem a jeho žáky (1. třída). Pro lepší komunikovatelnost učitel stavby očísloval, viz obrázek:



1. skupina:

PU: „Zkuste se zamyslet, jestli vám přijde, že jsou stavby stejné, nebo nejsou. Pokud vám přijde, že jsou, zkuste vysvětlit proč a pokud vám přijde, že nejsou, tak taky zkuste vysvětlit proč.“

Tadeáš: „Pětka a dvojka. Čtyřka a trojka.“

Vilém se spolužákem nesouhlasí: „Nejsou, protože červená je ve čtyřce (stavba č. 4) nahoře a ve trojce (stavba č. 3) je uprostřed.“

PU: „Hm, takže ty vidíš tady tu červenou na kraji a tady uprostřed a říkáš, že trojka a čtyřka stejné nejsou.“

Vojta: „Trojka a jednička. Čtyřka a pětka. A dvojce (stavbě č. 2) nezbejvá stavba. Nebo ještě. Jsou tu ještě tři stejné – dvojka, čtyřka a pětka.“

PU: „Takže ty myslíš, že dvojka, čtyřka a pětka jsou stejné a trojka a jednička jsou stejné. Rozuměla jsem ti správně? Myslí si to někdo stejně jako Vojta, nebo máte ještě úplně jiný názor než Vojta? Jak to s těmi stavbami vlastně je?“

Vilém: „Já s ním souhlasím.“

PU: „Vojto, já se zeptám. Pětka je stavba, která stojí jako komín, ale ta pětka tady leží. Je to stejná stavba, nebo je to jiná stavba? Jak bys to vysvětlil?“

Vojta: „Je to stejná stavba, jenom je jinak položená.“

PU: „Takže ty říkáš, že když ta stavba stojí nebo se položí, tak je to jedno, připadá ti to stejné, jo?“

Ostatní děti s Vojtovým názorem souhlasí, kývou hlavami.

2. skupina:

David: „Jsou všechny stejné.“

PU: „Souhlasíte ostatní, má pravdu? Mariánko, proč nesouhlasíš?“

Mariánka: „Protože jsou třeba jinak seřazený. Třeba trojka je na tom místě, kde má být dvojka.“

PU: „Že si myslíš, že by měly být prohozené? A proč? Že by ta trojka měla být blíž jedničky, tak to myslíš?“

Mariánka: „Že by to mělo být jedna, dva, tři, čtyři, pět.“

Adélka: „Já si myslím, že trojka a jednotka jsou jiné.“

PU: „Myslíš, že trojka a jednička jsou jiné než ty ostatní – dvojka, čtyřka a pětka? Dokázala bys vysvětlit, co je na nich jiné?“

Adélka: „Protože červená je uprostřed i na té jednotce a všechny ty mají nahoře tu červenou.“

PU: „Souhlasíte s Davidem, Adélkou, Mariánkou, nebo to vidíte úplně jinak?“

Martin: „Ta dvojka má uvnitř a čtyřka a pětka mají uvnitř modrou a jednička a trojka ji mají na začátku.“

Ema: „Já souhlasím s Adélkou, protože to vidím stejně jako ona.“

Viktor: „Jedna a tři. Jsou každý jiný.“

PU: „Davide, co ty, když jsi slyšel ostatní? Stojíš si za svým, že jsou všechny stejné?“

David vrtí hlavou, ale nechce to okomentovat.

PU: „Kdo souhlasí s tím, co pojmenovala Adélka a další, že 2, 4 a 5 jsou stejné a 1 a 3 jsou jiné. Zvedněte ruku. A kdo s tím nesouhlasí?“

Martin: „2, 4, 5 mají modrou uprostřed a 1, 3 ji mají na začátku.“

PU: „Já se zeptám, je stejná tady ta 5, stavba, která vypadá jako věž, a 1 nebo 4, které leží jako vláček? Je to stejné, nebo je to jiné?“

Ema: „Ta pětka je jiná.“

Viktor: „Pětka a čtyřka jsou stejný, ale pětka a jednička nejsou stejný.“

PU: „Promiň, já to spletla, vy jste říkali 2, 4 a 5. Ty jsou stejné? Připadá ti stejné, i když tohle je věž a tohle vláček?“

Viktor: „Jo, jsou stejný.“

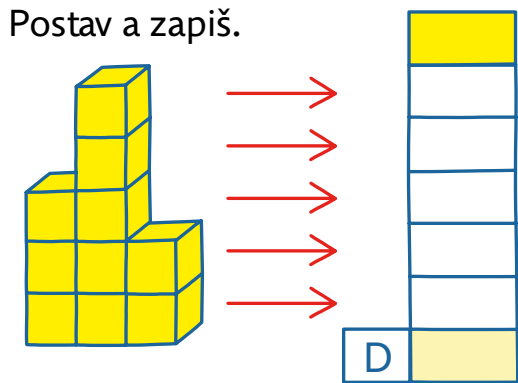
PU: „Poslední hlasování. Kdo si myslí, že i když stojí nebo leží, tak jsou ty stavby stejné, zvedněte ruku.“ Ruku zvedly 4 děti.

PU: „Kdo si myslí, že je to jiné, když stojí nebo když leží?“ Ruku zvedly 2 děti. 7 dětí se vůbec do hlasování nezapojilo.

Práce s tabulkou

Úloha:

Postav a zapiš.

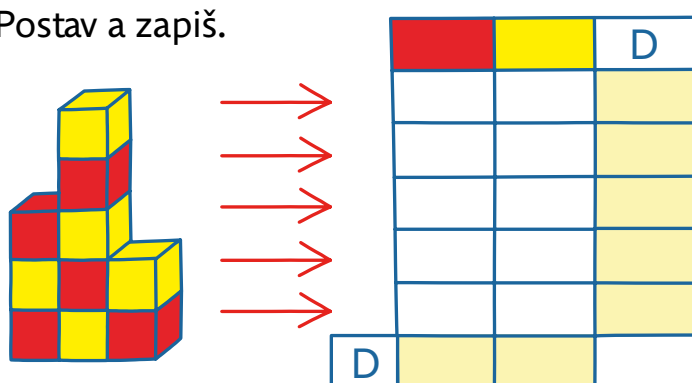


The 3D structure consists of yellow cubes arranged in three columns: the left column is 3 cubes high, the middle column is 4 cubes high, and the right column is 2 cubes high. To the right of the structure is a table with 5 rows and 2 columns. Red arrows point from each row of the 3D structure to a row in the table. The bottom-left cell of the table contains the letter 'D'.

D	

Úloha:

Postav a zapiš.

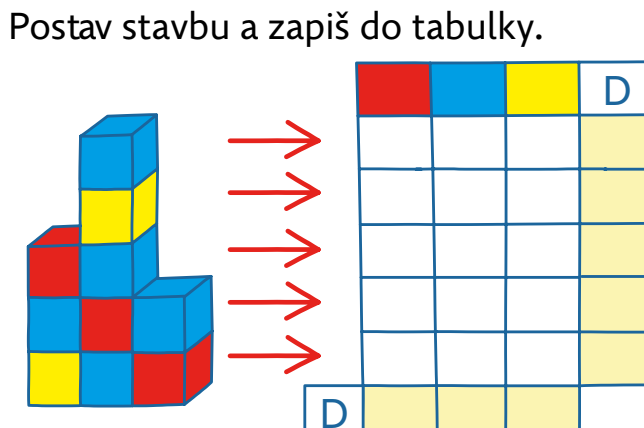


The 3D structure consists of yellow and red cubes arranged in three columns: the left column is 3 cubes high, the middle column is 4 cubes high, and the right column is 2 cubes high. To the right of the structure is a table with 5 rows and 3 columns. Red arrows point from each row of the 3D structure to a row in the table. The top-left cell of the table is red, the top-middle cell is yellow, and the top-right cell contains the letter 'D'. The bottom-left cell of the table contains the letter 'D'.

D		

Úloha:

Postav stavbu a zapiš do tabulky.



The 3D structure consists of blue, yellow, and red cubes arranged in three columns: the left column is 3 cubes high, the middle column is 4 cubes high, and the right column is 2 cubes high. To the right of the structure is a table with 5 rows and 4 columns. Red arrows point from each row of the 3D structure to a row in the table. The top-left cell of the table is red, the top-middle cell is blue, the top-right cell is yellow, and the top-right cell contains the letter 'D'. The bottom-left cell of the table contains the letter 'D'.

D			

Komentář pro učitele:

V této sérii úloh se žáci učí propojovat krychlové stavby s důležitou dovedností, jakou je práce s tabulkou. V první úloze evidují počet žlutých krychlí v jednotlivých podlažích, druhá úloha je náročnější použitím dvou barev, třetí dokonce tří barev. Pokud žáci mají dost podobných zkušeností, učitel se může např. u třetí úlohy ptát: „Co vyjde, když sečteme tři čísla dolního řádku (počet jednotlivých krychlí podle barev)?“ „Co vyjde, když sečtu všechna čísla pravého sloupce tabulky (počet krychlí v jednotlivých podlažích)?“ Učitel také může žáky vyzvat, aby sečetli tři žlutá pole v posledním sloupci a potom pět žlutých polí v posledním sloupci. Oba součty budou vždy stejné – určují počet všech krychlí stavby.

Chceme sledovat:

- jakým způsobem budou žáci evidovat do tabulky a jak to bude propojené s tvorbou stavby,
- jakým jazykem bude evidence probíhat,
- jak porozumí písmenu D,
- jak bude zvyšování počtu barev ovlivňovat úspěšnost řešení.

Poznátky:

- U vícebarevných staveb docházelo k potížím s orientací v tabulce (žáci nevěděli, kam hodnoty zapisovat).
- Dalším úskalím bylo písmeno D, které v některých žácích evokovalo slovo „dole“ místo „dohromady“.
- V rámci strategie evidovali žáci buď po jednotlivých řádcích (podlažích), nebo se někteří zaměřovali na dané barvy a jejich počty krychlí postupně evidovali do tabulky.
- Většinou žáci evidovali číslicemi, u vyššího počtu někteří přecházeli k jazyku čárek (to bylo ovlivněno menšími zkušenostmi s daným počtem a zápisem číslic). Někteří žáci do tabulky evidovali 0 v případě chybějící krychle, jiní políčko proškrtávali.

Následná diferenciac, reedukace:

- Aktivitu lze modifikovat pro práci ve dvojicích, kdy jeden žák stavbu postaví, druhý zaznamenává hodnoty do tabulky a naopak.

Učitel může také sledovat, zda žákům nečiní potíže obrácená úloha, viz níže:

Úloha:

Postav další stavby podle tabulky.

3. PODLAŽÍ		/
2. PODLAŽÍ	/	
1. PODLAŽÍ	/	//

Komentář pro učitele:

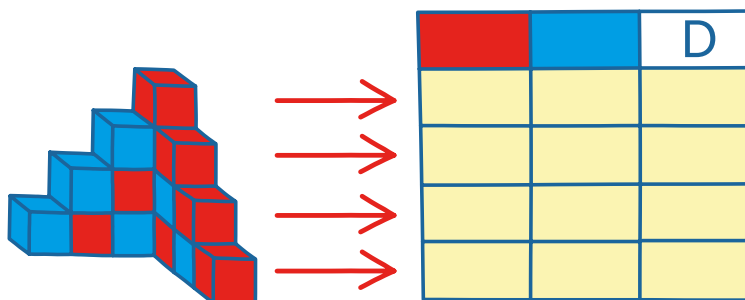
Máme danou tabulku a úkolem je postavit podle ní stavbu. Žáci objevují, že pokud je dána stavba, tabulka je doplněna jednoznačně. Pokud ale mají k dispozici tabulku, většinou lze postavit stavby různé, stejně jako v této úloze. Podobné úlohy přispívají do další oblasti matematiky – kombinatoriky.

Neviditelné krychle

Žáci se již v 1. ročníku setkají s náročnou myšlenkou krychlí, které nejsou z určitého pohledu viditelné. I v tomto případě je reedukace jednoduchá, např. hra se spolužákem, kterému tento parametr není překážkou. Klíčová je manipulace, tedy postavit stavbu a podívat se na ni z různých pohledů.

Úloha:

Z osmi  a osmi  postav stavbu. Zapiš.



Komentář pro učitele:

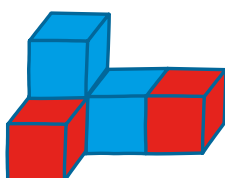
Náročnost úloh lze zvyšovat i kombinací gradačních parametrů. Např. v této tabulce žáci z tabulky a obrázku musí vyčíst informaci, kterou barvu má neviditelná krychle. Obecně úlohy, ve kterých se kombinuje více gradačních parametrů, jsou náročnější k diagnostice. Pokud žák není úspěšný, musí učitel správně lokalizovat chybu. Jedna z možností je zadat lehčí úlohy, ve kterých budou gradační parametry samostatně.

Učitel může zadávat i úlohy, kdy je úkolem žáků z postavené stavby a tabulky zjistit barvy neviditelných krychlí.

Úloha:

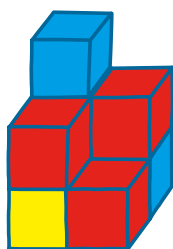
Postav. Jakou barvu mají ukryté krychle?

a)



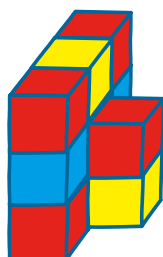
		
2. PODLAŽÍ		/
1. PODLAŽÍ	//	//

b)



			
3. PODLAŽÍ		/	
2. PODLAŽÍ	//	/	
1. PODLAŽÍ	/	/	//

c)



			
3. PODLAŽÍ	//		/
2. PODLAŽÍ	/	//	/
1. PODLAŽÍ	//	/	/

Poznátky:

- Největší potíže vznikaly v úloze c), kdy žáci neviděli druhou modrou krychli ve 2. podlaží nebo zapomínali na ukrytou modrou krychli v 1. podlaží.
- U některých žáků se projevila potřeba stavby reálně vytvořit, a to postupem, kdy si připravili nejprve daný počet a barvy krychlí podle tabulky.
- Objevila se také situace, kdy u neviditelné krychle žáci vnímali více možných řešení (nedošlo k propojení na údaje z tabulky).

Následná diferenciacce, reedukace:

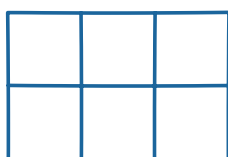
- Při reedukaci pomohlo reálné modelování staveb a jejich sledování z různých pohledů.
- Velmi dobře se osvědčil (zvláště v online výuce) podpůrný výukový program http://www.delmat.info/a/13/?fbclid=IwAR0Wcq-C_oBgtjos5cnZphSNQ_RJsi3XMj1h6BMB34ll4FjSDBa2jL60Zq4, pomocí kterého je možné virtuálně modelovat krychlovou stavbu a různě ji otáčet. Nicméně žádná aplikace nemůže plně nahradit fyzický model z krychlí, který žáci poznávají hapticky.

Plán

Úloha:

Přečti tabulku a postav stavbu. Zakresli do mříže pozemek, na kterém stavba stojí.

4. PODLAŽÍ	1
3. PODLAŽÍ	2
2. PODLAŽÍ	3
1. PODLAŽÍ	3

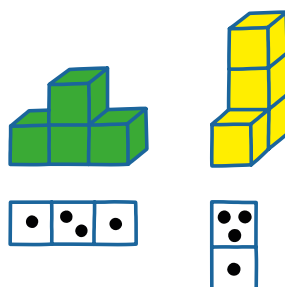


Komentář pro učitele:

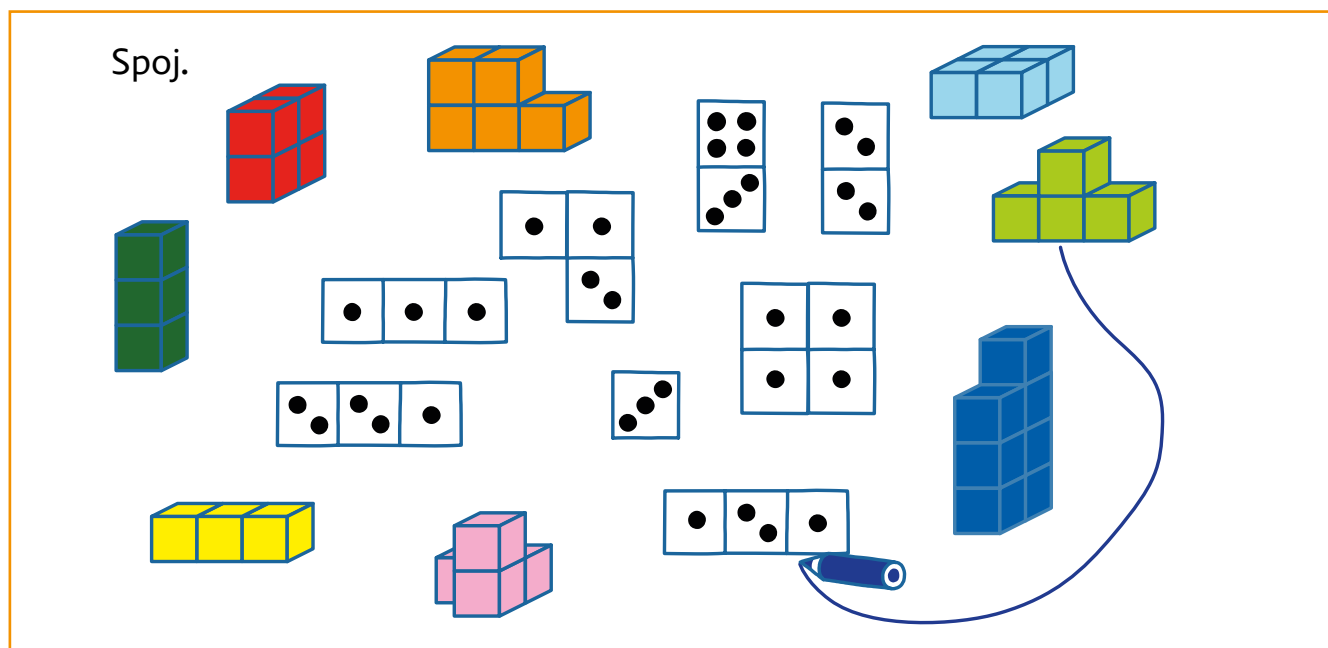
Nejprve se s žáky zakresluje pozemek (ten by šel pojmenovat jako hranice stavby, ohraničení stavby). Zde je důležité s žáky hodně diskutovat, vzniká zde postupně potřeba nějakým způsobem zaznamenat počet krychlí patřící ke každému čtverečku (pozemku). Žáci totiž zjistí, že podle ohraničení pozemku jednoznačně stavbu postavit nelze. Pokud žáci sami navrhnou jazyk teček, se kterým se následně seznámí, je to ideální.

Úloha:

Postav svoje stavby ze 3 nebo 4 krychlí a znázorni je jako Kira.



Úloha:



Komentář pro učitele:

Žáci postupně získávají zkušenosti se stavbami a jejich plány. Zařazujeme jim úlohy, kdy podle plánu staví stavbu, z postavené stavby kreslí její plán, přiřazují k plánům stavby apod.

Náročnější úlohy žáci řeší, když se propojí více náročných myšlenek, např. v následující úloze:

Úloha:

Postav stavbu z 8 krychlí podle tabulky a zapiš plán.

3. PODLAŽÍ	2
2. PODLAŽÍ	3
1. PODLAŽÍ	

Komentář pro učitele:

Žáci propojují práci s krychlemi s jejich plánem a tabulkou. Nejprve si musí uvědomit, že v 1. podlaží jsou 3 krychle, poté podle tabulky staví stavbu. Tu lze postavit několika způsoby, v úlohách se tedy objevuje i kombinatorika. Poté zapisují plán.

Chceme sledovat:

- zda žákům nečiní potíže nějaká z takových úloh,
- zda mají žáci motivaci hledat více řešení (v úlohách se vstupem kombinatoriky).

Následná diferenciac, reedukace:

- Pokud zjistíme potíže s nějakým typem úlohy, reedukace je jednoduchá. Necháme žáka, co úloze rozumí, jeho myšlenky vysvětlit a žáky podporujeme v manipulaci (stavění staveb).
- Motivovaným žákům lze zadat výzvu, aby našli všechny možnosti staveb, které lze podle zadané tabulky vytvořit (cílíme tedy na kombinatoriku).

2. ročník

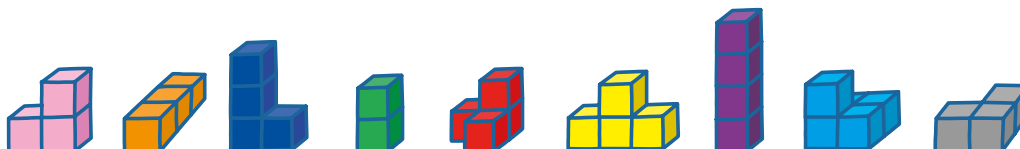
Slovo právě, přesnost jazyka

Postupně s žáky pracujeme i na zpřesňování jazyka, je to stěžejní úkol učitele. Ten sám přesný jazyk ve své výuce správně používá. Ukážeme si to na následující úloze:

Úloha:

Které krychlové stavby mají právě dvě podlaží?

Zakroužkuj barvu a zapiš plán.



Komentář pro učitele:

Úloha cílí na pojem podlaží a také na zmiňovanou přesnost jazyka. Jak by se mohlo změnit vnímání žáků, kdyby ze zadání slovo právě vypadlo? Např. fialovou věž by určili, že patří mezi stavby se dvěma podlažími. Zde nám nepomáhá běžný jazyk, který v životě používáme, kdy slovo „právě“ často vynecháváme.

Pro učitele je to dobrá diagnostika, jak žáci tuto problematiku rozpoznávají. Učitel může sledovat, v jakém věku se taková myšlenka u žáků objeví, kolik žáků ji přijme nebo kolik žáků tomu nepřikládá důležitost.

Nejde o žádnou matematickou chybu, proto ji není třeba reedukovat. Důležité je ale vyvolávat diskuzi, když se podobná myšlenka objeví. Diskuze se může objevit, pokud na to v úloze zacílíme, např. způsobem, kdy žákům zadáme úlohu: „Postav stavbu, která má v prvním podlaží dvě krychle, ve druhém podlaží krychle tři.“

Chceme sledovat:

- jak žáci vnímají slovo „právě“ v zadání úlohy,
- kolik žáků ve třídě toto slovo přijímá.

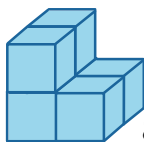
Poznátky:

- Žáci neměli problémy se stavěním staveb, ale některým dělал potíže zápis plánu. Při zápisu plánu si někteří žáci pletli pohled zepředu s půdorysem stavby.
- Po reedukační aktivitě (popsáno níže) byla úloha zopakována a většina žáků řešila již bez problémů.
- V záznamu plánu se často objevovala evidence čísla.
- Se slovem „právě“ ve většině případů neměli žáci problém, výjimečně žáci hledali všechny stavby, které měly alespoň 2 podlaží. Nicméně je vhodné pravidelně pracovat s pojmy jako „právě“, „nejméně“, „nejvíce“, „alespoň“ atd.

Následná diferenciac, reedukace:

- Úloha je komplexní, proto ji žákům, kteří s ní měli potíže, můžeme rozfázovat na dílčí podúlohy (žáci nejprve staví a řeší počty podlaží, následně zapisují plán).
- Pokud měli žáci potíže se zápisem plánu, je důležité vrátit se k úlohám výše a věnovat se tvorbě pozemku (využití čtvercové mříže) a otiskům staveb.

Úloha:



Ema si postavila tuto stavbu a říká: „V prvním podlaží mám tři krychle, ve druhém dvě. Má pravdu?“

Komentář pro učitele:

Žáci budou argumentovat, že 1 krychle je skrytá a jsou tam krychle 4. Některý žák namítne, že jsou tam 4, ale také 3.

Poznátky:

- Žáci se často shodovali na tom, že Ema pravdu nemá. Ve chvíli, kdy část žáků s Emou souhlasila a část ne, většinou učitel podporoval ve třídě diskuzi, aby napřed sami žáci zkusili tento spor vyargumentovat. Teprve ve chvíli, kdy se nepodařilo argumentačně přesvědčit žáky, že Ema pravdu nemá, nasměroval učitel žáky k ověření pravdivosti pomocí manipulace s krychlemi. V tu chvíli žák jednoznačně viděl, že by krychle z druhého podlaží spadla do prvního podlaží.

Ve 3. ročníku nebo i později lze zadat žákům úlohu, kde se zadání bude lišit pouze v upřesnění slova právě:

Úloha:

- a) Postav stavbu, která má v prvním podlaží 4 krychle.
- b) Postav stavbu, která má v prvním podlaží právě 4 krychle.

Komentář pro učitele:

Možná se objeví myšlenka uvedená výše (některý žák např. postaví stavbu z 5 krychlí), to je ideální příležitost k diskuzi. Pokud se neobjeví, učitel se může ptát, zda je mezi úlohami nějaký rozdíl. Není potřeba žáky k zpřesňování textu tlačit, ale dávat jim k tomu příležitost, vést je k potřebě jazyk zpřesňovat.

Podobné myšlenky lze provazovat na jiná prostředí a úlohy. Např. konkrétně v prostředí Rodina lze vzít větev rodokmenu, kde budou 4 sourozenci – tři sestry a jeden bratr. Bratr říká: „Mám dvě sestry.“ Diskuze ve třídě se možná poté objeví i v úlohách s krychlovými stavbami. V praxi se také osvědčilo dávat příklad s penězi. Pokud mám v peněžence tisíc korun a kamarád se mě zeptá, jestli mám sto korun na půjčení, můžu odpovědět ano. Mám sto korun, ale na těch zbylých 900 se mě neptal.

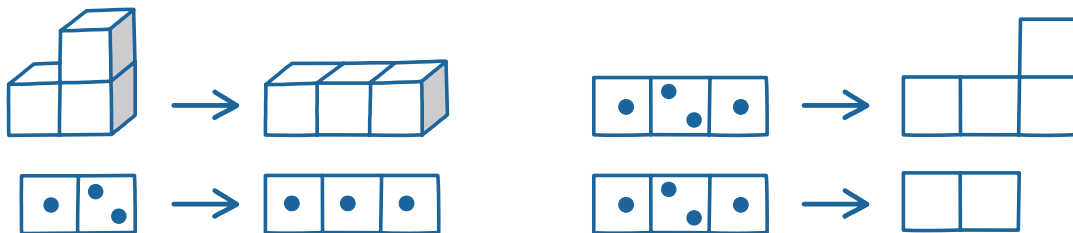
Pozn.: V praxi se místo slova „právě“ někdy používá slovo „přesně“. Slovo „právě“ je matematicky přesnější, slovo „přesně“ je na druhou stranu žákům bližší z hlediska jeho používání v běžném životě.

Proces stavby, přestavby

Následují úlohy, ve kterých se žáci učí evidovat proces stavby a zároveň k tomu budují potřebný jazyk.

Úloha:

Postav stavbu, přesuň krychli, zapiš plán.



Komentář pro učitele:

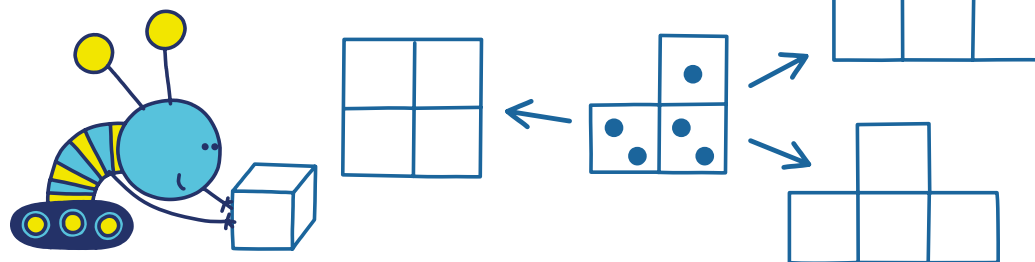
Jedná se o **animaci portréту (vlevo)** a **animaci plánu (vpravo)**. Tedy o **jazyk procesuální** (lze identifikovat pořadí příkládaných krychlí), na rozdíl od konceptuálního jazyka portrétů a plánů (nelze identifikovat). Žáci sami zjistí, že šipka znamená „přesuň jednu krychli“, v jiných úlohách „přidej jednu krychli“ (rozlišujeme podle zadání). Zajímavé je, že druhá animace vpravo má ještě další řešení se stejným plánem.

Chceme sledovat:

- zda žák správně chápe význam šipky (přesunuje jednu krychli, nikoli více),
- zda žák hledá více (všechna) řešení,
- zda žák potřebuje k řešení úlohy manipulaci.

Úloha:

Postav, přesuň, zapiš plán.



Komentář pro učitele:

V této úloze žáci hledají více řešení, jak ze zadané stavby přesunutím jedné krychle získat novou stavbu. Učitel může dát výzvu k nalezení všech možností. Zadané pozemky mohou žákům usnadnit práci, takže pokud chceme úlohu ztížit, pozemky nepředkreslíme.

Chceme sledovat:

- zda žáci potřebují k řešení úloh manipulaci,
- zda žáci chápou, že úloha má více řešení (a tato mají najít) – může být problém s formou zadání, kdy poprvé je zadána jen jedna stavba a hledáme různá řešení, většinou je zadána sice stejná stavba, ale na řádku se opakuje pro každé řešení,
- zda žákům nečiní problém změna směru šipek (doposud byly šipky vodorovně zleva doprava).

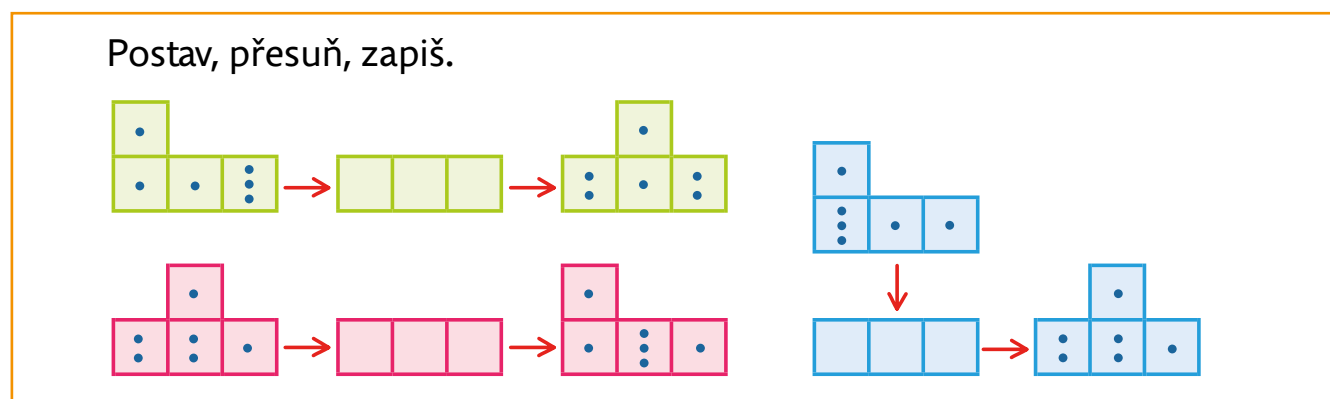
Poznátky:

- Většina žáků zachycovala přestavby plánem, ale objevili se i žáci, kteří se pokoušeli o vlastní záznamy (zapomněli, jak se plán zaznamenává).
- Velká část žáků se snažila najít všechna možná řešení, která byla dána plánem.

Následná diferenciacce, reedukace:

- Pokud žáci s předchozí úlohou neměli potíže (případně ani nepotřebovali manipulaci), můžeme jim nabídnout situaci bez předkreslených pozemků.
- Další možností jsou náročnější úlohy, kdy přesouváme jednu krychli dvakrát a známe plány původní a výsledné stavby, viz následující série:

Úloha:



Komentář pro učitele:

Úloha je náročná svou **komplexností, dynamičností, abstrakcí**. Žák musí doplnit stavbu uprostřed animace, zatím jen doplňoval stavbu „na konci“ animace. Tedy musí sledovat mnoho podmínek (první a poslední stavbu). Navíc musí v animaci udělat (promyslet) dva kroky – přesunout krychli z první stavby a ověřit, zda přesunem krychle z doplněné druhé stavby může vyjít třetí stavba.

Chceme sledovat:

- jaké strategie žák použil a zda využívá krychle k manipulaci.

Poznátky:

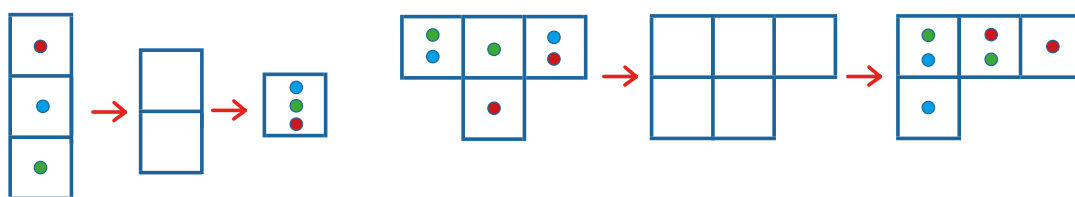
- Potvrdilo se, že úloha je velmi obtížná. Největším úskalím byla záměna v průmětech, kdy žáci stavěli stavbu tak, jako by půdorys (pohled shora) byl nárys (pohled zepředu).
- Poměrně mnoho žáků řešilo úlohu bez manipulace, a to i ti žáci, kteří si s řešením nevěděli rady.

Následná diferenciacce, reedukace:

- Reedukací může být vytvoření první a poslední stavby, ovšem půdorys se mění dvakrát a to zvyšuje náročnost.
- Úlohu je možné rozfázovat na dílčí kroky.
- Doporučujeme podporovat žáky v manipulaci s krychlemi a v reálném postavení jednotlivých staveb. Učitel může žáky vybídnout, aby si postavili první a poslední stavbu a zkusili přijít na to, jaká krychle se přesunula mezi jednotlivými přestavbami. Jako vhodná podpora se osvědčila i čtvercová mříž (velikost čtverce shodná se stěnou krychle), kdy si žáci vytvořili první a třetí stavbu, na druhou pozici zaznačili do mříže plán a z dalších krychlí zkoušeli vytvořit stavbu (daného plánu i počtu krychlí), ze které by bylo možné získat přesunutím jediné krychle stavbu třetí.

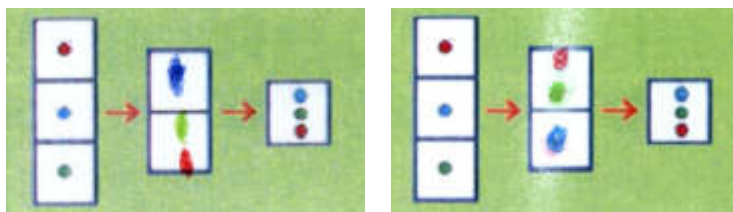
Úloha:

Postav, přesuň, zapiš.

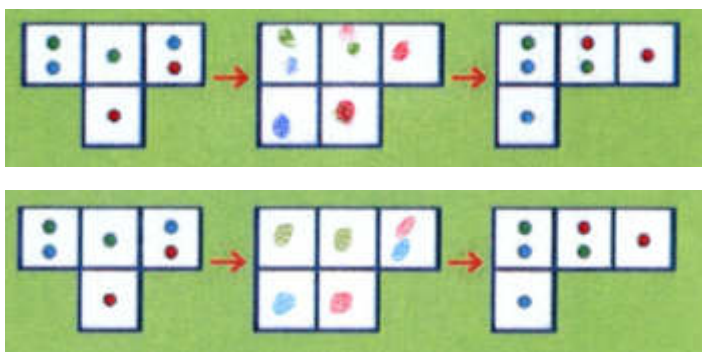


Poznátky:

- Úlohy jsou obtížnější barevnými plány.
- Žáci měli k dispozici krychle, ale mnoho z nich je nevyužívalo. Tito žáci pak velice často chybovali. Pokud na výzvu učitelky začali celou přestavbu modelovat pomocí krychlí, úspěšnost se výrazně zlepšila.
- Jedním z největších úskalí byla chybějící opora v manipulaci spojená s vědomím, že při jednom kroku přestavby smím přesunout pouze jedinou krychli.
- U následujících ukázek je zjevné respektování plánu stavby, ale „podsunutí“ krychle:



- U druhé úlohy někteří žáci zakreslili do druhého kroku i krok třetí, nechápou šipku jako pokyn „přesuň jednu krychli“. V některých řešeních udělali do druhého kroku dva přesuny bez další návaznosti. Někde přehodili krychle a nerespektovali pořadí podlaží. Také v některých případech ubrali ze stavby krychle, někde naopak přebývaly, viz následující řešení:



Následná diferenciac, reedukace:

- Smyslem je vést žáky k porozumění, že příbuzné stavby jsou jen ty, které vzniknou přesunutím pouze jedné krychle (přitom nesmím druhou rukou např. zvednout jiný komín a krychli umístit pod něj). Společně stavíme stavby na koberci, postupně každý žák přiloží jednu krychli. Když je stavba hotová, každý žák přesune jednu krychli a tím vzniká řetězec příbuzných staveb. Modifikací je „jeřáb“, kdy při přestavbě na příbuznou stavbu máme k dispozici pouze jeden jeřáb (jednu ruku), kterým můžeme přesunout jednu krychli. Druhou ruku nemůžeme použít, a proto není možné si přidržet nějaké další krychle a pohybovat s nimi.

Rozvoj jazyka, hra Sova

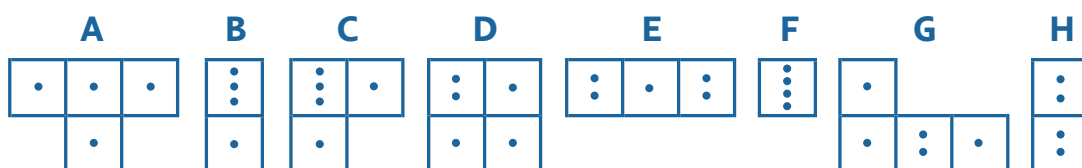
K rozvoji jazyka se jeví jako velmi vhodná aktivita hra Sova, případně její obměny.

Pravidla hry Sova:

Jeden žák je sova. Myslí na jeden objekt z galerie objektů. Ostatní pokládají zjišťovací otázky tak, aby sova mohla odpovědět ano/ne, a snaží se určit, na který objekt sova myslí. Hru můžeme modifikovat výzvou, aby žáci určili myšlený objekt co nejmenším počtem otázek, resp. aby tento počet určili. Aktivita cílí na posílení motivace pro potřebu a rozvoj matematického jazyka.

Úloha:

Hra Sova.



Ariana hádá, jakou stavbu si myslí Elmar.

ARIANA: Má tvoje stavba právě jednu krychli ve druhém podlaží?

ELMAR: ANO.

ARIANA: Má v prvním podlaží méně než 4 krychle?

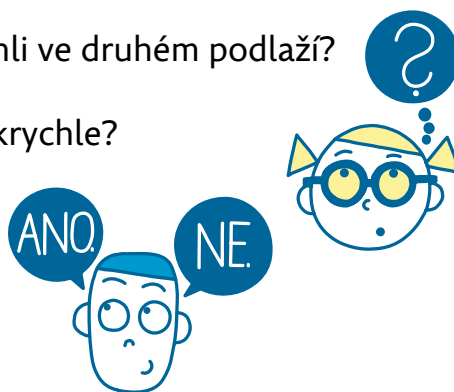
ELMAR: ANO.

ARIANA: Je postavena ze čtyř krychlí?

ELMAR: NE.

ARIANA: Tak si myslíš stavbu C.

Má Ariana pravdu?



Komentář pro učitele:

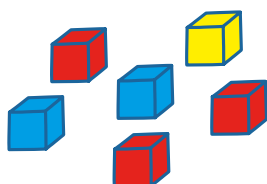
Je dobré mít zpočátku vytvořenou galerii staveb, bez toho je úloha velmi obtížná a nesleduje didaktický cíl nalezení strategie. Časem začnou žáci vidět konkrétní 3D stavby pod jednotlivými plány, a tudíž nepotřebují galerii vytvářet.

Podmínka

Dalším typem úloh je stavění krychlových staveb (zde konkrétně věží) podle určité podmínky.

Úloha:

Postav věž.

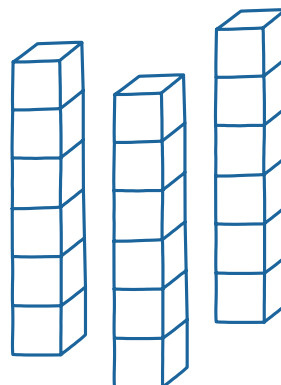


V 1. podlaží je  ,

Ve 2. podlaží je  ,

Ve 3. podlaží je  .

Vybarvi věž.



Komentář pro učitele:

První úloha na obrázku nejspíše žákům nebude činit potíže. Položí modrou krychli, na ni žlutou krychli a na ni zase modrou krychli.

Chceme sledovat:

- zda žák má potřebu věž skutečně stavět,
- zda budou někteří žáci vybarvovat bez použití manipulace.

Úloha:

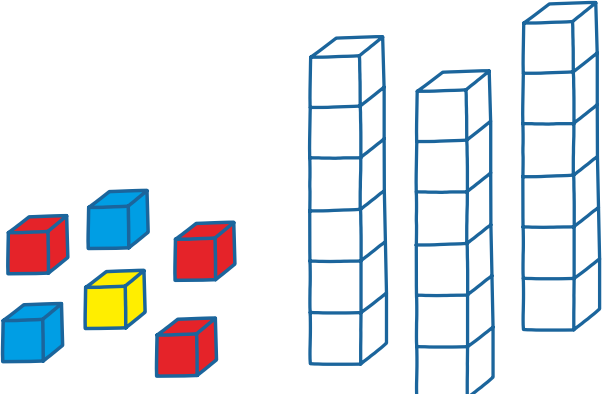
Postav a vybarvi věž.

 Je v 1. a ve 2. podlaží.

 Je **a)** ve 4. podlaží

b) v 5. podlaží

c) pod třemi .



Komentář pro učitele:

Někteří žáci si budou stavby vždy stavět, někteří budou vybarvovat do připravených šablon, v některých úlohách žáci mohou najít odpověď pouze z hlavy. Učitel si může všimnout, na jaké úrovni žák je, to mu umožní dobrou diferenciaci ve třídě (zadávání náročnějších úloh, nebo naopak péče o žáky, kteří nutně potřebují stavby stavět).

Poznátky:

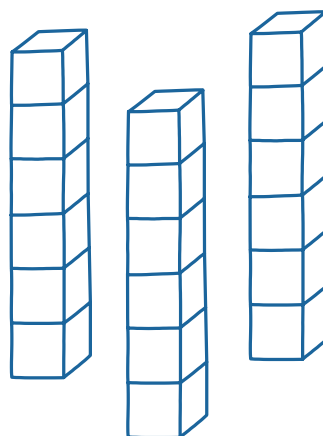
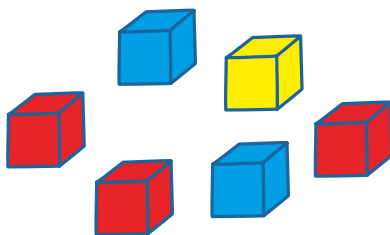
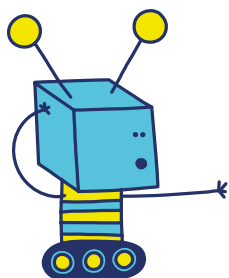
- Někteří žáci neměli potřebu věže stavět.
- Někteří žáci vybarvovali věž odshora (1. podlaží vnímají jako to nejvyšší), bylo to zapříčiněno chybějící manipulací s krychlemi.
- Některým žákům stavby padaly, proto začali stavět vláčky (to opět ovlivnilo pořadí).
- Potvrdilo se, že vlastní manipulace výrazně zlepšuje úspěšnost řešitelského procesu a eliminuje množství chyb. Rovněž podporuje uvědomění, že se stavba staví odspodu, což posiluje správné číslování podlaží odspodu.
- První podmínka je pro všechny stavby, druhá podmínka je specifická pro každou situaci zvlášť (ale první platí stále), na to žáci často zapomínali.

Následná diferenciaci, reedukace:

- Jako velká podpora pro žáky, kteří měli potíže s porozuměním textu, fungovalo ústní zadání úlohy ze strany učitele.
- Úlohu je možné pojmout graficky jinak, aby se pro žáky vyžadující pomoc zpřehlednila. Můžete u každé věže vytvořit dílčí zadání a k němu připravit jednu prázdnou věž.
- Reedukací by také bylo rozfázování úlohy na dílčí řešitelské etapy („nabalování“ podmínek).
- Možností by rovněž bylo vložit věž, kde budou popsána jednotlivá podlaží.

Úloha:

Postav věž tak, že v 1., 3. a 5. podlaží jsou krychle stejné barvy a mezi dvěma modrými krychlemi jsou tři krychle. Zakresli.



Poznátky:

- Potvrdily se stejné poznatky jako u předchozí úlohy.
- Úloha je znatelně obtížnější než předchozí, a to díky kombinaci podmínek. Žáci musí opakovaně zkoušet.
- Žáci, kteří chybovali, nebyli schopni dodržet všechny podmínky. Většinou zvládli dodržet pouze jednu z nich.

Následná diferenciacce, reedukace:

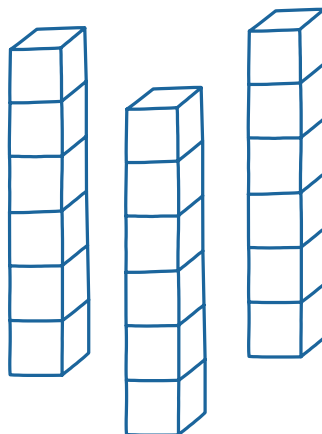
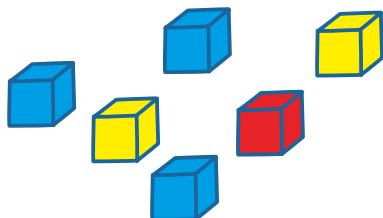
- Úloha byla zopakována s ústním zadáním. Opět se ukázalo, že při této realizaci byli žáci mnohem úspěšnější.

Lze zadat i úlohy, které mají více řešení. Pokud žáci všechna řešení najdou, opět to ukazuje jejich dobrý vhlad do podobných úloh.

Úloha:

Vybarvi věž.

 je v 1. a 6. podlaží.
a  je mezi dvěma .



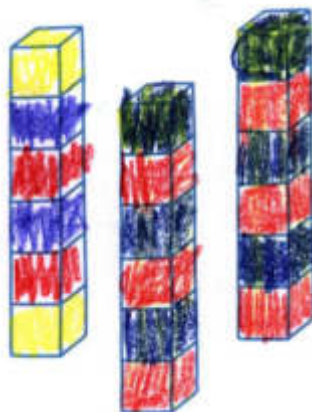
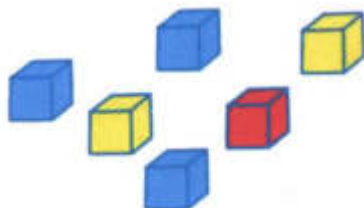
Poznátky:

- Poměrně často se v řešení objevila pouze jedna vybarvená věž.
- Dále se mezi chybami objevilo nepochopení zadání nebo selektivní dodržení pouze části zadání (jedné z podmínek), viz ukázka:

Vybarvi věž.

 je v 1. a 6. podlaží.

a  je mezi dvěma .

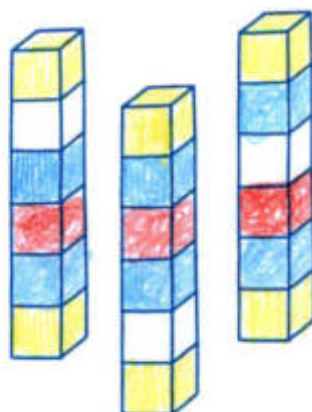
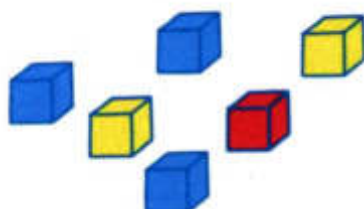


- Zaznamenali jsme také řešení, kdy někteří žáci nezohlednili třetí modrou krychli. Poté objevili 3 možná řešení, viz ukázka:

Vybarvi věž.

 je v 1. a 6. podlaží.

a  je mezi dvěma .



I v úlohách s podmínkami lze žáky vést k zpřesňování jazyka, např. v této úloze:

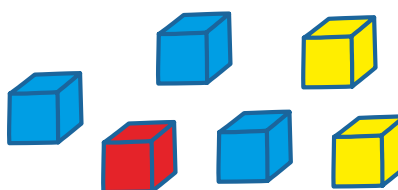
Úloha:

Postav věž.

 je v 1. a 2. podlaží.

Ve 3. podlaží je .

Červená krychle je pod žlutou krychlí.



Komentář pro učitele:

Žáci mohou najít tři různá řešení. Pokud poslední větu zpřesníme: Červená krychle je hned pod žlutou krychlí, řešení už budou pouze dvě. Touto úlohou lze diagnostikovat porozumění uspořádání, tedy zda žák správně vnímá „před“ a „hned před“.

Kombinatorický cíl

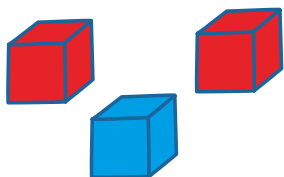
Další oblast matematiky, kterou mohou otevírat krychlové stavby, je kombinatorika. Jednoduše řečeno, kombinatorika se objevuje v úlohách s větším počtem řešení. Již v předchozí části o stejnosti staveb se objevují kombinatorické myšlenky. Když žák postaví do řady modrou, červenou a žlutou krychli, nebo naopak v obráceném pořadí, může říct, že takové stavby jsou i nejsou stejné (viz výše). Kombinatorika se objeví v situacích, kdy žák chápe takové stavby jako různé. Pak lze pokládat otázky typu: „Kolik různých vláčků ze tří různě barevných krychlí lze postavit?“ apod.

V úlohách, kdy žáci staví věže, většinou žáci takovou stejnost neřeší. K tomu jim pomáhá životní zkušenost s podlažími.

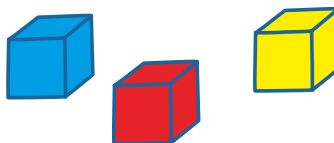
Úloha:

Kolik postavíš různých věží?

a)



b)



Komentář pro učitele:

To, co učitel může pozorovat v podobných úlohách, je způsob, jakým žák úlohy uchopí a řeší. Některý žák musí k vyřešení úlohy použít manipulaci s kostkami, některý si situaci kreslí nebo najde jiný způsob řešení. V pozdějším věku žáci „vylepšují“ své řešitelské strategie, učí se hledat v úlohách nějaký systém. Např. žák druhého stupně si může v úloze a) zapsat Č, Č, M a najde tři různé možnosti, jak tato písmena uspořádat (ČČM, ČMČ, MČČ).

Chceme sledovat:

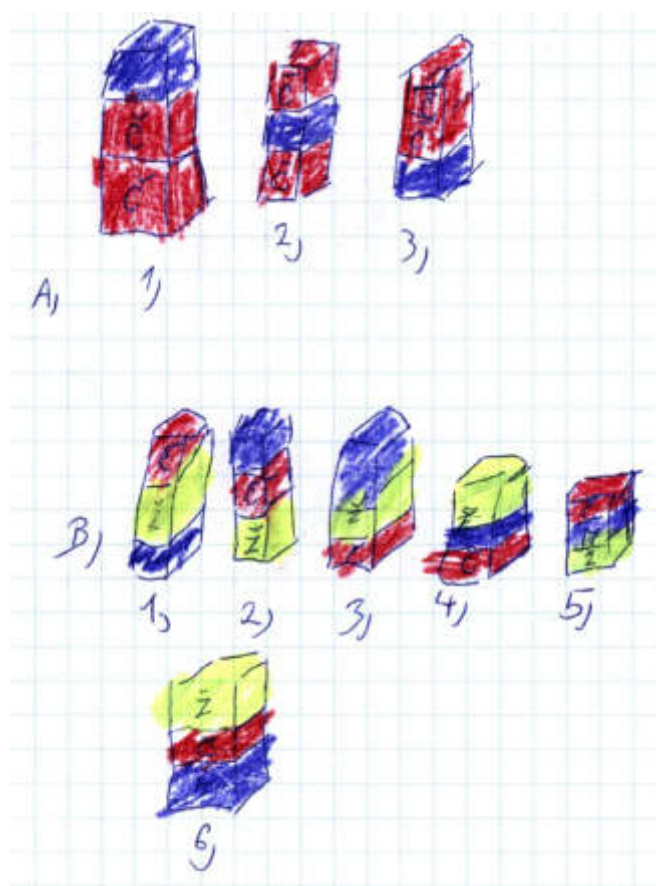
- záznamy, způsoby řešení žáků,
- systematickosti nalezených řešení.

Poznátky:

- S první úlohou většina žáků problém neměla. Objevovala se řešení, kdy věž byla postavená naležato jako vláček, žáci si to společně následně vykomunikovali.
- V jiné třídě došlo k zajímavému momentu, kdy žáci začali tvrdit, že věž spadla, a je tedy naležato, tudíž pro první úlohu existuje 6 řešení. Učitelka se ptala, zda jsou tedy pak stavby stejné, nebo různé. Na to jeden žák odpověděl, že pokud by se brala možnost počítat i spadlé věže, pak by existovaly pouze dvě různé stavby. Uvažoval totiž, že se se stavbami dá pohybovat. Pravděpodobně se tedy v rámci svého poznávacího procesu dostal od krychlových staveb ke krychlovým tělesům. Nakonec byly žáky počítány pouze stavby, které stály.
- U druhé úlohy mnoho žáků našlo více řešení, nejčastěji 4–6. Objevovaly se řešitelské strategie, kdy žáci zvolili určitý systém pro evidenci již vzniklých staveb. Jedna strategie byla v posouvání jedné vybrané krychle po podlažích postupně nahoru. Žáci ale také zmiňovali možnost, že v každé věži se objeví každá barevná krychle 2× dole, protože jsou vždy 2 možnosti, jak nakombinovat další dvě barvy nad ní. Jeden velmi nadaný žák objevil pravidlo pro kombinování barev. Dokázal říct, kolik možností vznikne pro věže ze 4 různých barev, ale i ze 100 barev.
- Zajímavé ukázky záznamů žáků uvádíme dále:



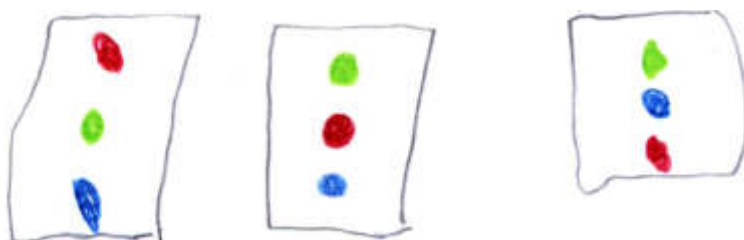
Žák zaznamenal 3 možnosti, jak postavit věž v řádku nahoře a jako čtvrtou možnost zvolil krychle poskládané jako „růžek“. To byl celkem častý jev. V tomto případě se jedná o pohled zepředu na krychlovou stavbu. Toto řešení je chybné, což se vyřešilo diskuzí ve třídě.



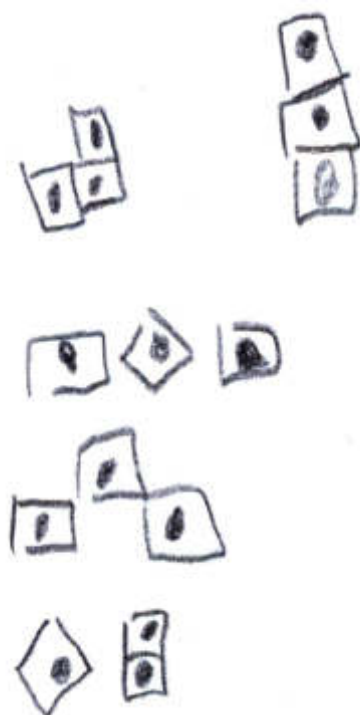
V tomto řešení je dobře viditelná systematizace (posun modré krychle) u první úlohy. Zjevná je rovněž potřeba zakreslovat řešení jako portréty. V úloze druhé není systematizace striktně dodržena, nicméně pro žáka jsou takto řešení přehledná.



V tomto řešení je zjevné zjednodušení evidence barev (pastelky nahrazují písmena). V řešení se objevují jiná písmena díky tomu, že tento žák pracoval s jinou barevností krychlí (modrá, žlutá, zelená). Systematičnost v tomto řešení je zjevná v zafixování první krychle (např. zelené) a následným vyměněním žluté a modré krychle. Stejnou strategii využil žák i u dalších řešení. Důvod, proč stejný postup nevyužil u poslední dvojice, neznáme. Pravděpodobně to bylo z nedostatku času.



Žák eviduje řešení plánem a barvy krychlí znázorňuje pomocí pastelek.



Tento žák ještě nemá upevněno, jak vypadá věž, ani nebere v úvahu barvy.

Následná diferenciac, reedukace:

- Náročnější úloha může být: „Kolik lze postavit různých věží ze dvou červených a dvou modrých krychlí?“ Učitel se opět zaměří na řešitelské strategie, které mohou být následující: Zaměříme se pouze na červené krychle. Ty jsou ve věži hned vedle sebe (3 možnosti) nebo ob jednu krychli (2 možnosti) nebo ob dvě krychle (1 možnost). Celkem je tedy 6 možností.
- Diskuze ve třídě podporují různé řešitelské strategie, společným sdílením se žáci učí podobné úlohy nějakým způsobem uchopit – manipulace, grafické zpracování, hledání sofistikovanějších strategií (viz výše uvedená). To může učitel sledovat a tím být připraven na zadávání dalších výzev žákům, aby se mohli rozvíjet i v této oblasti.

Kombinatorika se dá rozvíjet v různých kontextech i úlohách. To může být také dobrá diagnostika pro učitele. Uspěje žák při řešení úlohy v jednom kontextu a ve druhém ne? Proč? Jak mu pomoci, aby viděl souvislost takových úloh? Porovnejme tyto (izomorfní) úlohy:

Série úloh:

Kolik lze postavit různých věží ze dvou červených a dvou modrých krychlí?

Kolik zápasů se odehraje ve fotbalovém turnaji, kde hraje každý s každým a účastní se ho 4 družstva?

V rovině jsou dány 4 body, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce. Kolik různých úseček dokážeme sestrojit z těchto bodů?

Kolika způsoby lze přečíst jméno Lenka?

L	E	N
E	N	K
N	K	A

Komentář pro učitele:

Pokud vyřešíte výše uvedené čtyři úlohy, zjistíte, že všechny mají stejný výsledek, 6. Důležitější než výsledek je vědět, proč tomu tak je. Podobnost či stejnost úlohy 2 a 3 je zřejmá. U úlohy 1 již pravděpodobně není tak očividná a v úloze 4 je ještě více skrytá. Jde o myšlenku, že vlastně vytváříme dvojice ze 4 prvků. U úlohy 4 se tato myšlenka objeví, když úlohu převedeme na proces. K přečtení celého jména je vždy potřeba kombinovat $\rightarrow$ a $\downarrow$. Pokud v úloze s krychlemi zapíšeme jednotlivá řešení pomocí kombinování dvou červených (Č, Č) a dvou modrých krychlí (M, M), ukáže se stejnost s úlohou se jmény (ČČMM, MČČM, MMČČ, ČMČM, MČMČ, MČČM) a ($\rightarrow\rightarrow\downarrow\downarrow$, $\downarrow\rightarrow\rightarrow\downarrow$, $\downarrow\downarrow\rightarrow\rightarrow$, $\rightarrow\downarrow\rightarrow\downarrow$, $\downarrow\rightarrow\downarrow\rightarrow$, $\downarrow\rightarrow\rightarrow\downarrow$).

Učitel se snaží žákům tuto stejnost, kterou matematici nazývají izomorfismem, nabízet a rozvíjet je v úlohách, které žákům činí potíže.

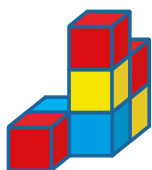
Reedukace může být realizována vrstevnickým učením, tedy vzájemnou pomocí spolužáků nebo zadáním snazší úlohy, která myšlenku otevře. U úlohy 4 to je např. již zmíněný převod do šipek („Zkuste pomocí šipek zapisovat vaše cesty.“), u úlohy 3 a 2 je vhodné situaci kreslit (např. 4 body) a postupně je spojovat. Manipulace s krychlemi nebo kreslení je dobrou strategií v úloze 1.

Čtenářská náročnost textu

V následujících úlohách se objevuje náročný prvek, čtenářská gramotnost. Pokud žák úlohu nevyřeší, nemusí to mít příčinu v oblasti matematiky, ale právě v oblasti porozumění textu nebo grafickému provedení úlohy. Pokud žák úlohu nerozumí, může mu pomoci situaci modelovat, položit nějakou jednodušší úlohu (zmírnit náročnost textu) nebo vhodnými otázkami žáka nasměrovat.

Úloha:

Postav stavbu a doplň tabulku.



				celkem
3. podlaží				
2. podlaží				
1. podlaží				
celkem				

Rozhodni, co je pravda.

A	Žlutých krychlí ve stavbě je stejný počet jako modrých.	ANO	NE
B	Ve druhém a třetím podlaží jsou dohromady čtyři krychle.	ANO	NE
C	V prvním podlaží jsou dvě krychle stejné barvy.	ANO	NE
D	Modrých a žlutých krychlí je dohromady stejně jako červených.	ANO	NE
E	Ve druhém podlaží je dvakrát tolik krychlí než ve třetím podlaží.	ANO	NE
F	V každém podlaží je jedna červená krychle.	ANO	NE

Poznátky:

- V tabulce žáci využívali evidenci čísla, ale také pomocí „fajfky“ (jejich počet znamenal počet krychlí dané barvy v daném podlaží), počet 0 žáci často neevidují (políčko v tabulce je prázdné, což může být komplikace pro učitele, protože nemůže rozlišit, zda žák počet nezvládl evidovat, nebo eviduje 0).
- Někteří žáci si v tabulce podtrhávali podstatné pojmy a informace (přenesli tuto strategii z jiných předmětů).
- U chybných řešení se občas propojuje chyba z tabulky s tvrzeními (když jsou na sobě závislá), týkalo se pouze několika málo žáků.
- Drobné chybování se objevilo ve sčítání daných krychlí ve sloupečku celkem. Pokud někdo určil špatný počet krychlí v podlaží, automaticky se mu zkrusil výsledek.
- Většina chybných řešení se týkala části s tvrzeními, problém byl s úrovní čtenářské gramotnosti žáků. Nejčastější chyba byla u tvrzení E, kdy žáci nerozuměli spojení „dvakrát tolik“.
- Pro některé žáky byla úloha náročná i co do počtu tvrzení (pomalu čtou, tudíž úlohu nedokončili).

Následná diferenciacie, reedukace:

- Je vhodné navést žáky k propojení tabulky a jednotlivých tvrzení, podporovat je v manipulaci s krychlemi.
- Pro žáky, které limitovalo množství tvrzení, tento počet snížíme.
- Další možností je vytvořit jednodušší stavbu (využít např. pouze 2 barvy, menší počet podlaží apod.).
- Pro lepší porozumění spojení „dvakrát tolik“ připravíme různé sémantické situace, které toto spojení využívají, a vedeme žáky k reálnému modelování (pomocí krychlí, fazolí, víček, pomohlo také změnit na kontext peněz).
- Opět se objevila situace, kdy někdo nerozuměl pojmu podlaží, jako podporu tomuto žákovi zakreslila jeho spolužačka do pracovního listu následující linie, což je mnohem efektivnější cesta než přímo prozrazovat, co slovo podlaží znamená.



- Pro žáky, kterým úloha nečinila potíže, můžeme zadat následující sérii jako inverzní úlohu k výše uvedenému:

Úloha:

Postav trojpodlažní stavbu ze 6 krychlí tak, aby

- a) v každém podlaží byl stejný počet krychlí,
- b) v prvním podlaží bylo o jednu krychli více než ve druhém podlaží,
- c) v prvním podlaží bylo dvakrát tolik krychlí, kolik ve druhém a třetím dohromady.

Do kategorie úloh zaměřených na čtenářskou náročnost textu patří i úlohy s podlažími.

Úloha:

Doplň.

- a) Pepa bydlí 3 podlaží nad námi a Honza 5 podlaží pod Pepou.
Já bydlím o podlaží výše/níže než Honza.
- b) Aurel bydlí podlaží pod námi. Marek bydlí 4 podlaží nad Aurelem. Já bydlím o podlaží výše/níže než Marek.

Komentář pro učitele:

V podobných úlohách je dobré vést žáky k tomu, aby situaci nějakým způsobem graficky zaznamenali. Např. si vytvoří vodorovnou číselnou osu a zapisují do ní postupně údaje. Cílem je situaci vizualizovat. V úloze a) někteří žáci tápou, protože není jasné, z jakého podlaží začít. Čísla jsou v úloze v roli operátorů, adresy chybí. To může být i rada učitele, když žáci neumí úlohu vyřešit: „Zkuste úlohu řešit, když víte, že mluvčí

v úloze bydlí např. na 4. podlaží. Jak by se situace změnila, kdyby bydlel na 5. podlaží?“ Žáci tak poznávají, že k vyřešení úlohy nezáleží na tom, na jakém podlaží mluvčí úlohy bydlí.

Podobné situace vznikají v úlohách s mincemi, v nichž není dán počáteční stav. Např. v úloze: Dědeček mi přidal do prasátka 5 Kč a babička 10 Kč. Kolik korun mi přibýlo do prasátka? Často se ve třídě ozve: „To nejde spočítat, nevím, kolik jsem měl v prasátku na začátku.“ To je pro učitele dobrá diagnostika a signál k tomu zařazovat více podobných výzev. Reedukace spočívá často v manipulaci s mincemi a směřování k výše uvedené myšlence, že v tomto případě na počátečním obnosu nezáleží.

Přesouvání krychlí (proces) a hledání příbuzných staveb

Dalším typem úloh jsou úlohy s přesouváním krychlí, které cílí na hledání příbuzných staveb. Opět se žáci nejspíše ve třídě rozdělí, někteří budou potřebovat manipulovat s krychlemi, někteří budou řešit bez nutnosti manipulace.

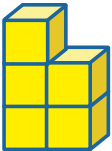
V úlohách se propojuje koncept (obrázek) s procesem (přesun krychlí). Žáci s dobrým konceptuálním vnímáním často manipulaci nebudou potřebovat. Vidí vstupní a výslednou situaci a bez manipulace určí, jaká krychle se kam přesune. Podobné situace se objevují i v dalších prostředích, např. ve výstavištích, v origami apod. Není potřeba žádné reedukace. Žák, který manipulaci potřebuje, ji používá. Když získá dostatek zkušeností, pravděpodobně ji v budoucnu již nebude potřebovat.

Úloha:



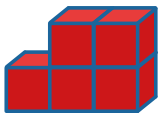
Najdi další takové dvojice staveb.

Pracujeme s galerií 8 krychlových staveb:

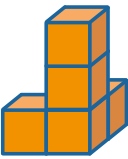
A

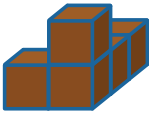
B

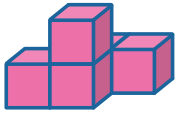
C

D

E

F

G

H

Komentář pro učitele:

Úkolem žáků je hledat takové dvojice staveb, jako je B a C – přesunutím právě jedné krychle lze získat z jedné stavby druhou a naopak. Pro takové dvojice staveb zavádíme pojem **příbuzné stavby**. Úloha je vhodná pro diferencovanou práci ve třídě. Některým žákům lze galerii staveb omezit nebo mohou najít jedno nebo dvě další řešení. Jiným žákům lze zadat výzvu, aby v celé galerii našli všechny dvojice příbuzných staveb. Řešení lze evidovat například tak, že příbuzné dvojice staveb žáci spojí čarou nebo znázorní nějakým jiným grafem. Důležité je, aby měli všichni žáci možnost použít v případě potřeby krychle. Ne všichni si dokážou přesun krychle představit a někteří potřebují krychli v modelu fyzicky přesunout.

Úlohy s přesouváním krychlí lze gradovat např. větším počtem přesunů.

3.–4. ročník

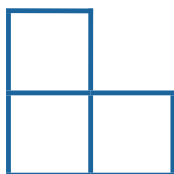
Průměty

Ve 3. ročníku se s žáky zavádí různé pohledy na krychlové stavby – **shora (půdorys, ten znají již z 1. ročníku), zepředu (nárys), z pravého boku (bokorys)**. Je to vedle plánu, portrétu nebo fyzického modelu z krychlí další jazyk, kterým lze popisovat krychlové stavby.

Tím se generuje další množství zajímavých úloh. Učitel opět může sledovat, zda žák používá k řešení úloh manipulaci s krychlemi, nebo ji již nepotřebuje. Úlohy se často spojují s prací s plánem stavby.

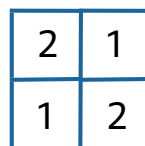
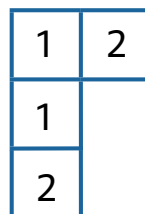
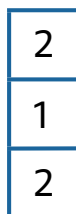
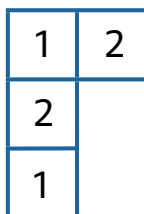
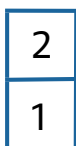
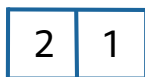
Úloha:

Z pěti krychlí postav stavbu tak, abys ji zepředu viděl(a) takto.
Do čtverečkované mříže narýsuj plán stavby. Najdi více řešení.



Úloha:

Vytvoř stavby podle plánu.
Kterou z nich vidíš zepředu jako obdélník 1×2 ?



Úloha:

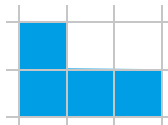
Z pěti krychlí vytvoř různé stavby, které vidíš
stejně zepředu a stejně zprava.

Komentář pro učitele:

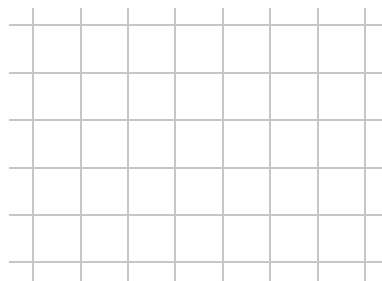
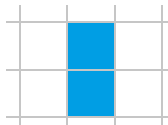
Budujeme porozumění, proč je pro popis krychlové stavby potřeba všech tří sdružených průmětů. Úlohy rovněž cílí na kombinatoriku. Podobná úloha s ukázkou žákovských řešení následuje dále.

Postav stavbu z 5 krychlí. Znáš její pohled zepředu.
Nakresli její plán. Hledej více řešení.

a)



b)



Komentář pro učitele:

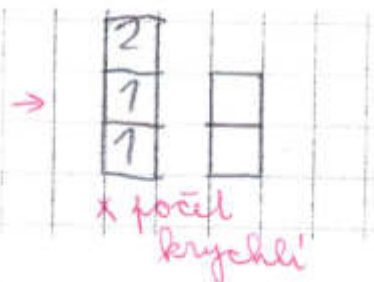
Žáci zjišťují, že u varianty a) je celkem 8 řešení. U varianty b) vidíme buď 5, nebo 10 řešení v závislosti na zafixovanosti stavby, my se kloníme k 10. Pokud umístí 3 krychle za, jsou 3 možnosti. Pokud umístí 3 krychle před, jsou 3 možnosti (nebo je lze považovat za přímo shodná řešení, která získáme otočením stavby – záleží, jak to má třída už v daný čas vydiskutované). Pak mohou dozadu umístit 2 krychle a dopředu 1 krychli, to jsou 2 řešení. Dále mohou umístit dozadu 1 krychli a dopředu 2 krychle, tudíž zase 2 řešení (nebo je považujeme za přímo shodná).

Poznátky:

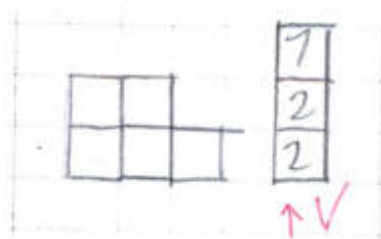
- Tuto úlohu jsme zadali stejným žákům opakovaně ve 3. i 4. ročníku (první realizace proběhla na distanční výuce ve 3. ročníku), ale žáci si setkání s touto úlohou nepamatovali. Někteří řešili zcela správně, jiní potřebovali dopomoc v podobě podtržení podmínek, manipulace s krychlemi, spolupráce s někým dalším.
- Někteří žáci si pravděpodobně špatně přečetli zadání (pohled zepředu v zadání chápali jako půdorys, možná příčina této chyby je ta, že na zadání na papíru se dívají shora a plán, který mají kreslit, je také zobrazení stavby shora).
- Někteří žáci zakreslovali stavby z trochu jiného pohledu, nerespektovali přitom orientaci papíru. Pomohl krok, kdy učitelka vyznačila šipky, aby věděla, kudy se na stavbu dívat.
- Ukázky řešení ze 4. ročníku:

Postav stavbu z 5 krychlí. Znáš její pohled zepředu. Nakresli její plán. Hledej více řešení.

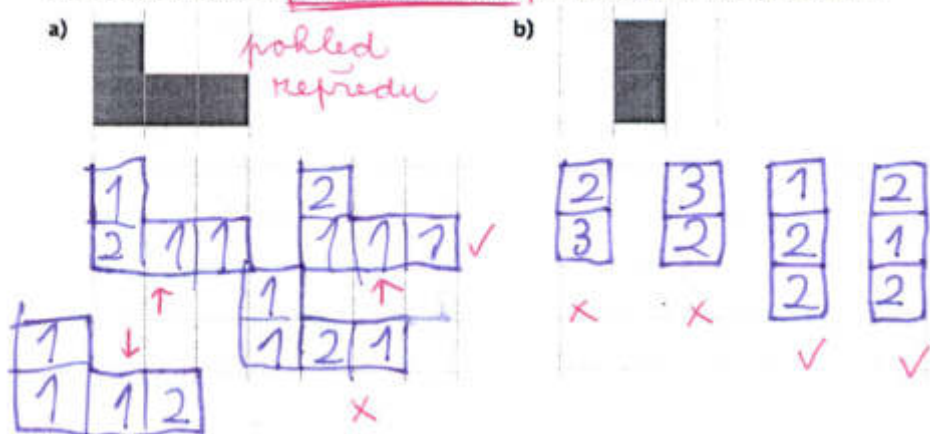
a)



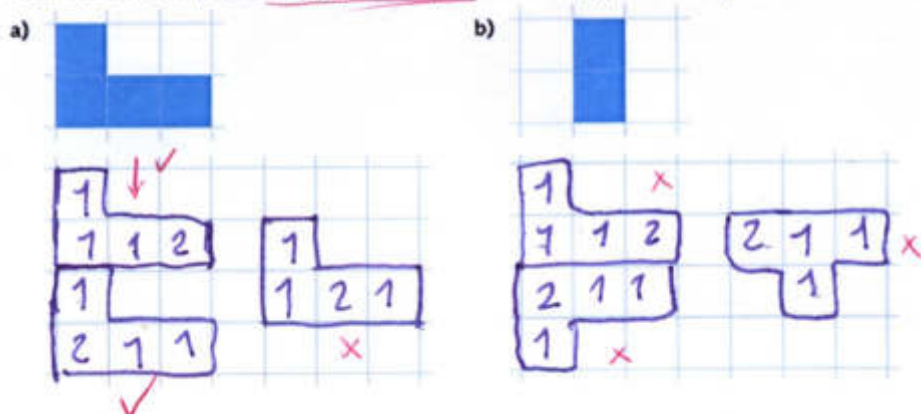
b)



Postav stavbu z 5 krychlí. Znáš její pohled zepředu. Nakresli její plán. Hledej více řešení.



Postav stavbu z 5 krychlí. Znáš její pohled zepředu. Nakresli její plán. Hledej více řešení.



Úloha:

Z pěti krychlí vytvoř stavbu, kterou vidíš stejně zepředu a stejně zprava.

Úloha:

Vytvoř dvě různé stavby, obě jsou složeny z 5 krychlí. Zepředu i shora vidíme obě stavby stejně, z boku jinak.

Úloha:

Postav krychlovou stavbu z 8 krychlí, která má ze všech pohledů stejný tvar (vidíme stejný geometrický útvar).

Komentář pro učitele:

Ne vždy nám tři pohledy určují právě jednu konkrétní stavbu.

Později (především na 2. stupni) žáci pracují i s tzv. **krychlovým tělesem**. To je de facto krychlová stavba s tím rozdílem, že jeho krychle mohou být „ve vzduchu“, tzn. např. v prvním podlaží jedné věže krychle není, ale ve druhém ano.

Pak lze zadat úlohu:

Úloha:

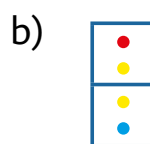
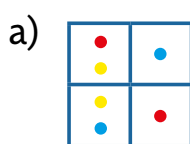
Postav krychlovou stavbu ze 7 krychlí, která má ze všech pohledů stejný tvar (vidíme stejný geometrický útvar).

Překlápění stavby

Ve 3. ročníku se objevují i úlohy s překlápěním staveb. To jsou úlohy s dobrým diagnostickým potenciálem.

Úloha:

Postav stavbu podle plánu, překlápěj ji na různé strany a zapisuj plán.



Komentář pro učitele:

Co znamená překlápění? Překlopit stavbu znamená, že nezměníme vzájemnou polohu všech krychlí vůči sobě. Pouze celou stavbu otočíme v prostoru tak, že podlahou bude jiná stěna. Jedná se tedy o otáčení o 90° kolem přímky, v níž leží některá dolní hrana stavby. Učitel může nejprve zadat, aby žáci překlopili (otočili o 90° kolem spodní hrany) přes hranu právě jednou a zapsali plán a sledovali, kam se transformují jednotlivé krychle původní stavby.

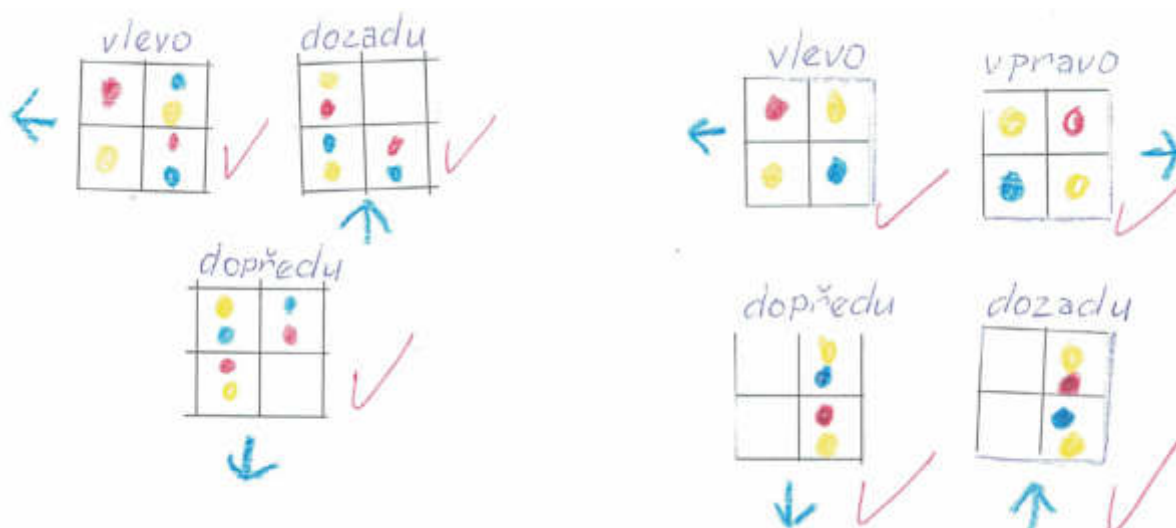
Ne každá stavba lze překlopit do všech stran (nevyjde krychlová stavba, ale krychlové těleso).

Chceme sledovat:

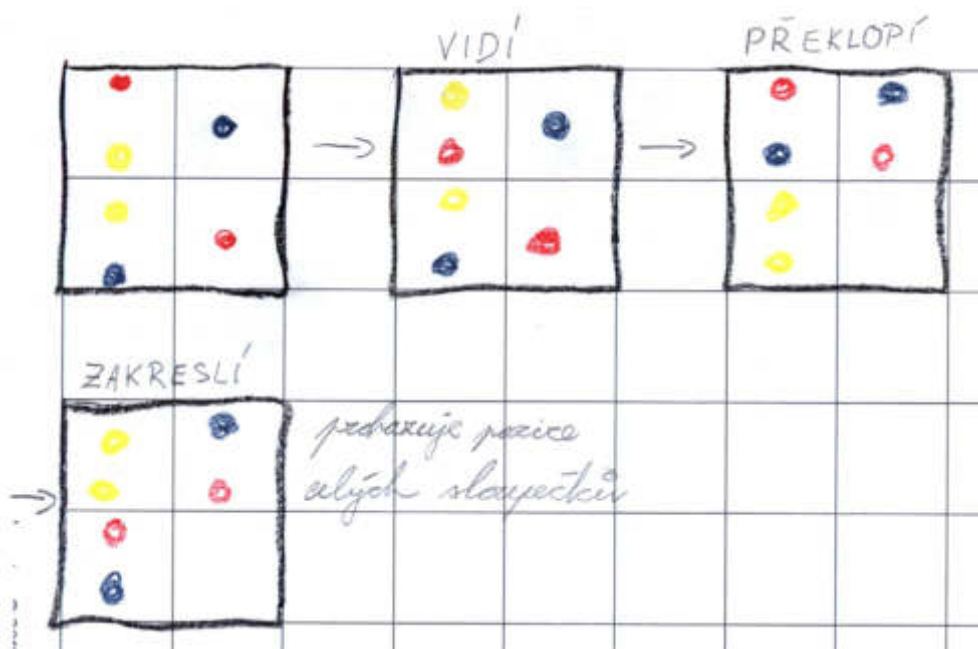
- jakým způsobem žáci úlohy řeší,
- zda se při řešení opírají o manipulaci,
- zda mají žáci potřebu hledat více řešení (tedy respektují výzvu v zadání překlápět na různé strany),
- zda mají žáci potřebu překlápět víckrát (i když to zadání neříká).

Poznatky:

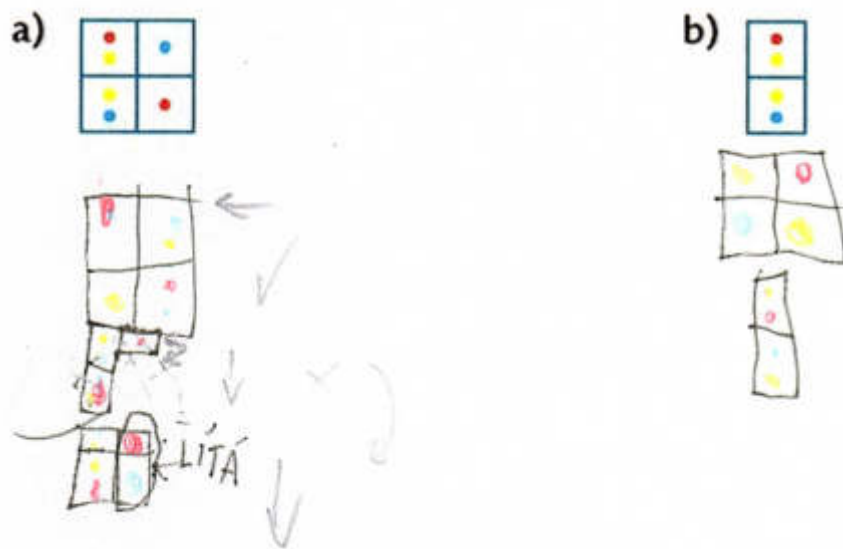
- Většina žáků si pro řešení brala krychle totožné barvy jako v zadání. Náskres vytvořili pastelkami, vyznačili tvar stavby a písmeny označili, na kterou stranu překlopili – vše se zdůvodněním přehlednosti.
- Někteří žáci hodnotili úlohu b) jako jednodušší.
- U několika žáků se objevilo místo překlápění otáčení. Pojem překlopit v geometrii neexistuje. Jedná se o otáčení o 90° kolem přímky, v níž leží některá dolní hrana stavby, viz výše.
- Objevilo se také naznačení směru překlopení pomocí šipky zaznamenané u plánu stavby, viz ukázka:



- Žáci s SPU často prohazují krychle v podlaží i ve sloupci, tyto zkušenosti dokladuje následující záznam s komentáři učitele:



- Někteří žáci místo plánu zakreslovali pohled zepředu.
- Objevilo se také spojování krychlí z různých čtverců do jednoho sloupce (např. v úloze b) byla častá chyba, že stavbu podle zadaného plánu vnímali žáci buď jako jednopodlažní, nebo čtyřpodlažní).
- Když žáci zaznamenávali plán na bílý papír, kde není jasná orientace papíru, může jeden plán znamenat různé stavby podle toho, jak ho natočíme (nevíme, kde je nahoře a kde dole).
- Někteří žáci chtěli vytvářet nové plány z nově vzniklého plánu, jiní se vraceli vždy k původní stavbě. Byla důležitá společná domluva, že budeme překlápět pouze jednou a vždy z původní stavby.
- Objevil se problém s rozpadající se stavbou při překlápění.
- V následujícím řešení žák zaznamenal, že krychle po překlopení „létá“ (visí ve vzduchu):



Následná diferenciacie, reedukace:

- Nejprve musí mít žáci zkušenost s procesem překlápění, teprve následně půjdeme překlápění zakreslovat. Obě aktivity je vhodné nejprve oddělit a věnovat čas diskuzi, zda je vůbec možné stavbu překlopit na všechny strany.
- K reedukaci můžeme využít také jednodušší úlohu (jedno překlopení z výchozí polohy) a správné zakreslení plánu. Zadání by mohlo vypadat například takto (překlopení doprava nemá řešení v krychlových stavbách, doporučujeme zařadit i tuto výzvu pro uvědomění):

Úloha:

Postav stavbu podle plánu, překlop ji na různé strany a zapiš nové plány.



Překlop doleva: Překlop dopředu: Překlop dozadu:

- Ukázka řešení z navržené reedukace, kde došlo k záměně překlopení dopředu a dozadu. Tento jev jsme zaznamenali i v jiných třídách. Dopředu znamená směrem k pozorovateli (nebo tomu, kdo manipuluje), lze formulovat i „překlop k sobě“.

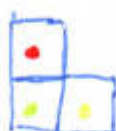
Postav stavbu podle plánu, překlop ji na různé strany a zapiš nové plány.



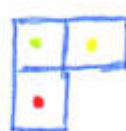
Překlop doleva:



Překlop dopředu:



Překlop dozadu:

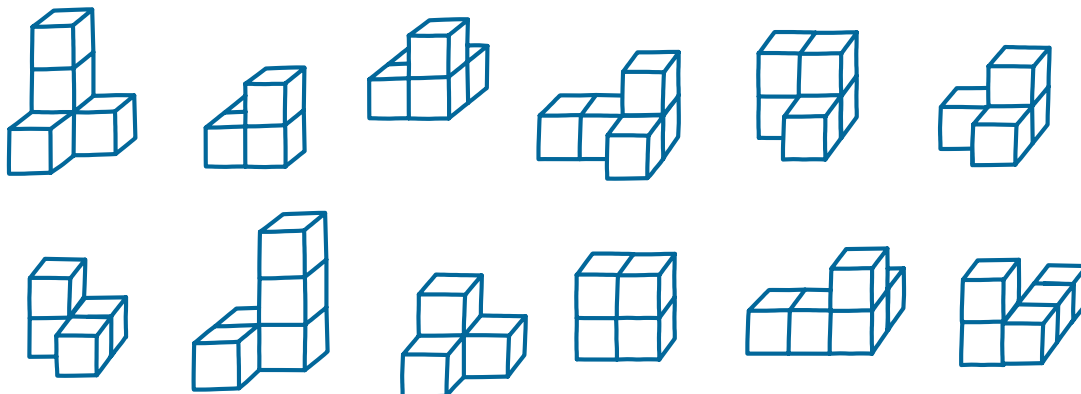


- Pokud mají žáci potíže se zápisem plánu, je vhodné rozfázovat celý proces na dílčí úkoly:
 - Postav stejnou stavbu podle skutečné předlohy (v jedné barvě).
 - Postav stejnou stavbu podle skutečné předlohy (v různých barvách).
 - Postav stavbu na čtvercové podložce. Pohledem shora spočítej čtverce, které vidíš, a daný tvar překresli do čtvercové sítě.
 - Postupuj stejným způsobem, tentokrát používej barevné tečky, které odpovídají barvám krychlí (které vidíš pohledem shora).
 - Stavbu zakresli barevnými tečkami do čtvercové sítě (stavba maximálně dvoupodlažní).
- Úlohu lze celkově zjednodušit také potlačením parametru barvy. Stavbu tedy připravte pouze z krychlí jedné barvy. Každopádně ale právě barvy umožňují sledovat transformaci částí celku.
- Při potížích s rozpadáním stavby můžeme žákům pomoci stažením stavby gumičkou, aby se jim snáze manipulovalo. Hrozí zde ale riziko, že stavba bude držet i v poloze, kdy to není stavba.
- Při potížích záměny plánu (půdorysu) za pohled zepředu (nárys) dáme žákům výzvu, aby stavbu obkreslili (vytvořili její pozemek).
- Při nejasnosti s pojmem „překlopit“ učitel modeluje, co to znamená, tím, že ho použije přímo v akci, kdy danou činnost dělá (např. překlopí krychli a řekne: „Překlopil jsem krychli směrem ke dveřím, směrem k sobě...“ apod.).
- Můžeme vyvolat u žáků potřebu ujasnit si orientaci papíru tím, že podle jednoho neorientovaného plánu postaví různé stavby, pojmenují, proč to tak bylo, a navrhnou řešení (např. označí horní kraj papíru nějakým symbolem nebo písmenem).
- Některým žákům pomohlo číslování podlaží u jednotlivých teček v plánu:



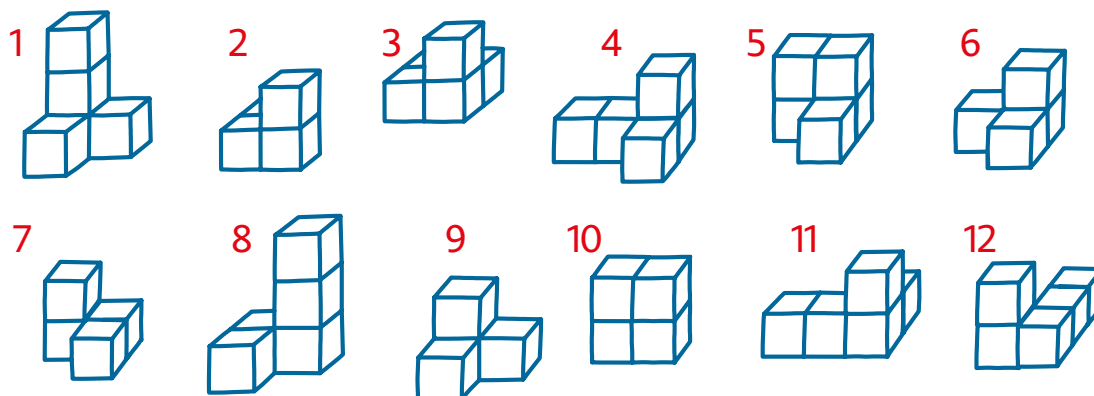
Úloha:

Vybarvi stejnou barvou takové dvojice staveb, že když jednu překlopíš některým směrem, dostaneš druhou.

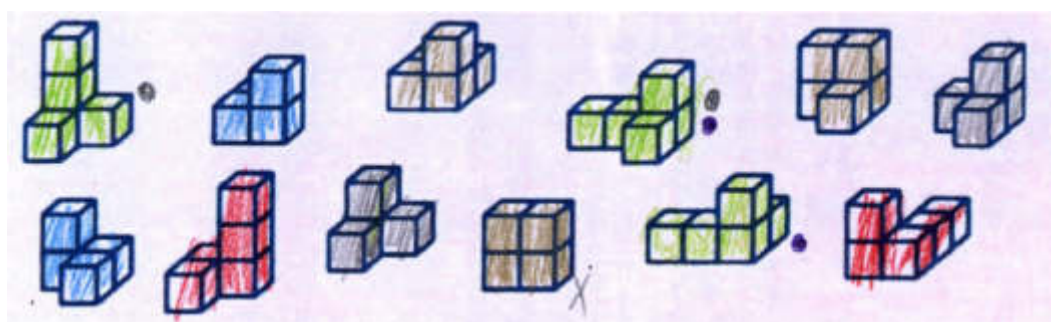


Poznátky:

- Někteří žáci řešili úlohu bez krychlí a úspěšně, jiní používali krychle až po vyřešení úlohy ke kontrole. Poměrně hodně žáků používalo krychle v průběhu řešení úlohy.
- Pro lepší porozumění vkládáme jednotlivé stavby očíslované:



- Někteří žáci rozlišovali u trojice složené z 1., 4. a předposlední stavby to, že první a předposlední se ještě musí otočit, např. takto:



Toto souvisí s vnímáním různosti staveb. Někteří žáci je vnímají jako stejné nezávisle na jejich poloze, ale pro některé jsou různé. Toto je důležité s žáky ve třídě vykomunikovat.

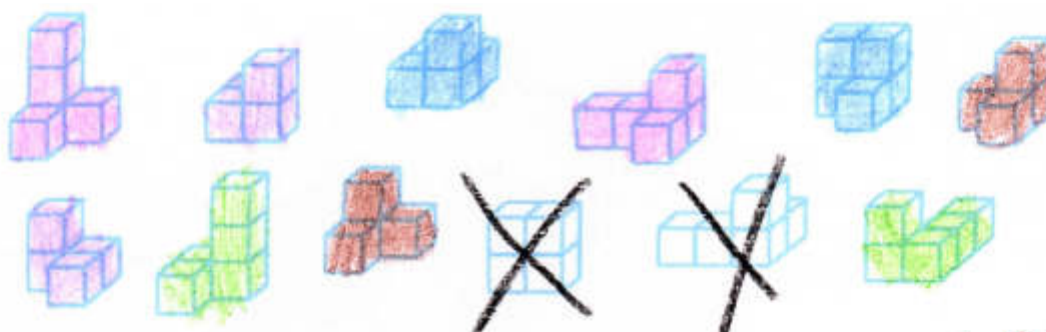
- Žáci vyloučili z řešení 10. stavbu, protože nebylo jasné, jestli ji lze přiřadit k dalším dvěma (nevíme, jestli je tam jedna další krychle, kterou nevidíme).
- Stávalo se, že žáci překloupili stavbu jedním směrem a výslednou stavbu nenašli v nabídce, učitel proto žáky vybídl, aby zkusili stavbu překloupit i na jinou stranu.
- Žáci někdy postavili stavbu podle obrázku, ale jinak otočenou (stávalo se to často u té první).
- Žáci často bez samotného překlopení odhadují řešení na základě vizuální podobnosti staveb, ne všichni tedy potřebovali s krychlemi manipulovat.
- Někteří žáci vytvářeli dvojice, někteří i trojice. Pro některé žáky byla trojice neakceptovatelná, proto stavby, které právě do trojic patřily, nechali nezařazené. Bylo to z důvodu systematickosti, tedy párovali stavby. Ve chvíli, kdy tam zbyly dvě, které k sobě nepasovaly, žáci řekli, že nemají řešení. Nenapadlo je hledat mezi spárovanými stavbami, protože ty už dvojici měly.
- Dále uvádíme poznatky vycházející z konkrétních diskuzí nad jednotlivými stavbami (žáci pracovali ve skupinách):

– Stavby 3, 5 a 10:

- Skupina L1 se jednohlasně shodla, že tyto tři stavby tvoří trojici.
- Ve skupině P1 proběhla diskuze o tom, že stavba 10 by k ostatním mohla patřit, ale nemůžeme to říct jistě. Záleží, jak vypadá z druhé strany (poradili si tak, že barevně označili jen její obrys).
- Skupina L2 diskutovala podobně, ale na základě formulace zadání se shodli, že označí pouze stavby 3 a 5 a stavbu 10 nechali zvlášť („mohla by to být i trojice ale nevíme to a v zadání“).

jsou dvojice“).

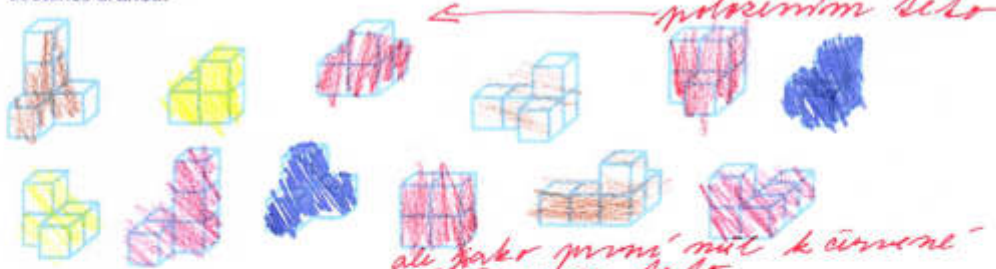
- Skupina P2 zjistila, že samostatná řešení mají všichni stejná, a shodli se na trojici. (Zazněl také argument „10 patří do trojice, protože žádný jiný čtverec tu není“.)
 - Stavby 1, 4 a 11:
 - Ve skupinách L1, P1 a L2 byla shoda, stavby přiřadili do trojice (zmínili, že v zadání jsou sice dvojice, ale shodli se, že našli trojici).
 - Ve skupině L2 opět vnímali, že mohou vytvořit trojici, ale rozhodli se označit jen stavby 1 a 4, protože podle zadání mají najít dvojice. Stavbu 11 nechali samotnou.
 - Dva žáci přišli s řešením, že k sobě patří pouze stavby 1, 4 a 4, 11. Stavby 1 a 11 dvojice nejsou, protože jedním překlopením nelze z jedné druhou vytvořit.
- I velmi slabí žáci byli při řešení úlohy poměrně úspěšní, zejména s podporou o manipulaci a reálné překlápění.
 - Ukázka řešení, kdy žák nezařaditelné stavby vyškrtává:



*Dělal dvojice - překlápal. Bylo dvě mu k sobě
něby k sobě.*

- Další ukázka řešení:

Vybarvi stejnou barvou takové dvojice staveb, že když jednu překlápíš některým směrem, dostaneš druhou.



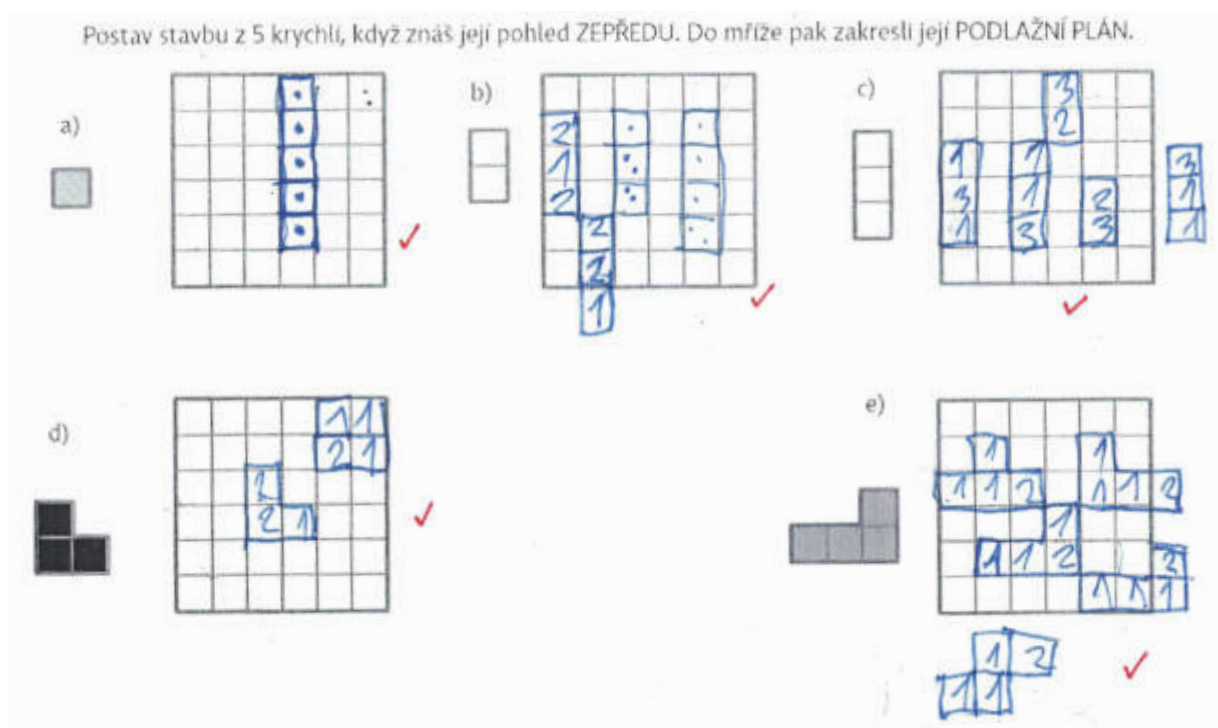
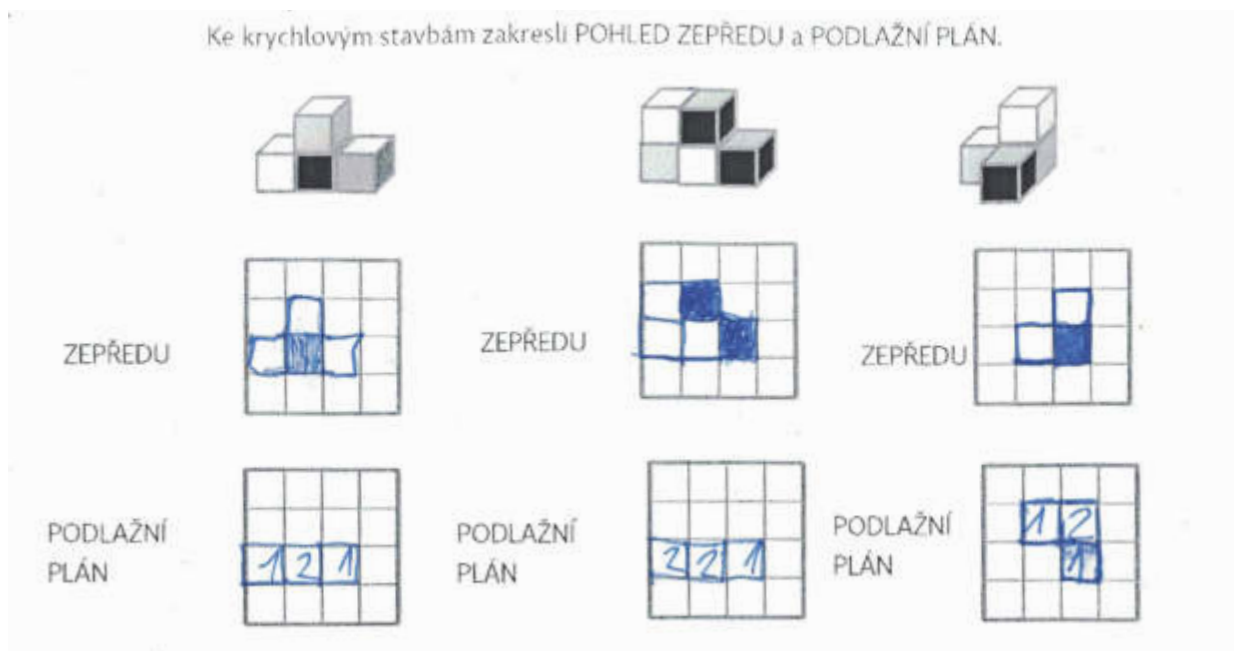
*ale jak jsem měl k číslu
přiradit šlo.*

*Řešil na rohládě počtu krychle, nepotřboval
slavě slavní. Na rohládě počtu podlaží a ho-
hů k sobě přiradil jsem trojici - pojmenoval,
že jedním stavu překlápěl a otočil.*

Následná diferenciacce, reedukace:

- Pokud měli žáci potíže s pojmem překlápět a místo toho stavbu otáčeli, je potřeba s nimi tento pojem znovu vyvodit, případně opravit. S žáky společně postavíme krychlovou stavbu, kterou budeme reálně překlápět na všechny strany. Cenná by zde byla také diskuze, zda jsou všechny překlápěné stavby skutečně krychlovými stavbami (zda nějaká krychle „nevisí“ ve vzduchu).

- Ukázka konkrétní reedukace:



- Někteří žáci ve čtvercové mříži při zakreslení plánu nevyznačovali obrys plánu, pouze tečky, což mělo za následek, že se později nevyznali v tom, co je která stavba.

Následná diferenciac, reedukace:

- Nejprve zadat úlohu, kde budou žáci kreslit pohled zepředu nějaké krychlové stavby.
- Vyvolat potřebu přesného zaznamenání krychlové stavby – žáci mají zakreslit stavbu plánem nebo třemi kolmými průměty a tento záznam poskytnout spolužákovi, který má za úkol postavit podle toho stavbu. Jsou obě stavby stejné? Proč ne? Byl plán nebo průměty srozumitelně zakreslené?
- Místo pohledu zepředu zadat pohled shora.
- Fungovalo také rozdělit žáky do skupin, ve kterých byl alespoň jeden žák, který úlohu vyřešil správně, a jeden, který měl s úlohou potíže (vrstevnické učení). Tato reedukace byla úspěšná.

- Pokud žáci na mřížovém podkladu nevyznačovali obrys stavby, nechte je zaznamenat stavbu na bílý papír. To je přiměřeno k celému záznamu plánu.
- Zkušenosti s podporou pro žáky s SPU s využitím aplikace Delmat:
 - Žákům s SPU pomohlo modelování KS v této aplikaci. Je pro ně lepší, že sami sedí a otáčejí se pouze stavba. Pokud mají fyzicky krychlovou stavbu před sebou a musí se otáčet sami, aby si pohledy prohlédli, jsou trochu zmatení a pletou se jim pohledy zepředu a ze strany (to by šlo ale vyřešit např. postavením figurky před stavbu, která se na ni dívá pohledem zepředu).
- Někteří žáci pomáhali, když si dali bradu na stůl a viděli tak stavbu přímo v úrovni očí, jiným pomohlo umístit stavbu na zem, takže byl dobře vidět pohled shora. Na ostatní pohledy si stavbu položili na židli, aby ji měli v úrovni očí a pak s ní otáčeli, aby viděli i pohledy ze stran. Při této aktivitě si žák všiml, že pohled zepředu a zezadu je stejný, jen otočený.
- Při potížích se zakreslením plánu pomohla diskuze o tom, že počet teček v plánu by měl být stejný jako počet krychlí ve stavbě. Někteří žáci pomohli, když se stavba stavěla přímo na mříž a následně tečkovali odpovídající počet v každém čtverci podle výšky komínu.

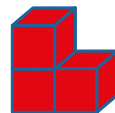
5. ročník

Objem, povrch, kostra

V 5. ročníku žáci počítají povrchy a objemy krychlových staveb. V počátku je vhodné pracovat s krychlemi s hranou 1 cm, aby se zakládaly dobré představy a žáci nemuseli převádět jednotky.

Úloha:

U krychlové stavby pojmenuj všechny vrcholy.
Urči počet vrcholů, stěn a hran.



Komentář pro učitele:

Stěna je náročný pojem, a to v tom, že matematické vymezení odporuje životní zkušenosti. V běžné situaci označujeme stěnou pouze svislé ohraničení pokoje, ale v matematice se používá stěna i pro stropy a podlahy. To může žákům činit potíže. Navíc si nemusí být jisti, zda jednou stěnou je jeden čtverec nebo sjednocení čtverců ve stejné rovině.

Dalším problémem pro žáky může být určení počtu vrcholů, když se jedná o nekonvexní útvar. Analogii vidíme v nekonvexních mnohoúhelnících, např. nekonvexní čtyřúhelník má 4 vrcholy (je nutné započít i ten, u něhož je vnitřní úhel mnohoúhelníku nekonvexní). Stejně tak budeme postupovat i u krychlové stavby, je nutné započít i ty vrcholy, u nichž je vnitřní úhel stavby nekonvexní).

Učitel může použít analogii mezi mnohoúhelníkem a mnohostěnem, kterým krychlová stavba je. Mnohoúhelník – vrcholy, strany (určujeme obvod, obsah). Mnohostěn – vrcholy, hrany (společné strany mnohoúhelníků sousedních stěn), stěny (určujeme kostru, povrch, objem).

Poznátky:

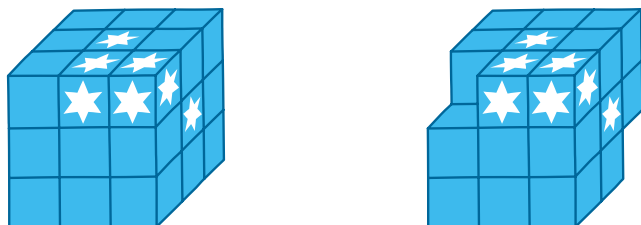
- Žáci znají pojmy vrchol/stěna/hrana, ale spíše intuitivně. Se stěnami a hranami se setkali v souvislosti s krychlemi a sítěmi krychle. Pojem vrchol znají spíše v souvislosti s rovinnými útvary.
- Stěny uvažovala většina žáků jako stěny stavby, tedy počet 8. Někteří počítali viditelné stěny krychlí, tedy čtverce, ale nezapočítali spodní stěnu („na té stavba stojí, není to stěna“), došli tedy k počtu 12.
- Na počtu vrcholů 10 se žáci shodli jednohlasně. Opakovaně potvrdili, že vrcholy, u kterých je vnitřní úhel některé stěny nekonvexní, nejsou vrcholy (v jazyce žáků „vnitřní“ vrcholy).
- U hran se objevily počty 17, 18 a méně, nikdo nezapočítal „vnitřní hranu“ (nebrali ji jako hranu, což je logické vzhledem ke skutečnosti, kdy nezapočítali „vnitřní“ vrcholy, tj. dva sousední vrcholy lomené čáry ohraničující mnohoúhelník stejné stěny), tímto přístupem by tedy výsledek měl být 17 (ztráceli se v průběhu počítání a některé hrany vynechali nebo započítali vícekrát). Zvrat přišel ve chvíli, kdy jeden žák ukázal „vnitřní hranu“ a řekl, že by se měla započítat. Na to ostatní reagovali poměrně bouřlivě, rozpoutala se diskuze. Při té se objevila potřeba definovat, co je hrana a co je vrchol. Výsledkem, který všichni odsouhlasili, bylo: hrana je tam, kde se spojují dvě stěny, a vrchol je tam, kde se spojují tři hrany. Na základě toho žáci rozhodli, že musí započítat i „vnitřní hranu“ a „vnitřní vrcholy“.
- Součástí zadání je pojmenovat všechny vrcholy. Vznikl problém s tím, jak označit vrchol, který není vidět.
- Všichni pracovali s krychlemi, stavbu si postavili a v průběhu celé diskuze se bavili o fyzickém modelu.
- Objevila se zajímavá strategie počítání hran, resp. vrcholů: spočítali hrany, resp. vrcholy, v přední stěně stavby a vynásobili počet dvěma („z druhé strany je to to samé“), u hran ještě přičetli hrany, které spojují přední a zadní stěnu.
- Zajímavý komentář několika žáků: „Přišlo nám divné, že nám vyšel počet hran 17, což je liché číslo, když každá krychle má 12 hran a to je sudé číslo.“

Později učitel může žáky vést i k objevení vzorců pro objem krychle a kváдру nebo jejich povrchů. Učitel samozřejmě nic neprozrazuje, pouze zadává „dobré úlohy“. Ideální cestou je jít přes izolované modely – např. u objemu krychle žáci určují počet jednotkových krychlí k vytvoření krychlí s hranou 1 cm, pak 2 cm (4 jednotkové krychle v každé vrstvě), 3 cm (9 jednotkových krychlí v jedné vrstvě) atd. Pokud žáci k tomu dostanou prostor, objeví požadovaný vztah sami. Řeknou např.: „Objem dostanu tak, že zjistím počet jednotkových krychlí ve spodní vrstvě (strana · strana) a pak číslo ještě vynásobím počtem vrstev (strana · strana · strana).“

V praxi se osvědčují různé aktivity k zjišťování povrchu těles. Jedna z takových je polepování stěn nějakými objekty – např. hvězdičkami. Žáci v počátku jednotlivé stěny polepují a počítají počet obrázků, které potřebovali. Postupně ale hledají rychlejší cesty – např.: „Podívám se na všechny stěny stavby a u každé počítám počet čtverečků.“ To ukazuje na dobré porozumění pojmu povrch jako součet obsahů všech stěn daného tělesa.

Úloha:

Elmar si vytvořil krychli $3 \times 3 \times 3$. Chtěl si vyzdobit její povrch tak, že nalepí hvězdičky na stěny malých krychliček. Zjistil ale, že má pouze 50 nálepek. Kolik nálepek mu chybí? Rozhodl se, že dvě krychličky odebere. Budou mu nálepky stačit?



Komentář pro učitele:

Úloha nabízí zajímavou myšlenku, že pokud odstraníme ze stavby dvě krychle (viz obrázek), objem se změní, ale povrch nikoli. Učitel se může ptát: „Platí to pro každé dvě krychle, které odebereme?“ Nebo: „Najdi ještě jednu dvojici takových krychlí, aby povrch zůstal stejný, ale objem se zmenšil.“

Pro propojení obou pojmů lze zadávat např. úlohy:

Úloha:

Najděte krychli, jejíž povrch i objem je stejné číslo.

Urči objem krychle, jehož jedna stěna má obsah 16 cm^2 .

Úloha:

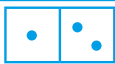
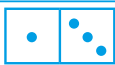
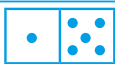
Stavba zadaná plánem  má objem 4 a povrch 18 (jednotky dle zvyklosti třídy). Najděte jinou krychlovou stavbu, která má:
a) stejný objem i stejný povrch,
b) stejný objem, ale jiný povrch.

Stejně jako u krychle lze postupovat u kváдру. Povrch i objem je vhodné řešit v úlohách, kde žáci řeší jednotlivé izolované modely (jednotlivé kvádry s danými rozměry) a pozorují, jak délky hran souvisí s oběma pojmy. Ve třídní diskuzi pak zazní i tzv. obecný (generický) model. Ten u objemu např. může znít: „To je stejné jako u krychle, vynásobím strana · strana · strana.“ U povrchu některý žák řekne: „Spočítám obsah jedné stěny a pak to vynásobím 6, protože krychle má 6 stěn.“

V následující úloze přichází další pojem 3D geometrie – tzv. **kostra** (součet délek hran).

Úloha:

Doplň tabulku.

krychlová stavba	objem	povrch	součet délek hran
			
			
			
			

Uvažuj, že krychle má hranu délky 1 cm.

Urči u každé krychlové stavby počet vrcholů, stěn a hran.

Komentář pro učitele:

Jedním z hlavních cílů těchto úloh je učit žáky evidovat vrcholy, hrany a stěny jednotlivých těles. Zde znovu na úrovni izolovaných modelů objevují vztah, který se na druhém stupni či na střední škole pojmenuje jako Eulerova věta: V konvexním mnohostěnu platí, že $v + s = h + 2$, kde v je počet vrcholů, s je počet stěn a h je počet hran.

To jsou dobré úlohy zejména pro motivované žáky. Evidují počty stěn, vrcholů a hran u známých těles, u krychlových staveb. Pokud je zapisují do tabulky, možná vztah objeví. Pokud ne, jsou to dobré zkušenosti, které zúročí v matematice na 2. stupni.

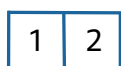
Úloha:

Zjisti objem, povrch i kostru hranolu o rozměrech (v centimetrech):

- a) $1 \times 1 \times 2$ b) $1 \times 1 \times 3$ c) $1 \times 1 \times 4$ d) $1 \times 1 \times 5$
e) $1 \times 1 \times 9$ f) $1 \times 1 \times 37$ g) $1 \times 1 \times v$.

Úloha:

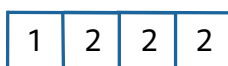
Krychlové stavby na plánech jsou vytvořeny z krychlí o objemu 1 cm^3 . Zjisti objem, povrch i kostru.



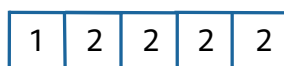
A



B



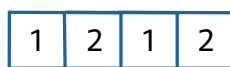
C



D



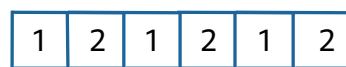
E



F



G



H

Komentář pro učitele:

Série úloh cílí na objem, povrch, kostru a zobecnění těchto pojmů.

Chceme sledovat:

- zda žák vidí souvislosti mezi jednotlivými případy (od izolovaných modelů ke generickému modelu).

Úloha:

Stavba je zadaná plánem  .
Urči její povrch, počet vrcholů, počet hran a počet stěn.

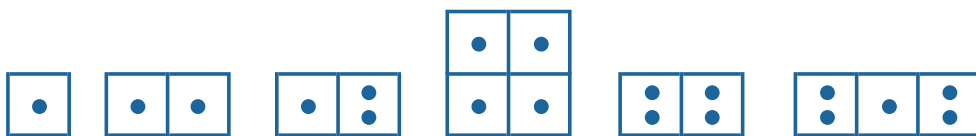
Komentář pro učitele:

Učitel může samozřejmě stavby měnit a pozorovat, které dělají žákům potíže. S žáky je nutno diskutovat, co se považuje za vrchol, hranu nebo stěnu. Pokud žáci postaví z jednotlivých krychlí např. výše uvedenou stavbu, někteří by mohli říct: „Spodní stěna má 8 hran.“ K tomu se dopočítají tak, že evidují hrany jednotlivých „jednotkových“ krychlí. Taková věc se musí ve třídě vyjasnit.

Pokud žáci takový problém mít nebudou, dá se očekávat, že lepší úspěšnost v evidenci počtu hran, vrcholů či stěn budou mít v pravidelných stavbách (krychle, kvádr). Na to lze zaměřit diagnostiku.

Úloha:

Urči povrch, počet vrcholů, počet hran a počet stěn u následujících těles.



Další náměty a úlohy:

Tajná stavba. Postav stavbu z 9 krychlí, která má alespoň dvě podlaží.
Nikdo ji nesmí vidět! Úkolem tvých spolužáků je postavit stejnou stavbu.
Pomůžeš jim? Ty smíš pouze mluvit, ostatní pouze stavět.
Dokážete to společně?

Komentář pro učitele:

Aktivita podnětná pro online výuku. Vysílač postaví stavbu a předává stavební pokyny třídě tak, aby žáci postavili shodnou stavbu. Je zde možná gradace v mnoha parametrech (počet krychlí, které má žák k dispozici, využití barvy, počet podlaží apod.).

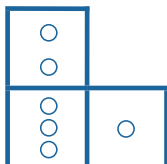
Chceme sledovat:

- v roli vysílače:
 - využití barev (jednobarevná stavba, více barev, rytmus v barvách),
 - prostorovost stavby (myšleno „složitost tvaru“ stavby, zda staví jen v jedné řadě, nebo i dopředu/dozadu),
 - jazyk – jaká slova používá (geometrické pojmy, prekoncepty), proces (slovesa „udělej“, „polož“, „postav“, ...) – koncept (slovesa „stojí“, „leží“, „je“, ...),
 - postup – nejdříve celou stavbu postaví a pak popisují (koncept) nebo popisují výstavbu, jak staví (proces).

- v roli přijímače:
 - postup (srozumitelnost a jednoznačnost popisu vysílače),
 - potřeba doptávat se (i přesto, že se doptávat dle pravidel nemůže).

Úloha:

Ze tří modrých, dvou žlutých a jedné zelené krychle je vytvořena tato stavba. Přitom každé dvě krychle stejné barvy mají společnou pouze jednu hranu. Zjisti, jakou barvu má která krychle.



Komentář pro učitele:

Kombinatorická úloha s podmínkami. Zajímají nás strategie, tedy jak žák řeší (manipulativně, nebo bez manipulace), zda řešení najde, za jak dlouho na úlohu rezignuje (pokud rezignuje), zda má potřebu hledat další řešení (je více řešení?). Učitel může úlohu rozložit na jednotlivé etapy:

- zadat bez podmínek, jen počet barev,
- postupně přidávat po jedné podmínce (vhodné pro reedukaci).

Chceme sledovat:

- zda žák manipuluje,
- zda žák eviduje řešení,
- zda žák na úlohu rezignuje a po jak dlouhé době.

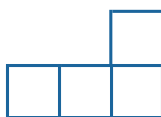
Úloha:



D

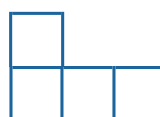


R

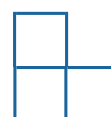


shora

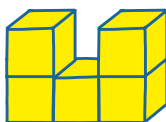
S



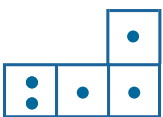
zepředu



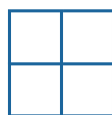
zprava



K

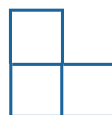


U

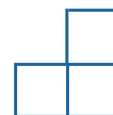


shora

D



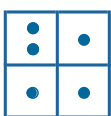
zepředu



zprava



H

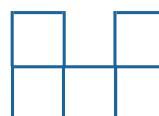


Ě



shora

M



zepředu



zprava

Komentář pro učitele:

Tyto úlohy lze řešit s žáky i jako spojovačky, např. připravit kartičky s několika stavbami ve třech různých jazycích (portrét, plán, průměty) a žáci následně hledají po třídě trojice.

Jazyky

Krychlové stavby lze popsat 7 různými jazyky:

1. fyzický model – postavená stavba, MŠ
2. slovní popis – polož modrou krychli, na ni dej... (procesuální);
nebo na modré krychli je... (konceptuální), MŠ
3. portrét – obrázek, MŠ
4. plán – viz 1. ročník
5. animace portréту – viz 1. ročník (používá se pro zavedení animace plánu)
6. animace plánu – viz 1. ročník
7. sdružené průměty – půdorys (1. ročník), nárys (3. ročník), bokorys (3. ročník)

Následující tabulka ukazuje, že většina jazyků má svou konceptuální i procesuální podobu:

konceptuální jazyky	procesuální jazyky
fyzický model	animace fyzického modelu
portrét	animace portréту
plán	animace plánu
konceptuální slovní popis	procesuální slovní popis ikonický zápis slovního popisu
tři kolmé průměty	

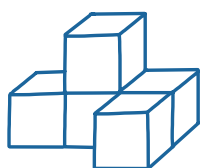
Fyzický model

Nelze znázornit v našem dokumentu, jedná se o stavbu, která je fyzicky postavená z krychlí. O fyzický model by se jednalo, pokud bychom například stavbu znázorněnou portrétem níže postavili z krychlí.

Animace fyzického modelu

Nelze znázornit v našem dokumentu, jedná se o zachycení procesu vzniku stavby, která je fyzicky postavená z krychlí. O animaci fyzického modelu by se jednalo, pokud bychom například animaci portréту níže znázornili krychlemi.

Portrét:



Animace portrétu:

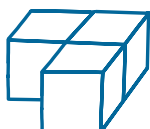
1.



2.



3.



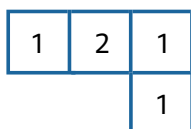
4.



5.



Plán:

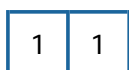


Animace plánu

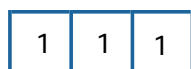
1.



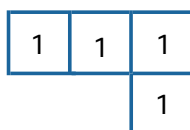
2.



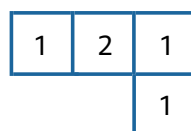
3.



4.



5.



Konceptuální slovní popis

Krychlovou stavbu tvoří 5 krychlí. Stavba je dvoupodlažní. V prvním podlaží jsou celkem čtyři krychle. Tři krychle jsou v jedné řadě a čtvrtá je postavená tak, že všechny čtyři krychle tvoří obrácené písmeno L. Poslední, pátá krychle se nachází ve druhém podlaží. Ze tří krychlí umístěných v řadě v prvním podlaží je tato pátá krychle umístěna na prostřední krychli.

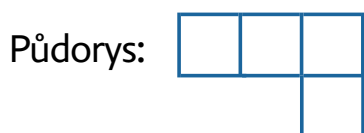
Procesuální slovní popis

Polož krychli. Jdi na sever. Polož krychli. Jdi na západ. Polož krychli. Jdi na západ. Polož krychli. Vystup o jedno podlaží nahoru. Jdi na východ. Polož krychli.

Ikonomický zápis slovního popisu



Tři kolmé průměty

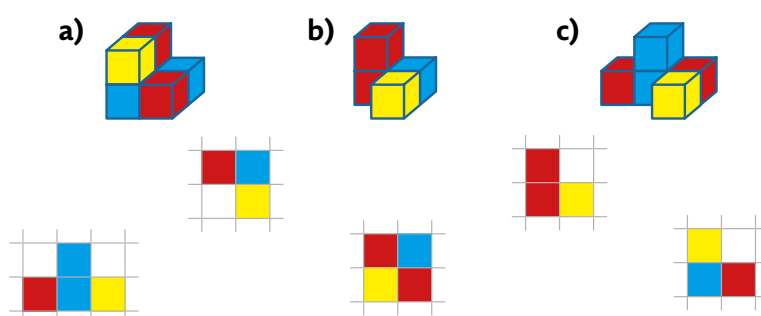
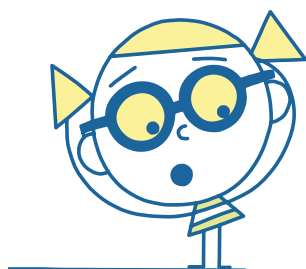


Chceme sledovat:

- zda žák potřebuje manipulaci s krychlemi,
- zda jsou některé jazyky, se kterými má žák potíže a které upřednostňuje.

Úloha:

Ariana si nakreslila ke každé stavbě pohled shora a pohled zepředu. Nákresey se jí však rozsypaly a jeden se ztratil. Pomoz Arianě přiřadit rozházené nákresey a doplnit chybějící.

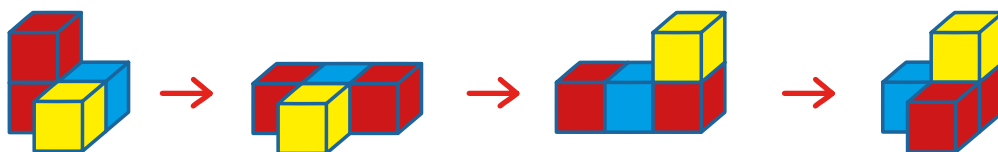


Různé způsoby záznamu krychlových staveb nazýváme **jazyky**. Umožňují nám tvořit různé úlohy. V následující úloze jsou portréty 4 staveb, jejich plány a pohledy zepředu. Učitel může zařazovat podobné úlohy typu: Přiřaď k sobě odpovídající portrét, plán a pohled. Podobné úlohy lze i sehrát v rámci třídy: Žáci dostanou nastříhané kartičky a mají najít spolužáky, ke kterým patří.

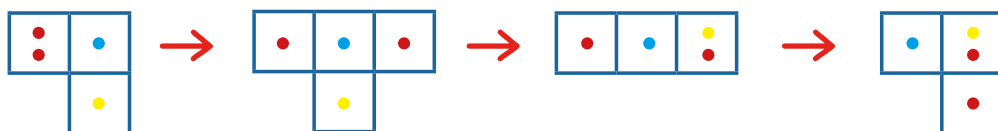
Úloha:

Ariana postavila stavbu ze čtyř krychlí a podle portrétů ji přestavovala. Elmar přitom kreslil plány a Kira pohledy zepředu.

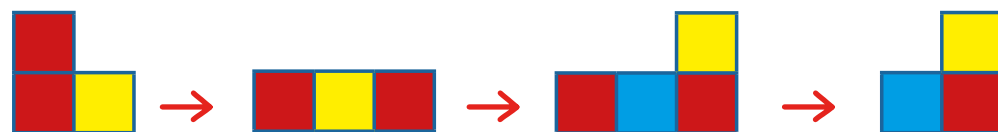
Ariana (portréty):



Elmar (plány):



Kira (pohled zepředu):



Úloha:

Zjistěte, na kterou stavbu myslí Kira, na kterou Ariana a na kterou Elmar.

Kira: Moje stavba má polovinu všech krychlí v prvním podlaží a v prvním podlaží má jen jednu modrou krychli.

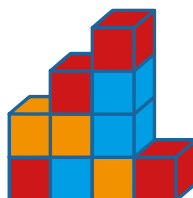
Ariana: Moje stavba má pětinu všech krychlí ve třetím podlaží a v prvním podlaží má více červených než modrých.

Elmar: Kdybych z mé stavby odebral jednu modrou krychli, byla by v ní oranžových krychlí třetina. Moje stavba ve čtvrtém podlaží nemá žádnou krychli.

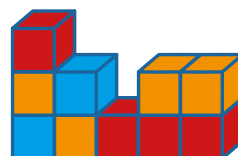
a)



b)



c)



Slovníček pojmů

stav – číslo v roli stavu představuje statický jev nebo skutečnost zachycenou v jednom konkrétním okamžiku. Tedy zjednodušeně řečeno stav říká, co je, jak je a kolik toho je. Stavby mohou být buď počtem, nebo veličinou. Veličinou nazýváme to, co měříme pomocí jisté jednotky (metr, litr, gram, hodina, Kč, hektar, 1°, km/hod, ...). Jednotkou pro počet je „jeden kus“.

operátor – operátor oproti stavu popisuje nějaký dynamický jev nebo skutečnost měnící se v čase. Tedy zjednodušeně řečeno operátor říká, co a jak se změnilo, a číselně tuto změnu vyjadřuje (kvantifikuje). Takový operátor nazýváme operátorem změny. Operátor může ale také porovnávat dva jevy nebo skutečnosti zachycené v jednom okamžiku. Tedy zjednodušeně řečeno operátor říká, co a jak se liší a o kolik. Takový operátor nazýváme operátorem porovnání. Operátor může být aditivní nebo multiplikativní. Aditivní se vztahuje k operacím sčítání a odčítání. Multiplikativní se vztahuje k operacím násobení a dělení. Multiplikativní operátor nazýváme skalárem.

frekvence – frekvence vypovídá o tom, jak často se jistý objekt, stav nebo proces v daném souboru vyskytne. Běžně se jedná o rytmus.

KVANTITA		ILUSTRACE		OTÁZKA
Stav (S)		Počet (PČ)	Mám 3 sestry. Čtyři světové strany. Rok má 12 měsíců. Ali Baba a 40 loupežníků.	Kolik?
		Veličina (V)	Kniha stojí 20 Kč. IObjem akvária je 70 litrů. Na pólu naměřili -64°C. Auto jelo stovkou. 5 kg masa.	
Operátor	Aditivní	Změny (OZa)	Vyhrál jsem 3 kuličky. Míč byl zlevněn o 20 Kč. Z nádrže odteklo 80 hl vody. Dluh vzrostl o 5%.	O kolik? Kolik?
		Porovnání (OPa)	Skočil o 3 cm dále. Lenka je o 7 kg lehčí než Mirek. Věkový rozdíl Dany a Jany je 5 let.	
	Multipli- kativní	Změny (OZm)	Kriminalita se zdvojnásobila. Vody trojnásobně ubylo. Třetina žáků onemocněla.	Kolikaná- sobně?
		Porovnání (OPm)	Anglie má 5násobek rozlohy SR. Po vysušení byla hmotnost hub pouze sedmina původní váhy.	
Frekvence (F)			Dopoledne metro jede každé 4 minuty. Každý desátý los vyhrává. Každý sedmý den je neděle.	Jak často? Jak hustě?

explicitní úloha – explicitní úlohou rozumíme takovou úlohu, kterou žák umí vyřešit nějakou konkrétní strategií nebo algoritmem. Žákův postup řešení je přímý. Pro daného žáka je tedy úloha explicitní. Nelze hovořit o tom, že nějaká úloha je obecně explicitní nebo implicitní. Jedna konkrétní úloha může být pro jednoho žáka explicitní a pro druhého implicitní. Jedná se tedy vždy o označení vztahované ke konkrétnímu žákovi.

implicitní úloha – implicitní úlohou rozumíme takovou úlohu, kde žák hned neví, jak má dojít k řešení. Často volí metodu opakování pokusů. Žákův postup je tedy nepřímý. Pro daného žáka je tedy úloha implicitní.

izomorfismus – izomorfismem v didaktice matematiky rozumíme stejnost nebo úzkou podobnost různých úloh nebo prostředí, kterou lze matematicky vyjádřit nějakým vztahem nebo rovnicí. Izomorfismus může žák využít například při práci v různých číselných oborech. Například úlohu v oboru desetinných čísel $0,1 + 0,2 + 0,3 = ?$ může žák řešit díky podobnosti s oborem čísel přirozených jako $1 + 2 + 3 = 6$ a ve výsledku jen posunout desetinnou čárku na 0,6. Takové úlohy nazýváme izomorfní. Jedná se tedy o úlohy, které můžeme překlomit z jednoho matematického prostředí do jiného, přičemž si zachovají své vlastnosti (jako například řešení).

aditivní triáda – trojice čísel spojená aditivní operací, kdy jedno z čísel je součtem dalších dvou ($a + b = c$). Vztahy těchto čísel lze vždy ekvivalentně vyjádřit i těmito následujícími vztahy: $a = c - b$, $b = c - a$. Triáda má tu vlastnost, že pokud známe dvě z čísel triády, poslední číslo je těmito dvěma určeno jednoznačně.

multiplikativní triáda – trojice čísel spojená multiplikativní operací, kdy jedno z čísel je součinem dalších dvou ($a \cdot b = c$). Vztahy těchto čísel lze vždy ekvivalentně vyjádřit i těmito následujícími vztahy: $a = c : b$, $b = c : a$. Triáda má tu vlastnost, že pokud známe dvě z čísel triády, poslední číslo je těmito dvěma určeno jednoznačně.

prekoncept – subjektivní a často nedokonalou představu žáka (ale i dospělého jedince) o nějakém konceptu nazýváme prekonceptem (český ekvivalent by mohl být „předkoncept“). Prekoncepty jsou velmi důležitým faktorem, který ovlivňuje proces učení. Vznikají přirozeným procesem, když poznáváme svět kolem nás a utváříme si o něm své vlastní představy. Tyto naše představy jsou v procesu učení konfrontovány s tím, jak je daný koncept vymezený v daném vědním oboru. Například častý žákovský prekoncept geometrického pojmu stěna je takový, že se jedná o svislou část roviny ohraničující nějakou místnost nebo budovu. Avšak v geometrii tímto stejným termínem označujeme jakýkoli mnohoúhelník, který omezuje objem (vnitřek) tělesa – tedy u krychlových staveb označuje termín stěna i ty vodorovné čtverce, které by žáci běžně nazvali stropem a podlahou. Prekoncepty mohou být tedy v procesu učení překážkou, ale zároveň jsou pevnou půdou, na které lze stavět další žákovo poznání.

Seznam použité literatury

HEJNÝ, M.: Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně. Praha: UK v Praze – PedF, 2014. ISBN 970-80-7290-776-2.

elektronické zdroje:

H-mat, o. p. s. [online]. Praha: ©2019 [cit. 10. 11. 2022]. Dostupné z: <http://www.h-mat.cz/principy>

Některé úlohy jsou čerpány z učebnic autorského týmu profesora Hejného vydaných společnostmi H-mat, o. p. s., některé byly úlohami z těchto učebnic inspirovány. Další úlohy vytvořil autorský kolektiv projektu.