



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



DIFERENCIACE VÝUKY:

rozvoj dovedností
pedagogické diagnostiky
ve výuce matematiky
opřený o systematické
využití gradovaných úloh
z prostředí Hejného metody
BATERIE GRADOVANÝCH ÚLOH



HEJNĚHO METODA

Zasloužená radost z poznávání



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



BATERIE GRADOVANÝCH ÚLOH

Autoři:

**Michaela Králová, Iva Kolandová, Renáta Zemanová,
Štěpán Ročák, Václav Strnad**

Kolektiv:

**Jana Bartoňová, Olga Lišková, Lucie Tomíčková,
Hana Chalupská a podpoření učitelé (nositelé inovace)**

Materiál vznikl jako výstup projektu Inovace ŠVP ve školních družinách a diferenciaci výuky matematiky na 1. stupni ZŠ s registračním číslem
CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_076/0016449

Realizátoři projektu:

H-mat, o. p. s.
Nová škola, o. p. s.

OBSAH

ÚVOD	7
SOUČTOVÉ TROJÚHELNÍKY	8
1. ročník	8
Homogenní a heterogenní objekty	8
Zápis, jazyk	10
Objekty x podobjekty	10
Počet objektů	11
Přechod přes desítku	12
Velikost čísel	13
Konfigurace objektů	13
„Stejnost úloh“ (komutativita)	15
Pozice neznámého pole	16
Velikost trojúhelníku	17
2. ročník	18
Pozice zadaného čísla	18
Explicitní a implicitní úlohy	19
Hledání více řešení	20
3.–5. ročník	20
Velikost hodnot	20
Vztahy mezi čísly	21
Číselný obor	25
Úlohy s podmínkou	26
Neposedové	29
4 zadaná čísla (pozice zadaného čísla)	30
HADI	31
1. ročník	31
Změna směru šipek	31
Přechod přes desítku	32
Pozice neznámého čísla	32
Složitost hadů	33
Řetězení operací (pozice neznámých čísel a směr šipek)	33
Velikost čísel	34

2. ročník	35
Hadi s podmínkou	35
Operace odčítání	36
Operace násobení	37
3. ročník	39
Operace dělení	39
Proces x koncept	40
Hadi s kouzlem	42
Hadi s podmínkou	45
4.–5. ročník	46
Otevření hadi	46
Přepis rovnice do hada	49
Neposedové	51
Rozšiřování číselných oborů (zlomky, desetinná čísla, záporná čísla)	54
MYSLÍM SI ČÍSLO	55
1. ročník	55
Předměty pod miskou	55
Pozice neznámého čísla	56
Zlomky v zadání úlohy	58
Způsob zadání úlohy (obrázek, slovně)	59
Zadání úlohy s negací	60
Kouzla	62
2. ročník	62
Předměty pod miskou	62
Myslím si číslo	63
Pozice neznámého operátoru/stavu	64
Formulace operátoru	65
Operace násobení	65
Číselný obor	66
Řetězení operací a jejich kombinace	66
3. ročník	67
Operace dělení	67
Formulace operace (proces X koncept)	67
Kouzla	68

4.–5. ročník	70
Myslím si číslo – přepis do rovnic a do jiných prostředí	70
Počet myšlených čísel	72
Kouzla	76
ZLOMKY	77
1. ročník	78
2. ročník	83
3. ročník	95
4. ročník	98
5. ročník	105
GEOBOARD	107
1.–2. ročník	107
Tvorba obrázku/obrazce	107
3.–5. ročník	108
Klasifikace útvarů	108
Obsah	113
Chirurgie obrazců	116
Obvod	119
Navazující aktivity	120
MŘÍŽ	124
1.–2. ročník	124
3.–5. ročník	127
Cestování v mříži	127
Rýsování mnohoúhelníků	128
Šipkový zápis mnohoúhelníků	129
Souřadnicový zápis	132
Konstrukce pravého úhlu	135
Střed úsečky, osa úsečky	137
Míra v mříži	140
Délka	140
Obsah	144
Vztah mezi obvodem a obsahem	151
Osová souměrnost	155
Další aplikační úlohy	158

KRYCHLOVÉ STAVBY	161
1. ročník	161
Práce s tabulkou	165
Neviditelné krychle	168
Plán	169
2. ročník	172
Slovo právě, přesnost jazyka	172
Přestavby	172
Podmínka	176
Kombinatorika	179
Čtenářská gramotnost	180
Přesouvání krychlí (proces)	181
3.–4. ročník	184
Průměty	184
Překlápění stavby	186
5. ročník	188
Povrch, objem	188
Další náměty a úlohy	191
Seznam použité literatury	193

Úvod

Milí čtenáři,

držíte v rukou metodické materiály projektu Inovace ŠVP ve školních družinách a diferenciaci výuky matematiky na 1. stupni ZŠ, které slouží jako podpůrný materiál k prohlubování matematických dovedností žáků na 1. stupni základní školy a zároveň k vašemu profesnímu rozvoji v oblasti pedagogické diagnostiky a následné diferenciaci výuky. Materiál zahrnuje 6 matematických prostředí typických pro Hejného metodu (Součtové trojúhelníky, Hadi, Myslím si číslo, Geoboard, Mříž, Krychlové stavby) a dále oblast Zlomky, které můžeme řadit jako průřezové prostředí/téma.

Každé prostředí zahrnuje obsáhlou část zaměřenou na představení gradačních parametrů a typologie úloh. Pro vaši jednodušší orientaci jsou vždy gradační parametry označeny barvou daného prostředí, typ úlohy je černou barvou.

Naším hlavním cílem bylo pomoci vám nabízet žákům takové úlohy, které jim pomohou překonávat potíže v daném prostředí, nebo je posouvat v dané oblasti kupředu. Tento dokument je tedy zamýšlen jako doplňkový materiál k metodice diferenciaci.

Věříme, že vám tato baterie gradovaných úloh poskytne podporu pro vaši efektivní výuku.

Vaši autoři

SOUČTOVÉ TROJÚHELNÍKY

Prostředí Součtové trojúhelníky patří mezi **strukturální** prostředí. To znamená, že toto prostředí nemá sémantickou oporu v životě (jako např. prostředí Autobus, Mince nebo Váhy).

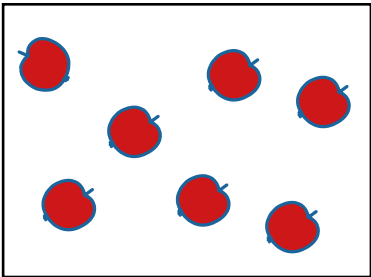
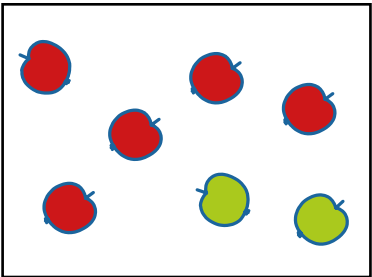
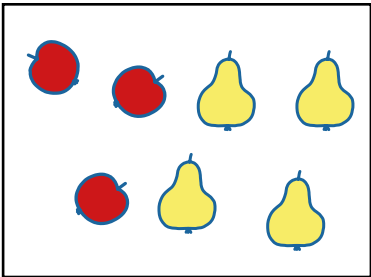
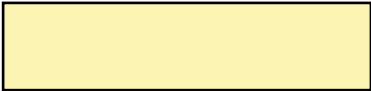
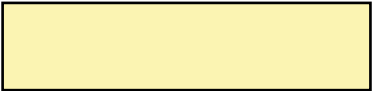
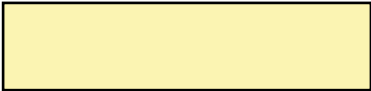
Jeho hlavním potenciálem je **mnohé počítání s přirozenými čísly (sčítání, odčítání, dopočítávání), později i práce s dalšími číselnými obory (záporná čísla, racionální čísla)**. Navíc se ve struktuře součtových trojúhelníků objevují zajímavé **vztahy a zákonitosti**, které žáci postupně řešením úloh objevují.

1. ročník

Homogenní a heterogenní objekty

V 1. ročníku se žáci učí sčítat a odčítat. Obojí se nejprve provádí v sémantickém jazyce (s objekty, které žáci znají z každodenního života). Následující série ukazuje možnosti gradace, přičemž první situace pracuje s homogenními objekty, druhá a třetí již se slabou heterogenitou (nejprve rozlišujeme dvě barvy jablek, následně rozlišujeme dva druhy ovoce).

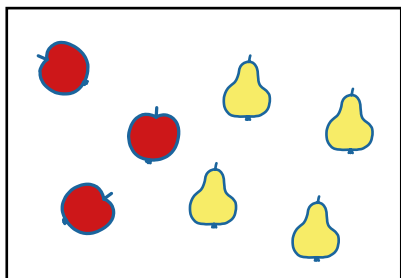
Úloha:

Zapiš počet.	Zapiš počet.	Zapiš počet.
		
		

Některý žák zapíše výsledný počet číslicí, jiný žák rozliší heterogenní objekty (např. jablka, hrušky) a zapíše dvě číslíce, jiný bude evidovat počet jablek a hrušek pomocí barevných nebo jednobarevných čárek. To ukazuje, že každý z žáků vnímá úlohu jinak, přičemž jeden sčítá již heterogenní objekty, druhý pouze homogenní (stejně). Obě řešení jsou správná, rozdílnost řešení je dána pouze různým vnímáním situace. Pro učitele je toto dobrá diagnostika, na jaké úrovni vnímání žáci jsou. Protože ani jedno z řešení není chybou, nemusí se přistoupit k žádné reedukaci. Postupně budou žáci sčítat i heterogenní objekty. Tomu lze pomoci např. takovou úlohou, kde žáci nejprve zvlášť evidují jablka a hrušky, poté je sčítají dohromady, čemuž napomáhá **písmeno D** (učitel s žáky vykomunikuje, že to znamená dohromady).

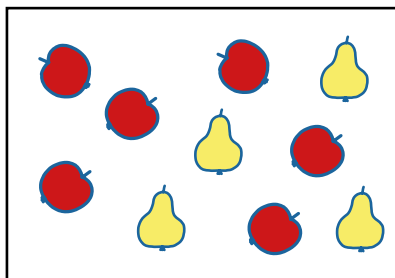
Úloha:

Zapiš počet.



			
D			

Zapiš počet.

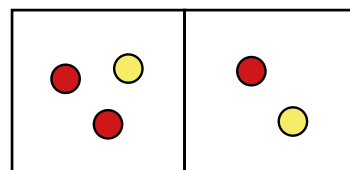
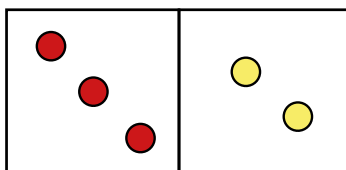
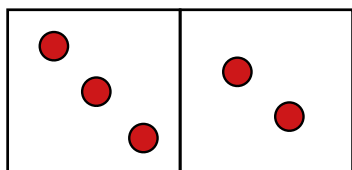
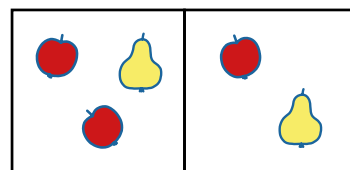
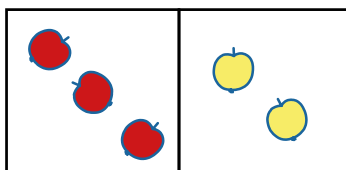
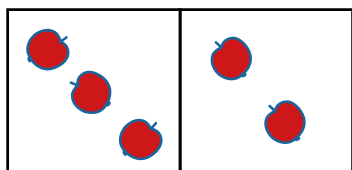


			
D			

Pro upřesnění doplňujeme, že žáci sčítají pouze slabě heterogenní objekty, tzn. že žáci sčítají objekty, které mají společné nadřazené pojmenování – např. jablka a hrušky – ovoce. Silně heterogenní objekty (např. slon a jablko) nesčítají, protože k tomu obvykle nedochází ani v běžném životě. Obtížnější může být pro žáky i promíchání objektů. Zde na rozdíl od první úlohy nejsou objekty ve druhé úloze „u sebe“.

Náročnější situace může nastat, pokud jsou **objekty již umístěny do struktury**. První série pracuje se sémantickými objekty, druhá se již posouvá k jinému jazyku (tečky), pomalu tedy směřujeme k abstrakci, kterou bude později reprezentovat použití čísel.

Úloha:



Opět se může stát, že jeden žák napíše všude 5 (ať číslem, čárkami, nebo jiným způsobem). Jiný žák bude ve druhém a třetím trojúhelníku zvlášť evidovat červená a žlutá jablka (tečky).

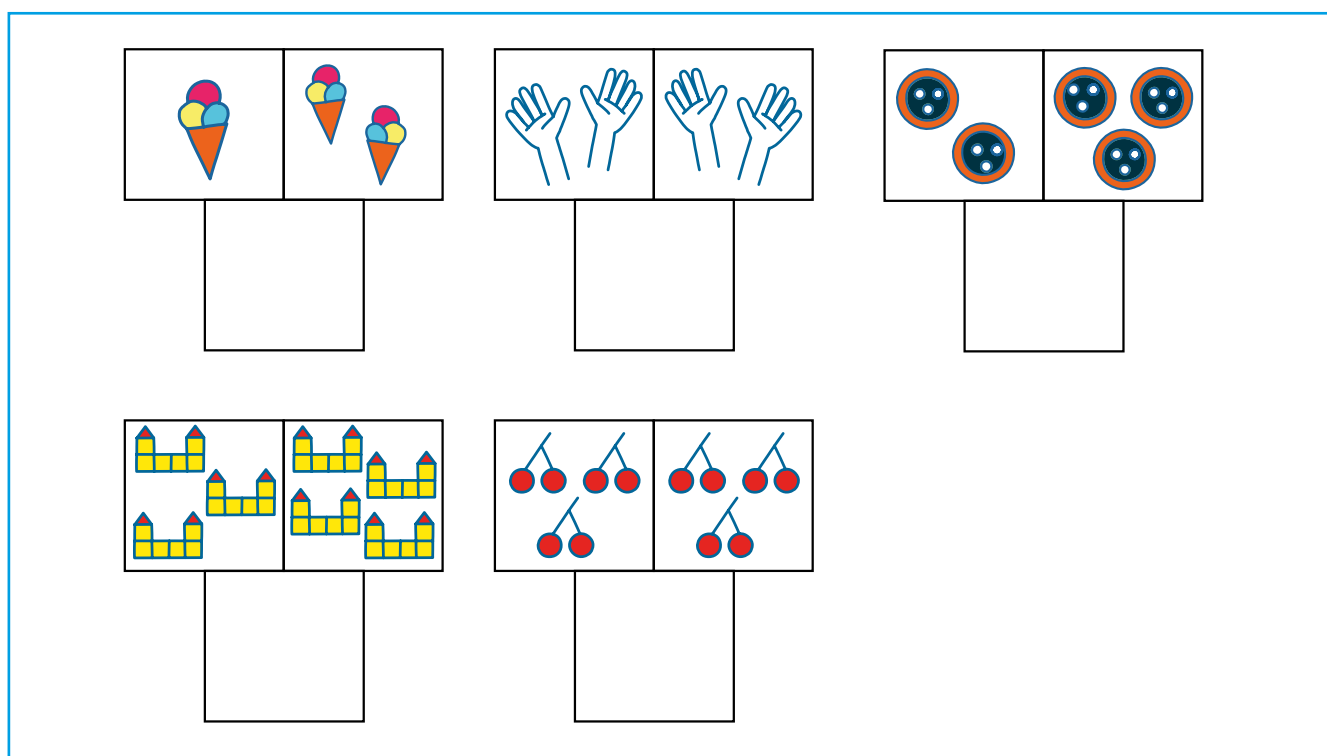
Zápis, jazyk

V 1. ročníku žáci používají různé jazyky k evidenci počtu. Kreslí sémantické objekty (jablka, koláče), používají reprezentanty počtu (čárky, tečky), později začnou psát čísla. Stává se, že někteří žáci začínají používat čísla okamžitě, již je znají z mateřské školy nebo z domova. Není záměrem učitele jim používání čísel zakazovat, důležité je myslet na žakovu autonomii myšlení. Učitel pouze ověřuje, zda žák používaným symbolům rozumí.

Objekty x podobjekty

Stejně jako u sčítání homogenních či heterogenních objektů dochází k podobným situacím při vnímání objektů a jejich podobjektů. Např. v součtovém trojúhelníku na obrázku jsou nakresleny v levém poli dva koláče (každý má tři mandle), v pravém poli tři koláče (všechny mají také tři mandle). Většinou se objeví žák, který napíše do spodního pole 15 (15 mandlí). Takový žák si všímá podobjektů. Pro učitele to je signál, že takový žák potřebuje náročnější úlohy, chce pracovat s většími čísly. Pokud žák eviduje „pouze“ koláče, není to chyba.

Úloha:

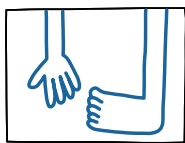


Je zajímavé, že žáci v některých úlohách podobjekty evidují, v jiných ne. To může být dobrý předmět k diskuzi. Zde uvádíme několik případů, kde je možné podobjekty evidovat.

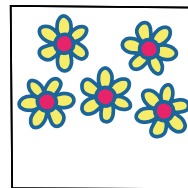
Úloha:

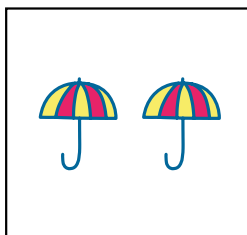
Zapiš počet.

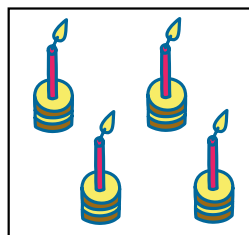


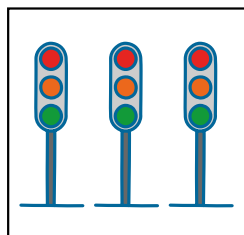


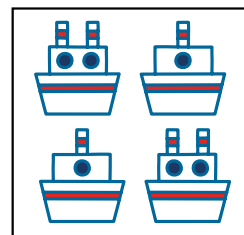




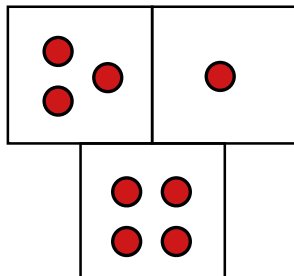








V začátcích žáci řeší úlohy, kde se objevují „malé“ součtové trojúhelníky složené ze tří oken. Je to proto, aby si žáci dobře fixovali základní dohodu tohoto prostředí: „Když sečteme počet objektů dvou sousedních polí, stejný počet (jejich součet) dostaneme v poli pod nimi – viz obr.“

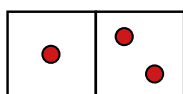


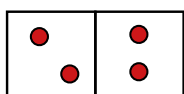
Stejně jako v ostatních prostředích se úlohy postupně stávají obtížnější. Gradace úloh probíhá prostřednictvím gradačních parametrů, které si postupně pojmenujeme.

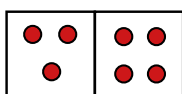
Počet objektů

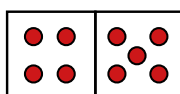
Zvyšováním počtu objektů se samozřejmě úlohy mohou stát obtížnějšími. S tím souvisí i další gradační parametr „Přechod přes desítku“. Zde oba tyto parametry dáme do jedné série úloh.

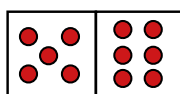
Úloha:

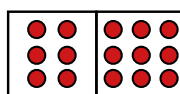












Nyní ještě pečlivěji popíšeme práci s přechodem přes desítku.

Přechod přes desítku

V 1. ročníku žáci sčítají malá čísla. Nejdříve v sémantickém jazyce, poté s čísly. Gradačním skokem bývá přechod přes desítku. Zde je důležité, že si žáci hledají vlastní strategie nebo je odkoukávají od spolužáků. Učitel může využít právě prostředí Součtových trojúhelníků pro řešení úloh s přechodem přes desítku. Žáci často v případě potíží používají manipulaci s objekty (víčka, kaštiny, ...).

Úloha:

The worksheet contains the following addition problems:

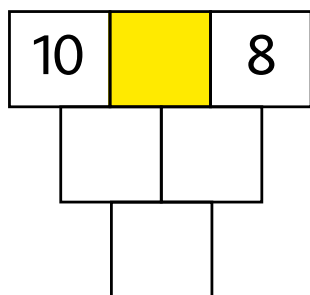
- Row 1: $3 + 3 = \square$ (blue dots), $4 + 4 = \square$ (blue dots), $6 + 4 = \square$ (blue dots)
- Row 2: $4 + 3 = \square$ (red dots), $4 + 4 = \square$ (red dots), $6 + 4 = \square$ (red dots)
- Row 3: $4 + 4 = \square$ (red dots), $6 + 4 = \square$ (red dots)
- Row 4: $6 + 5 = \square$ (numbers), $7 + 4 = \square$ (numbers), $8 + 3 = \square$ (numbers)
- Row 5: $9 + 2 = \square$ (numbers), $10 + 3 = \square$ (numbers)

Velikost čísel

Dalším gradačním parametrem úloh je velikost čísel. Tento parametr je vlastně stejný jako zmíněný počet objektů, ale mluvíme o něm v momentě, kdy žáci začnou používat čísla. S většími čísly logicky stoupá i náročnost úloh. Zároveň jsou ale žáci, kteří takové výzvy vyhledávají. Jsou fascinováni velkými čísly a chtějí s nimi počítat. Učitel si může provést diagnostiku potřeby používat větší čísla např. následující úlohou.

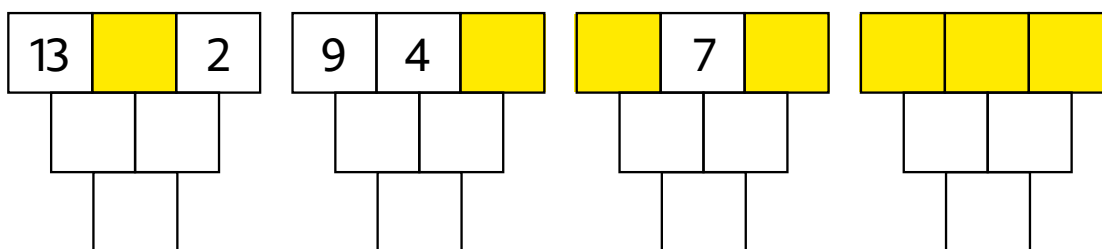
Úloha:

Do žlutého pole vlož číslo a vyřeš součtový trojúhelník.



Úloha:

Do žlutých polí vlož číslo(a) a vyřeš součtový trojúhelník.

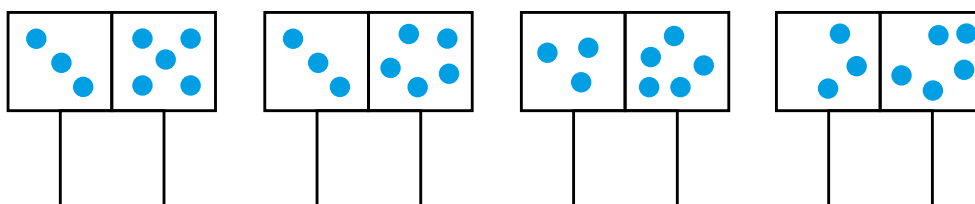


Najdou se žáci, kteří vloží do žlutého pole 1 nebo jiné malé číslo. Najdou se ale i žáci, kteří vloží 10, 100 nebo i větší čísla. To ukazuje na jejich potřebu s takovými čísly pracovat. Učitel by jim pak takové výzvy měl umožnit.

Konfigurace objektů

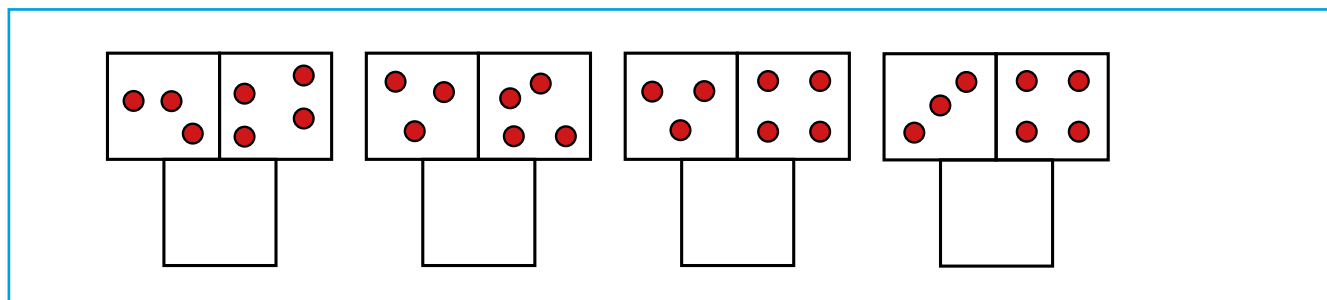
Učitel se může v těchto úlohách zaměřit ještě na jednu věc – na konfigurace objektů. Dá se očekávat, že žáci mohou být úspěšnější v řešení úloh se známými konfiguracemi.

Úloha:



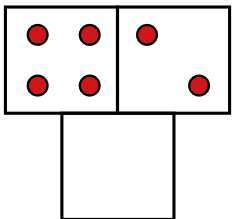
Ve všech čtyřech úlohách je shodný počet objektů, ale v každé z úloh jsou tečky v jiné konfiguraci. V první úloze jsou konfigurace, které žáci znají z hrací kostky. Ve druhé je jedna konfigurace z hrací kostky, druhá je náhodně vytvořena (není z hrací kostky). Ve třetí a čtvrté jsou obě konfigurace „nekostkové“. Žáci, kteří hrají např. hry s kostkami, by takové konfigurace měli důvěrně znát a měli by s nimi umět i dobře počítat. Učitel nabízí žákům úlohy s různými konfiguracemi a sleduje, zda řešení úloh se známými konfiguracemi přináší větší úspěšnost řešení. Takovou situaci nabízí další série čtyř úloh. Je zajímavé sledovat, zda při řešení poslední úlohy budou žáci nejúspěšnější.

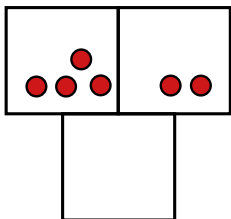
Úloha:

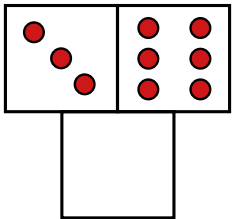


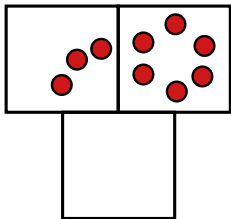
Další úlohy, které porovnávají „kostkové“ a „nekostkové“ konfigurace jsou zde.

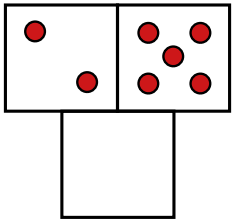
Úloha:

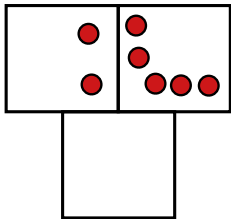
1. 

2. 

3. 

4. 

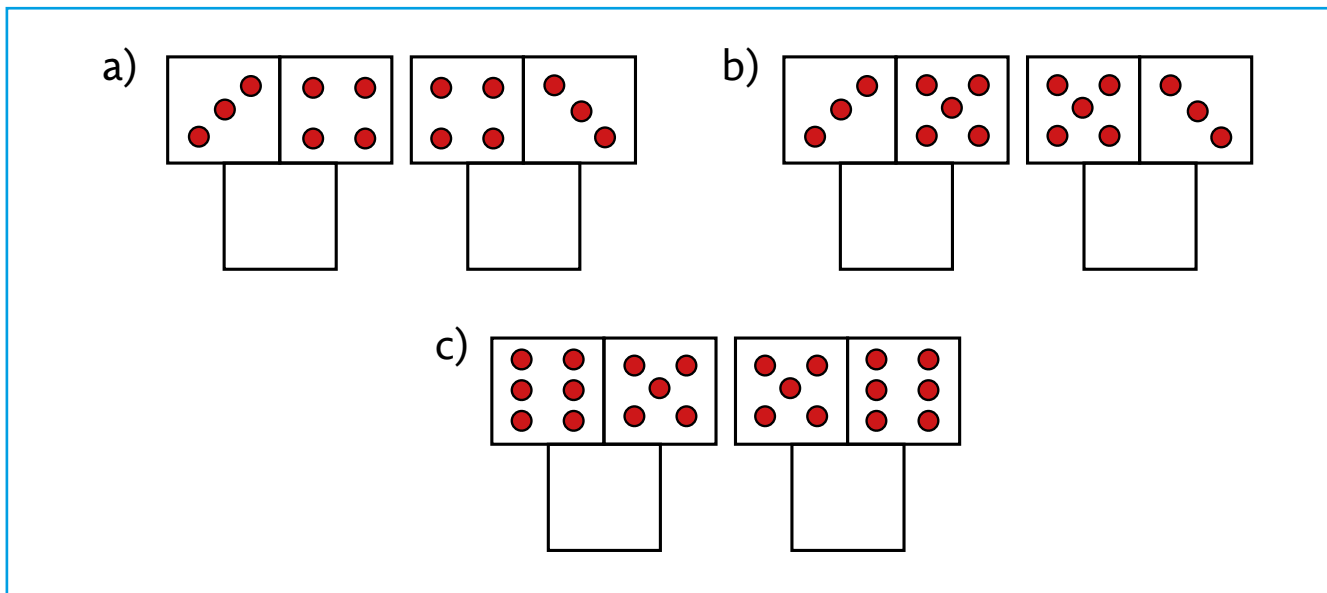
5. 

6. 

„Stejnost úloh“ (komutativita)

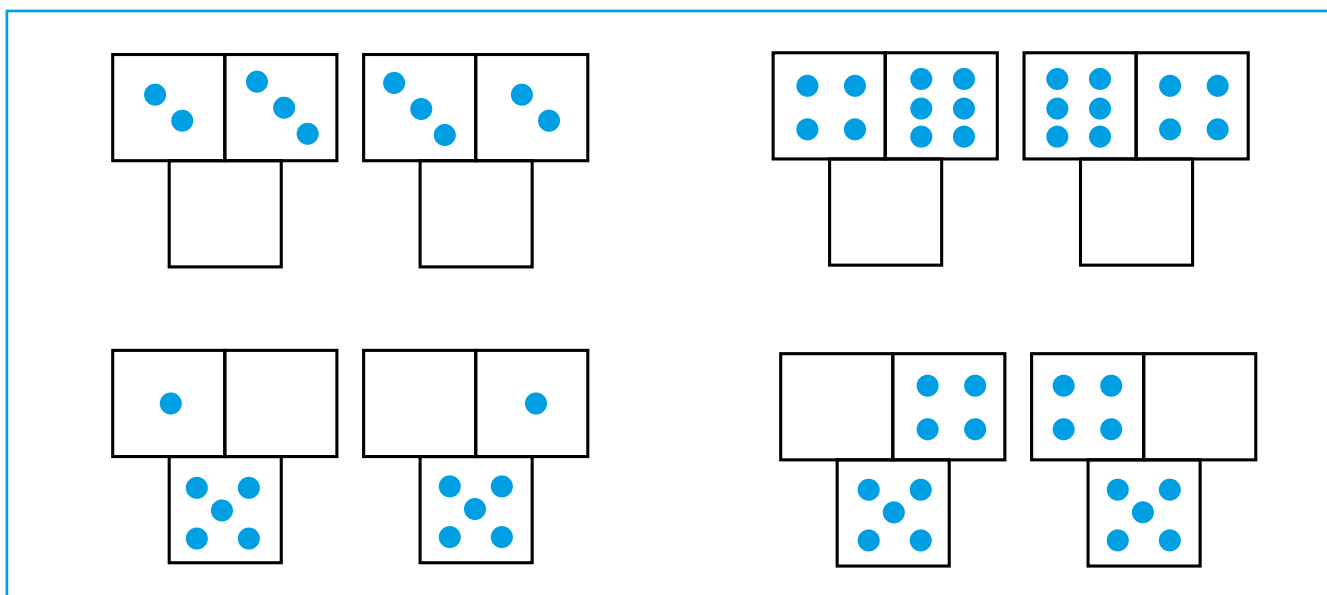
Učitel může vyzkoušet přes sérii úloh, zda žáci vnímají stejnosti počtů v momentě, kdy prohodíme obě horní pole. Může sledovat, zda si žáci takových stejností všimají, případně jestli jsou v nějaké z variant při řešení úloh úspěšnější.

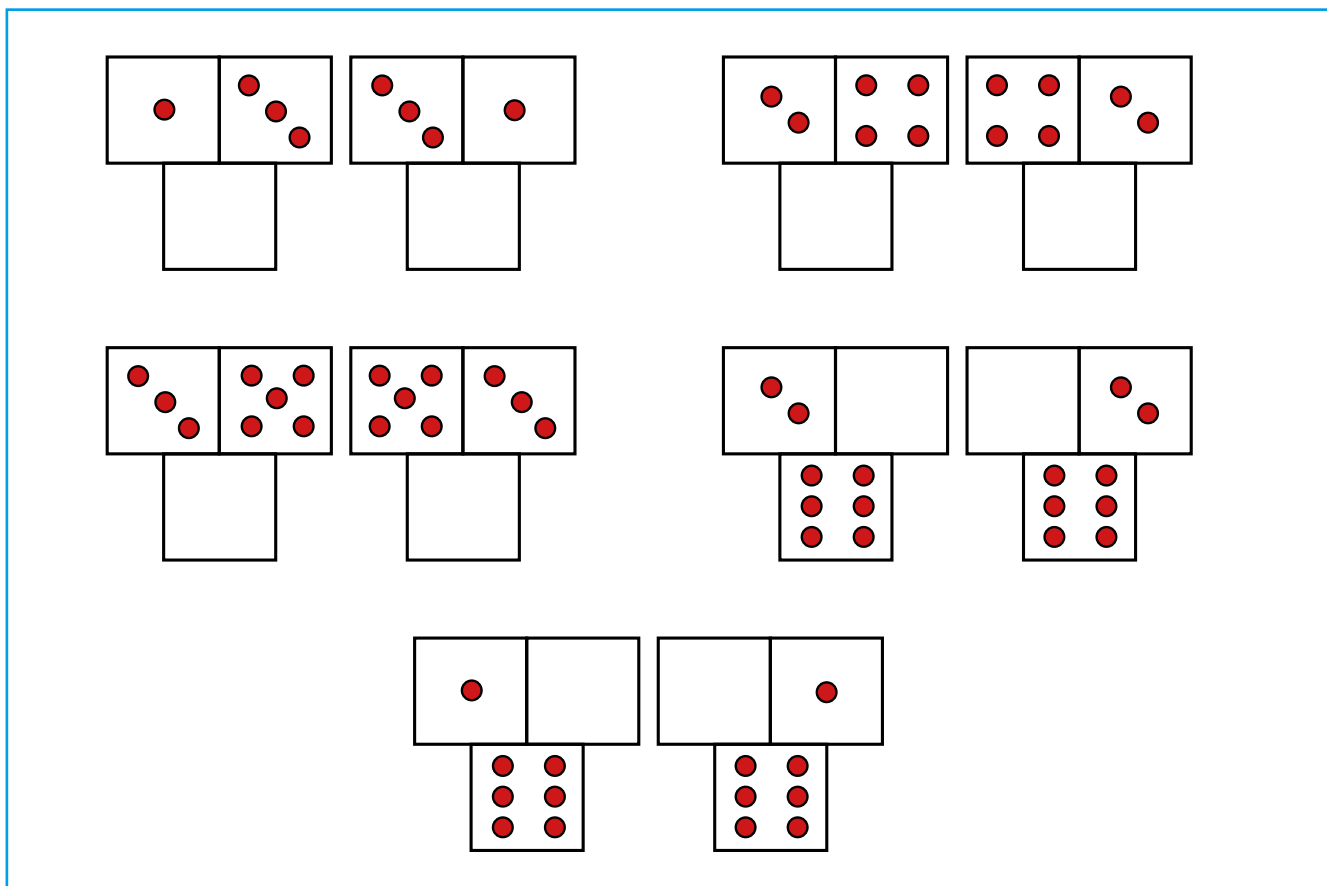
Úloha:



V těchto dvojicích „stejných“ úloh možná některý žák po vypočítání prvního trojúhelníku rychle řekne: „To je stejné, akorát otočené.“ Ten komutativitu dobře vnímá. Je zajímavé sledovat, zda by totéž dokázal rychle určit v jazyce čísel: např. $7 + 4 = ?$, $4 + 7 = ?$. Pokud sledujeme, zda žáci vnímají komutativitu, je třeba si všimnout i dalších parametrů – jestli jsou konfigurace stejné, v jakém jazyce se řeší (čísla, tečky, čárky, ...) apod.

Úloha:

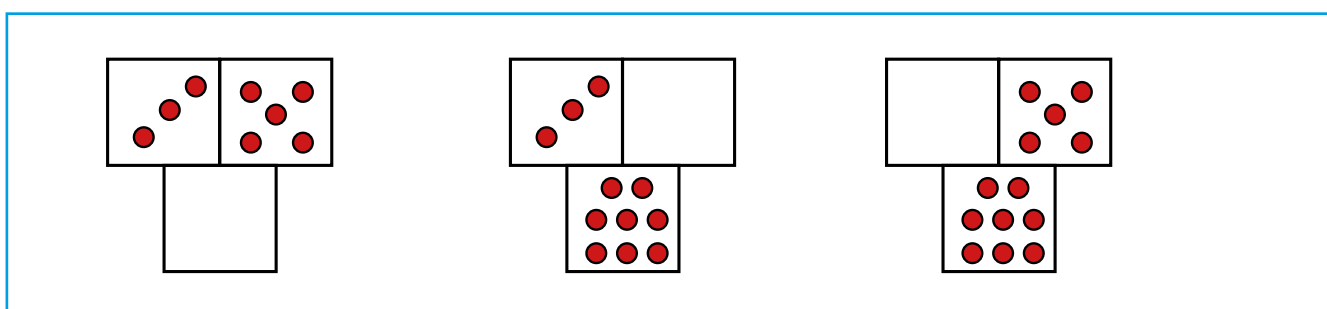




Pozice neznámého pole

V trojúhelnících se třemi poli (okny) mohou nastat tři situace. Není známo jedno z horních čísel (počet objektů) nebo číslo dolní. Poslední situace na obrázku je pro žáky nejnáročnější, protože objekty nesčítají, ale musí je odčítat, případně dopočítávat. Ukažme si to na třech stejných úlohách (po doplnění všech teček).

Úloha:



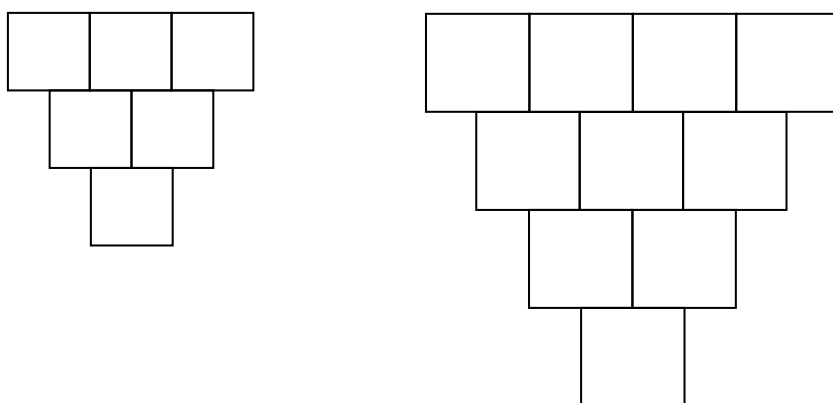
První úlohu žáci vyřeší „standardně“: sečtou 3 objekty a 5 objektů, vyjde jim 8 objektů. Druhá úloha ale není na sčítání, pokud žáci i zde objekty sečtou, musí se provést reedukace. Jde o **konvenci (domluvu)**, jak prostředí součtových trojúhelníků funguje. V úlohách s jednoduchými trojúhelníky se toto musí pevně zafixovat, aby žáci u složitějších trojúhelníků tato pravidla dodržovali.

Pak žáci úlohu vyřeší buďto odčítáním (8 objektů – 3 objekty), nebo zpočátku používají tzv. dopočítávání. Mám 3 objekty, přidám 1 objekt, mám 4, přidám další, mám 5 atd. Tím dojdou k hledanému celkovému počtu 8 a výsledku 5. Žáci často používají manipulaci s kamínky a podobné nápomocné nástroje. Stejně tak vyřeší třetí poslední úlohu.

Pravidla každého z matematických prostředí jsou důležitá, aby mezi žáky nevznikala nedorozumění. Proto se k této konvenci ještě podrobněji vracíme a důležité poznatky z praxe shrnujeme.

Velikost trojúhelníku

Po zafixování pravidel prostředí se začnou objevovat i „větší“ součtové trojúhelníky – viz obr.



Gradační parametry budou v souladu se základními „menšími“ součtovými trojúhelníky. Zvětšením součtového trojúhelníku se v něm ale objevuje i více početních operací, vztahů a zákonitostí.

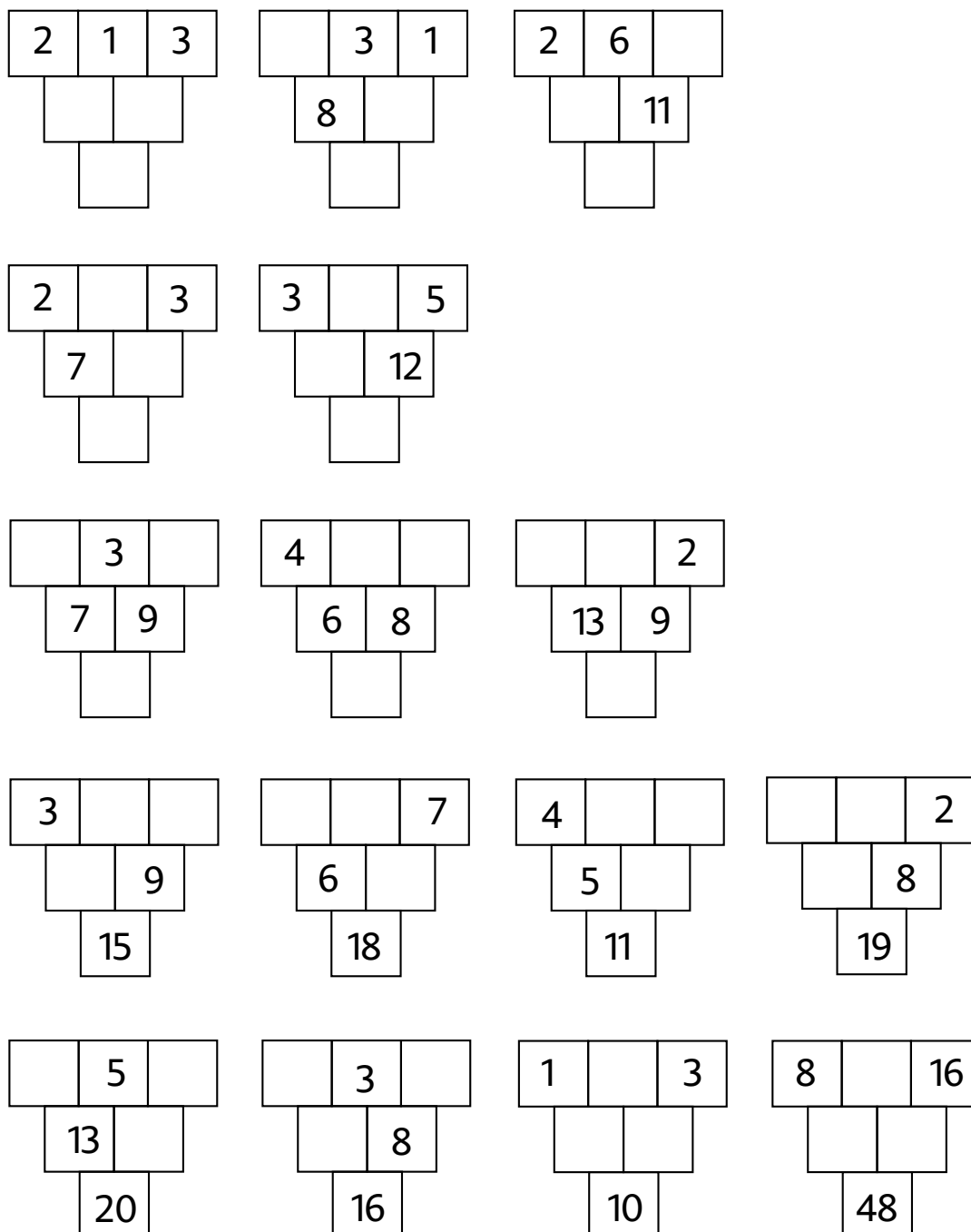
Úloha:

<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	2	3	1							<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>3</td><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	3	4	3							<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>6</td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>4</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	6	2				4				<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td></td><td>4</td><td>6</td></tr> <tr><td></td><td>9</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> </table>		4	6		9				
2	3	1																																					
3	4	3																																					
6	2																																						
		4																																					
	4	6																																					
	9																																						
<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td></td><td>5</td><td></td></tr> <tr><td>8</td><td>11</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> </table>		5		8	11					<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>7</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>9</td><td>8</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	7			9	8					<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td></td><td>5</td><td></td></tr> <tr><td>6</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>17</td><td></td></tr> </table>		5		6				17		<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td></td><td>6</td><td>3</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>19</td></tr> </table>		6	3						19
	5																																						
8	11																																						
7																																							
9	8																																						
	5																																						
6																																							
	17																																						
	6	3																																					
		19																																					

2. ročník

Pozice zadaného čísla

Úloha:



Na obrázcích je větší množství součtových trojúhelníků. Ve všech známe tři čísla. Je třeba si uvědomit, že gradacních parametrů je zde více a v úlohách se mohou prolínat. Proto nejde stanovit pevné pořadí dle gradace. To učitel zjistí při práci s žáky. Toho může docílit, když žákům zadá několik různých trojúhelníků s tím, ať vyřeší všechny, co zvládnou. Tím může zjistit, na který gradacní parametr se zaměřit.

Stěžejním gradacním parametrem je pozice zadaných hodnot. S tím souvisí další parametr: počet sčítání a počet odčítání potřebný k vyřešení úlohy (dá se očekávat, že sčítání bude pro žáky jednodušší).

Explicitní a implicitní úlohy

Explicitní úlohy jsou takové, jejichž kroky k vyřešení úlohy jsou dané a „viditelné“. V prvních dvou úlohách žáci doplní všechna čísla pomocí sčítání a odčítání, krok po kroku. **Ve třetí úloze (implicitní úloze) ale první krok není vidět.** Žáci pravděpodobně (pokud neznají vhodný vztah mezi čísly) začnou dosazovat horní prostřední číslo a zkoušet, zda čísla „sedí“. Do jisté míry se i toto dá považovat za gradační parametr, záleží na vybudované strategii žáků.

Úloha:

<table border="1" style="margin: auto;"><tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	2	3	4							<table border="1" style="margin: auto;"><tr><td>2</td><td></td><td>4</td></tr><tr><td></td><td></td><td>7</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	2		4			7				<table border="1" style="margin: auto;"><tr><td>2</td><td></td><td>4</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>12</td></tr></table>	2		4						12
2	3	4																											
2		4																											
		7																											
2		4																											
		12																											
explicitní úlohy		implicitní úlohy																											

Úloha:

<table border="1" style="margin: auto;"><tr><td>5</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	5	3	4							<table border="1" style="margin: auto;"><tr><td>2</td><td>6</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>13</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	2	6				13				<table border="1" style="margin: auto;"><tr><td>6</td><td></td><td>3</td></tr><tr><td></td><td></td><td>10</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	6		3			10				<table border="1" style="margin: auto;"><tr><td>12</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>18</td></tr><tr><td></td><td></td><td>7</td></tr></table>	12					18			7	<table border="1" style="margin: auto;"><tr><td></td><td>5</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>12</td></tr><tr><td></td><td></td><td>16</td></tr></table>		5				12			16
5	3	4																																															
2	6																																																
		13																																															
6		3																																															
		10																																															
12																																																	
		18																																															
		7																																															
	5																																																
		12																																															
		16																																															
<table border="1" style="margin: auto;"><tr><td>9</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>18</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>39</td></tr></table>	9				18				39	<table border="1" style="margin: auto;"><tr><td></td><td>15</td><td></td></tr><tr><td></td><td>21</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>44</td></tr></table>		15			21				44	<table border="1" style="margin: auto;"><tr><td>7</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>20</td></tr><tr><td></td><td></td><td>37</td></tr></table>	7					20			37	<table border="1" style="margin: auto;"><tr><td>5</td><td></td><td>6</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>27</td></tr></table>	5		6						27										
9																																																	
	18																																																
		39																																															
	15																																																
	21																																																
		44																																															
7																																																	
		20																																															
		37																																															
5		6																																															
		27																																															

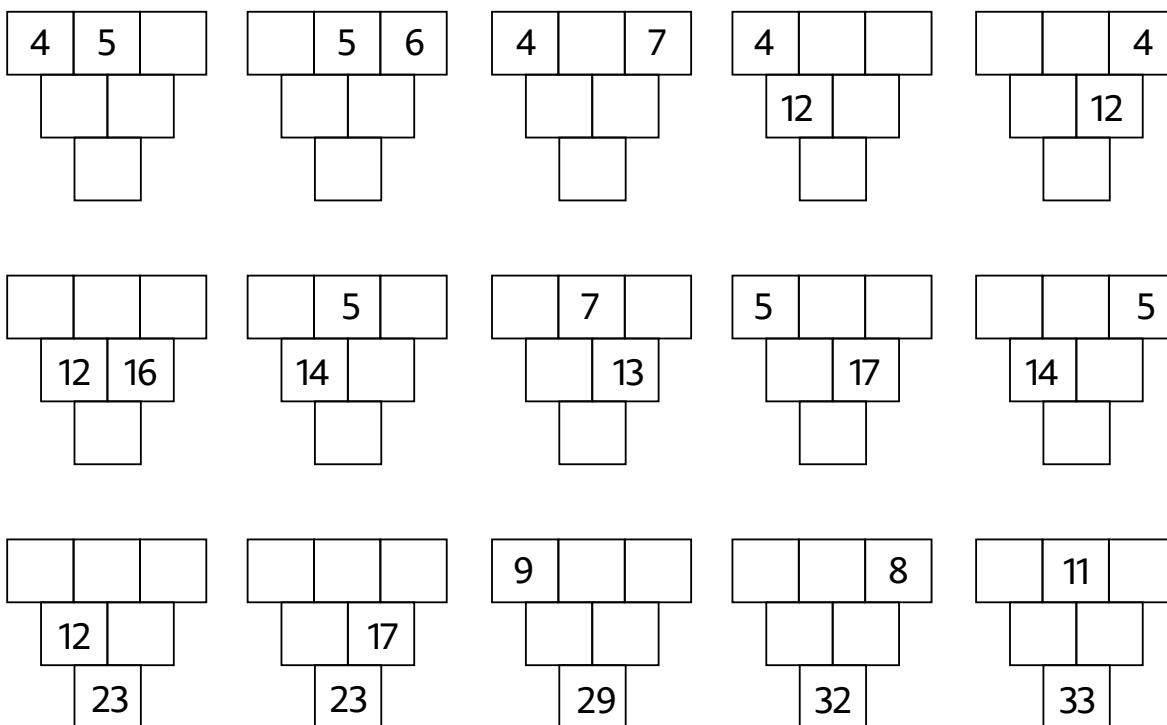
Ve 2. ročníku se objevují úlohy s více řešeními. Mívají kombinatorický charakter a žáci v nich pracují např. s různými rozklady daných čísel. Takové úlohy dobře ukazují na to, s jakými čísly žáci chtějí pracovat.

Hledání více řešení

Pokud se objevuje výzva k hledání více řešení, může to být také považováno za gradační parametr. Slabší žáci se často spokojí s nalezením řešení jednoho. Naopak motivovaní žáci zde nemusí mít potřebu hledat spoustu řešení, pokud jim jsou úlohy jasné. Proto spíše než zde mluvit o gradačním parametru ukazujeme několik úloh, jež učitel může zařazovat do hodiny a sledovat, jak je žáci řeší a jak je baví.

Úloha:

Hledej více řešení.



3.–5. ročník

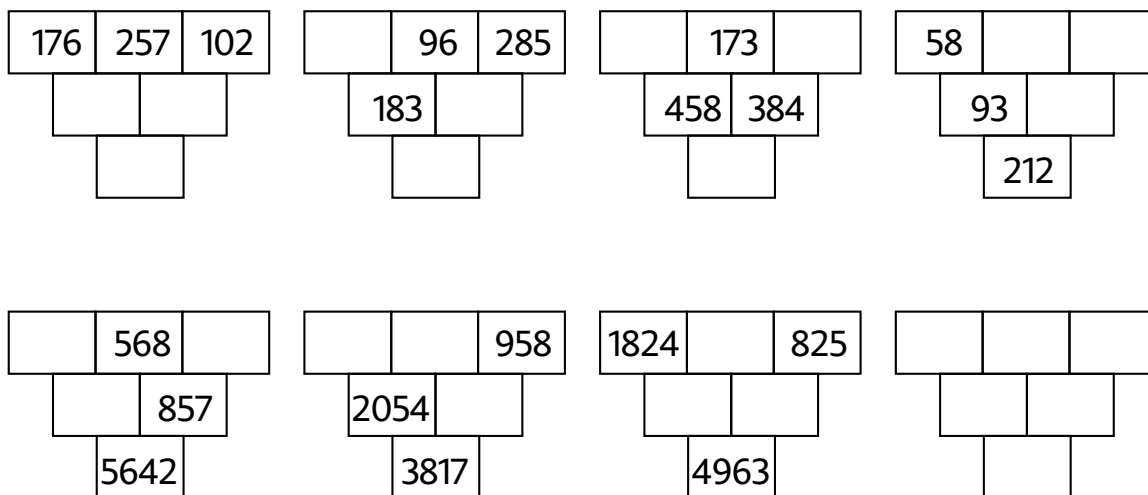
Ve vyšších ročnících se objevují v trojúhelnících větší čísla.

Velikost hodnot

Podle potřeby se zadávají úlohy s většími čísly. Velikost čísel je jedním z gradačních parametrů. Žáci pracují s většími čísly, objevuje se tedy větší **riziko numerických chyb**.

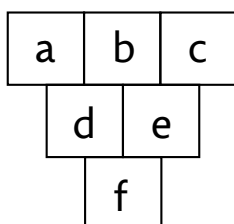
Úloha:





Vztahy mezi čísly

V součtovém trojúhelníku je možné hledat zákonitosti a vztahy mezi čísly. Ty lze zadávat žákům pomocí **kouzla**. To mívá silný motivační charakter. Žáci ve snaze odhalit princip kouzla tyto vztahy objevují. Čísla v trojúhelníku označme pracovně a–f (viz obr.)



a) První vztah: $a + e = c + d$.

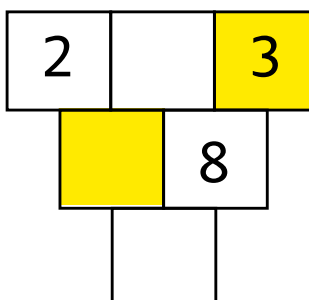
b) Druhý vztah: $a + 2b + c = f$.

c) Třetí vztah: Součet všech čísel trojúhelníku ($a + b + c + d + e + f$) je stejný jako součet trojnásobku součtu horních čísel a dvojnásobku prostředního horního čísla. Pro lepší orientaci запиšme $a + b + c + d + e + f = 3 \cdot (a + b + c) + 2b$.

ad a)

Úloha:

Urči součet žlutých polí.

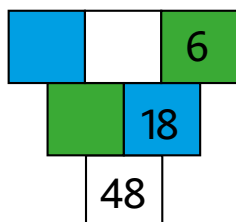


Měníme hodnotu 3 ve žlutém poli a sledujeme, jak se mění součet obou žlutých polí. Odhalení vztahu může napomoci obarvení polí 2 a 8. Pokud zná žák výše napsaný „trik“, úlohu rychle vyřeší ($8 + 2 - 3 = 7$). Učitel může tato „triková“ řešení sledovat a nabízet podle motivace žáků další úlohy.

Jinou možností je zadat následující úlohu.

Úloha:

Doplň součtový trojúhelník. Poté urči součet dvou modrých polí a součet dvou zelených polí. Co pozoruješ?



$$\text{blue square} + \text{blue square} = \text{white square}$$

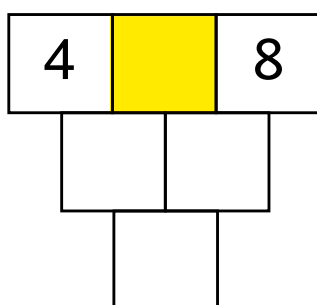
$$\text{green square} + \text{green square} = \text{white square}$$

Učitel může zadat další podobné úlohy nebo si může každý žák vytvořit vlastní trojúhelník. Žáci tím zjistí, že první zmíněný vztah $a + e = c + d$ platí vždy.

ad b)

Úloha:

Do žlutého pole vlož číslo, vyřeš trojúhelník. Pokud kouzelníkovi řekneš dolní číslo, on rychle řekne číslo ve žlutém poli.



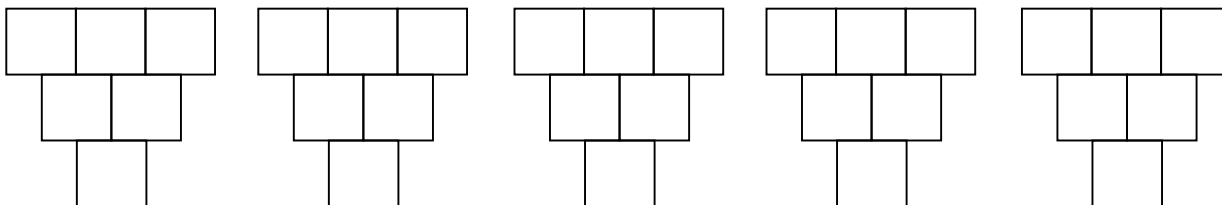
Kouzlo je založeno na druhém uvedeném vztahu. Z toho vyplývá, že při znalosti dolního čísla od tohoto čísla odečteme součet krajních horních čísel ($4 + 8$) a výsledek vydělíme dvěma. Kdyby do žlutého pole dal žák např. 3, dolní číslo vyjde 18. To nahlásí žák kouzelníkovi, který od 18 odečte 12, dostane 6 a výsledek 6 vydělí dvěma. Tak dostane kouzelník žákovo číslo.

Kouzlo se poté opakuje s jinými čísly a žáci postupně princip kouzla odhalují. Často je výhodné výsledky evidovat do **tabulky**. Tabulka je velice silný nástroj k hledání vztahů a pravidel.

ad c)

Úloha:

Najdi trojúhelník, jehož součet všech horních čísel je 5
a součet všech šesti čísel je 19. Najdi všechna řešení.



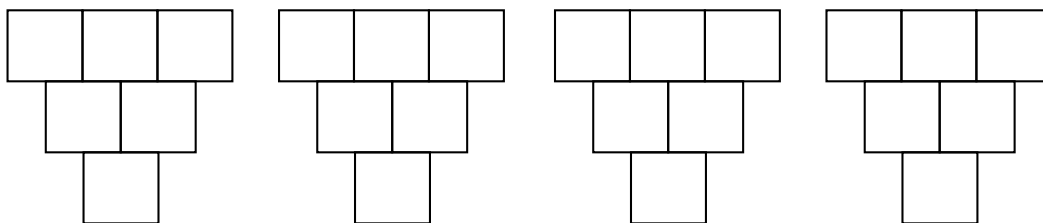
Podle třetího uvedeného vztahu platí, že uprostřed horního řádku musí být číslo 2. Protože součet všech čísel je stejný jako $3 \cdot 5 + ? \cdot 2$. Aby součet byl 19, musí být místo otazníku číslo 2. Žáci budou ale experimentovat. Aby vztah se součtem čísel prvního řádku objevili, budou potřebovat mnohem více izolovaných modelů (podobně koncipovaných úloh).

Úlohy se dají různě obměňovat, např.:

Úloha:

Doplň ST tak, aby:

- a) součet čísel horního řádku byl 3 a součet všech čísel byl 9.
- b) součet čísel horního řádku byl 3 a součet všech čísel byl 11.
- c) součet čísel horního řádku byl 3 a součet všech čísel byl 13.
- d) součet čísel horního řádku byl 3 a součet všech čísel byl 15.

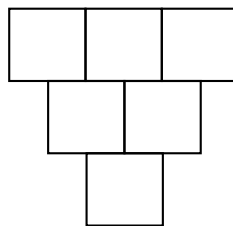


Podobné úlohy jsou dobré k získávání zkušeností. Ty žáci budou potřebovat, pokud chtějí třetí vztah objevit. Postupně zjišťují, že prostřední horní číslo se mění: 0, 1, 2, 3. To je dobrá zkušenost s tím, že prostřední horní číslo je důležité vzhledem k součtu všech čísel trojúhelníku.

Úlohy je dobré zadávat formou kouzla. To často vede ke snaze žáků kouzlo „zlomit“.

Úloha:

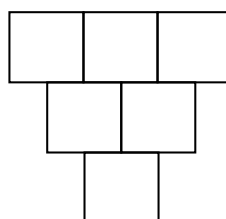
Doplň celý součtový trojúhelník.



Když mi řekneš součet čísel horního řádku a prostřední číslo horního řádku, rychle řeknu součet všech čísel trojúhelníku.

Úloha:

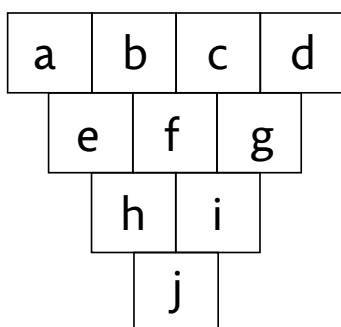
Doplň celý součtový trojúhelník.



Když mi řekneš součet všech jeho čísel a součet čísel horního řádku, rychle řeknu prostřední číslo horního řádku.

Náročnější vztahy se objevují v trojúhelníku se čtyřmi řádky. Zde uvádíme jeden.

d) Čtvrtý vztah:



Pokud sečteme čísla horního řádku a přidáme k nim dvojnásobek součtu prostředních čísel horního řádku, dostaneme spodní číslo. V jazyce písmen to zapíšeme: $a + b + c + d + 2 \cdot (b + c) = j$.

Úloha:

Když mi řekneš spodní číslo a součet všech horních čísel tvého trojúhelníku, řeknu rychle, jaký je součet dvou prostředních čísel horního řádku.

Číselný obor

Součtové trojúhelníky jsou strukturální prostředí, proto se v nich v případě potřeby dobře tvoří úlohy s dalšími číselnými obory, konkrétně se **zápornými** nebo **desetinnými čísly**. Použití čísel jiného číselného oboru je pro většinu žáků gradačním parametrem. U mladších žáků se běžně stává, že při prvních setkáních např. se záporným číslem v podobných úlohách někteří žáci taková řešení nepřijmou.

Dvě trojice úloh vedou k použití záporných (1. série), resp. racionálních čísel (2. série).

Úloha:

5		6
		9

7		13
		16

18		14
		22

1		3
		5

5		2
		8

11		13
		41

Úloha:

1		7
		12

3		17
		36

5		6
		9

S žáky můžeme vyzkoušet i sérii úloh, kdy vychází záporné číslo pouze v jednom trojúhelníku. První úlohu žáci vyřeší, v prostředním horním poli vyjde 2. Ve druhém trojúhelníku vyjde horní prostřední číslo 8. Třetí trojúhelník ale již nevyřeší všichni žáci, někteří budou tvrdit, že úloha nemá řešení. Dokonce i když nějaký žák ukáže řešení s horním prostředním číslem -1 , někdo toto řešení nevezme. To je v pořádku, ostatní žáci takové řešení přijmou v budoucnu s větším počtem zkušeností s podobnými úlohami i se zkušenostmi z každodenního života (výtahy, teploměr, dluhy, ...).

Úlohy s podmínkou

Úlohy s podmínkou se objevují již ve 2. ročníku. Nutno dodat, že takové úlohy jsou náročné. Proto je potřeba jim věnovat zvýšenou pozornost.

Na obrázku jsou tři úlohy se součtovými trojúhelníky s podmínkou.

Úloha:

The image shows three addition triangle problems, each with a condition below it. Each triangle has three boxes in the top row, two in the middle, and one in the bottom. The top row boxes are connected by a horizontal line, the middle row boxes by a horizontal line, and the bottom box is centered below the middle row.

- Problem 1:** Top row: 4, , 7. Middle row: , . Bottom row: . Condition: $\square + \square = 15$ (orange squares).
- Problem 2:** Top row: , , 5. Middle row: 8, . Bottom row: . Condition: $\square + \square = 11$ (green squares).
- Problem 3:** Top row: 5, , . Middle row: , 9. Bottom row: . Condition: $\square + \square = 11$ (brown squares).

Tyto úlohy se mohou dobře gradovat pozicí barevných čísel nebo velikostí čísel.

Ještě předtím, než žáci řeší tyto úlohy, je ale důležité vyjasnit **souvislost trojúhelníku a podmínky**. K tomu dobře poslouží podobné úlohy, kde žáci řeší součtový trojúhelník a podmínku z něj nejdříve zjišťují – viz obr.

Úloha:

Do doplň jednu z číslic 0, 1, 2, 3, 4. Vyřeš.
Najdi číslo v žlutém poli.

The image shows three addition triangle problems, each with a condition to be derived from the triangle. Each triangle has three boxes in the top row, two in the middle, and one in the bottom. The top row boxes are connected by a horizontal line, the middle row boxes by a horizontal line, and the bottom box is centered below the middle row.

- Problem 1:** Top row: , , 4. Middle row: , 7. Bottom row: . Condition: $\square + \square = \square$ (red squares).
- Problem 2:** Top row: 2, , 3. Middle row: , . Bottom row: . Condition: $\square + \square = \square$ (blue squares).
- Problem 3:** Top row: , 2, 4. Middle row: , . Bottom row: . Condition: $\square + \square = \square$ (green squares).

Následující úlohy jsou zase zaměřeny na to, že žáci ze znalosti součtu čísel z podmínky jsou schopni do trojúhelníku ihned doplnit číslo pod nimi. Pro žáky ale taková věc není automatická a často vyžaduje více podobných úloh. Učitel může sledovat, zda podobné zákonitosti ve struktuře součtových trojúhelníků žáci vnímají.

Úloha:

2 5 + = 10	2 15 + = 10
--	---

V čem se liší následující dvě úlohy?

Úloha:

6 10 + = 12	2 10 + = 12
--	--

U první úlohy je možné okamžitě doplnit jedno žluté pole ($10 - 6 = 4$) a dále pak je možné snadno dopočítat druhé žluté pole díky zadané podmínce. Tato strategie u druhé úlohy není možná. Jak bylo zmíněno výše, pozice čísel z podmínky je jedním z hlavních gradačních parametrů těchto úloh.

Náročnější úlohy:

Náročnost úloh s podmínkou může spočívat ve více věcech. Jednou z nich je **pozice hledaných čísel**.

Úloha:

5 8 + = 11	
---	--

Např. v této úloze mohou žáci říct: „Hledáme dvě čísla, jejichž součet je 11 a rozdíl 5.“

V následující sérii žáci zjistí, že některá úloha má **více řešení**. To je dalším gradačním parametrem v případě, že jsou žáci vyzváni k hledání dalších řešení. Více řešení mají i poslední dvě úlohy.

Úloha:

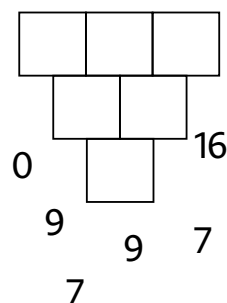
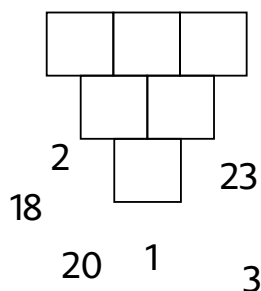
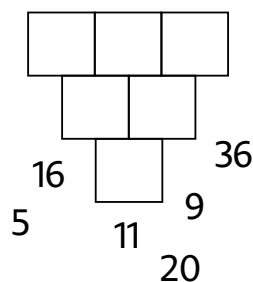
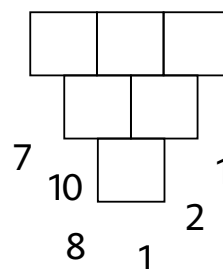
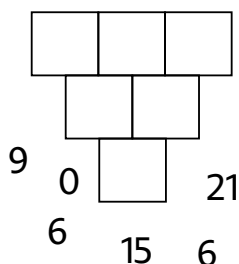
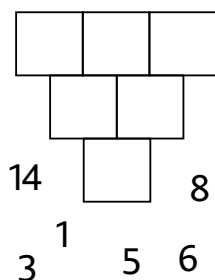
Úloha:

Dalším typem úloh jsou úlohy s narušenou strukturou – s tzv. čísly neposedy. **Gradační parametry** se budou opakovat, zde **především velikost čísel nebo číselný obor**. Jiným parametrem, který se v běžných úlohách neobjevuje, je **možnost utajení jednoho nebo více čísel**. Tím se úlohy stávají obtížnějšími.

Neposedové

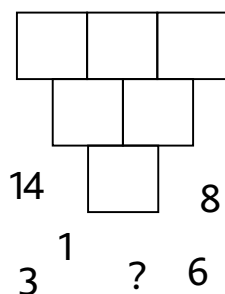
Úloha:

Vrať neposedy.



Úloh s utajeným(i) číslem(y) lze vymyslet nepřeberné množství. Např. z první úlohy utajíme jedno z čísel.

Úloha:

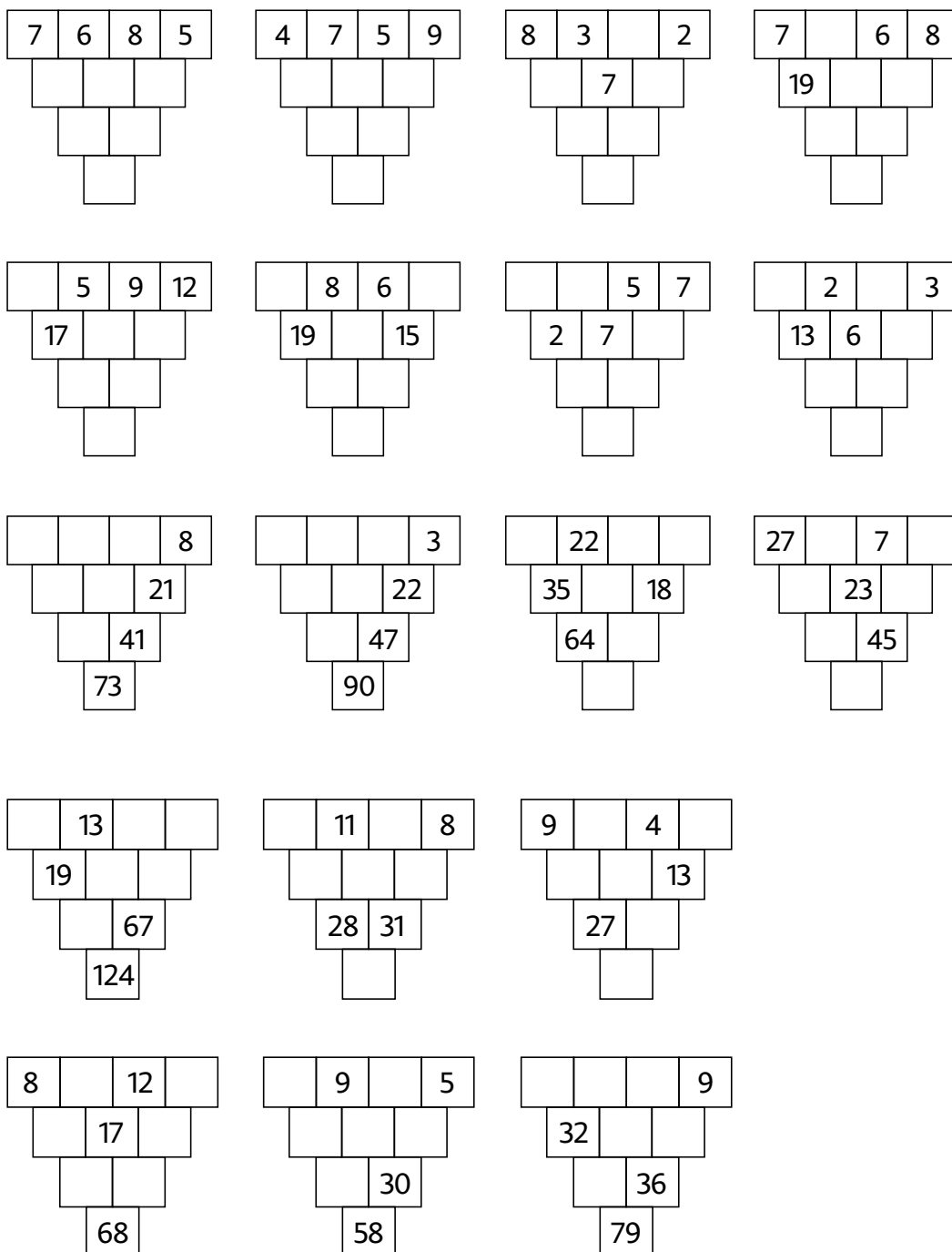


Náročnější počítání se objevuje v trojúhelnících se 4, nebo dokonce více řádky. Zde uvedeme několik úloh s trojúhelníky se čtyřmi řádky.

4 zadaná čísla (pozice zadaného čísla)

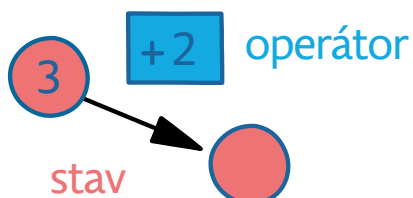
Ve všech součtových trojúhelnících jsou 4 zadaná čísla. Stěžejním gradačním parametrem je zde pozice zadaných čísel. Stejně jako u tříúrovňových součtových trojúhelníků zde můžeme pracovat s parametrem, kterým je počet provedených operací (sčítání a odčítání) nutných k vyřešení úlohy. Také můžeme sledovat, zda žák úlohy řeší metodou pokusů, nebo dokáže úlohy řešit pomocí objevených vztahů v součtovém trojúhelníku (viz vztahy u tříúrovňových trojúhelníků).

Úloha:



HADI

Prostředí Hadi patří mezi **strukturální** prostředí. To znamená, že Hadi s sebou nepřináší sémantická kotvení, propojení s každodenním životem. Hlavním cílem je **mnohé počítání**, čímž si žáci automatizují kalkulativní spoje. Žáci se zde rovněž setkávají s čísly v různých rolích: **stavy** (čísla v kroužcích) a **operátory** (čísla vztažená k šipkám, operacím). Úlohy se stávají náročnější, nebo naopak jednodušší změnami gradačních parametrů. Postupně tyto parametry uvedeme.

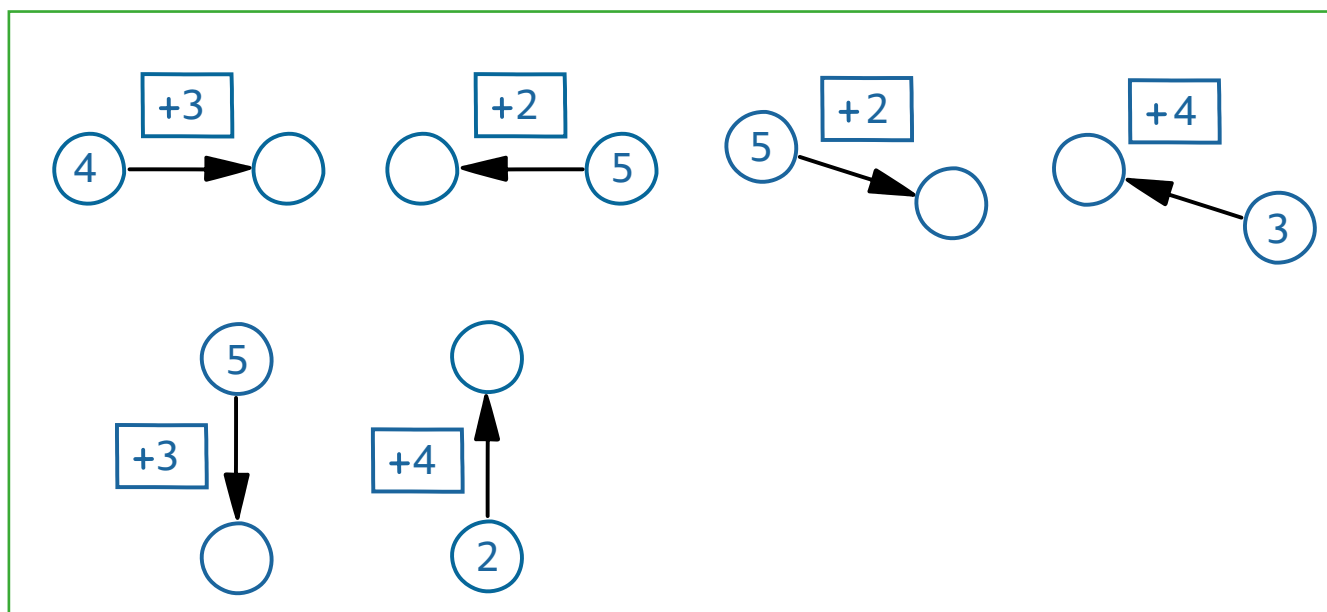


1. ročník

Změna směru šipek

Grafika hadů při jejich zavádění do praxe způsobovala potíže tím, že žáci i někteří učitelé zaměňovali hady s prostředím Krokování. Proto je důležité měnit grafiku úloh, měnit směr šipek zprava doleva, narušit linearitu šipek. Je třeba ale z pozice učitele vnímat takové změny grafiky a sledovat, zda to nečiní žákům potíže. Směr šipky je tak prvním gradačním parametrem. To učitel může testovat např. v následující sérii úloh, kdy je znám vždy počáteční stav (první číslo v kolečku) a operátor (číslo nad šipkou určující operaci, zde pouze sčítání).

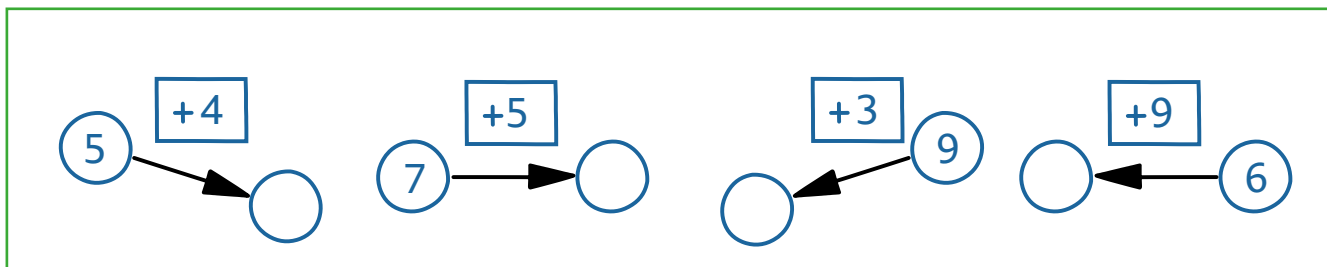
Úloha:



Přechod přes desítku

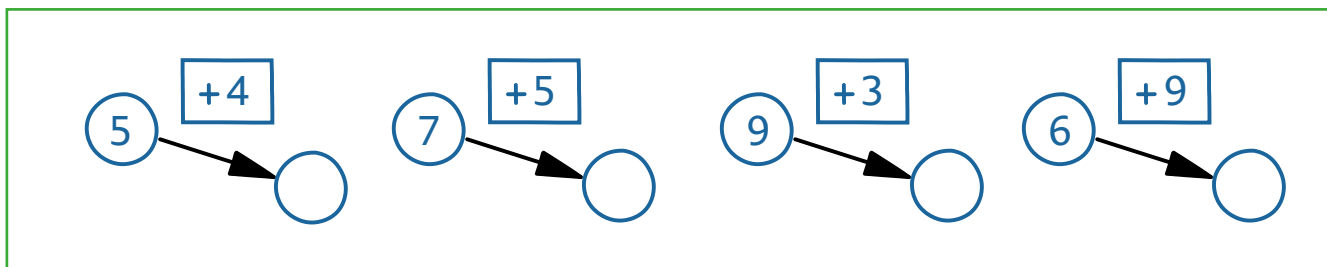
Počítání v 1. ročníku lze obecně ztížit s přechodem přes desítku.

Úloha:



Učitel může na sérii úloh s přechodem i bez přechodu pozorovat, jaké úlohy žákům činí potíže. Nutno podotknout, že v těchto úlohách se opět vyskytují pouze úlohy typu **známý stav + operátor = neznámý stav**. Rovněž je třeba sledovat, zda žákům v takových úlohách nečiní potíže první gradační parametr (změna směru šipek). Proto pokud je cílem zkoumat to, zda žáci zvládají přechod přes desítku, může učitel zadat úlohy se sjednocenou grafikou, např.

Úloha:



a případně testovat přechod přes desítku přes jiná zadání (jiná prostředí, klasicky zadané úlohy typu $7 + 5$ apod.)

Pozice neznámého čísla

Dalším gradačním parametrem v úlohách s hady je pozice neznámého čísla. Pokud zůstaneme u úloh se sčítáním typu stav + operátor = stav, lze vytvořit tři základní úlohy:

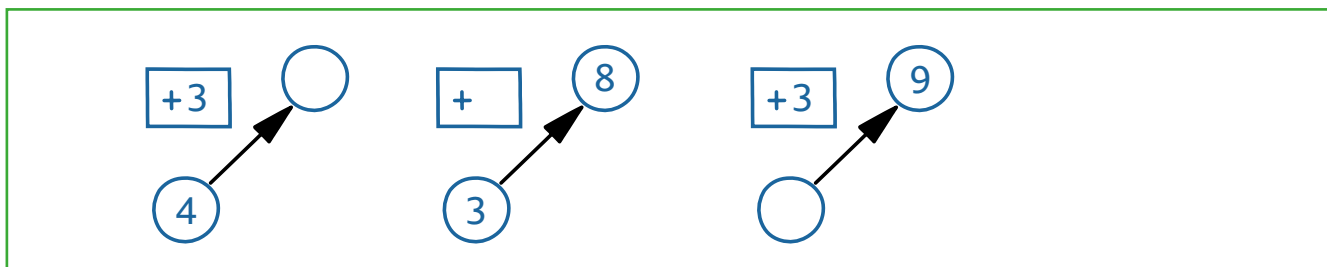
známý stav + známý operátor = neznámý stav (takové úlohy jsou již uvedeny výše),

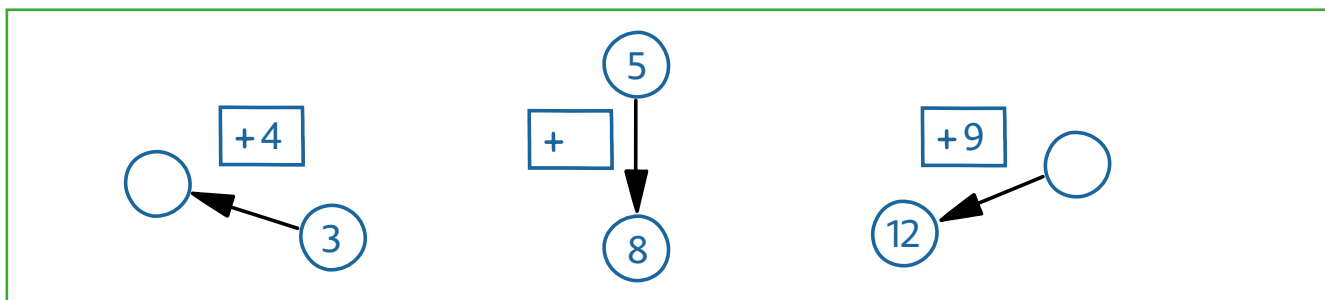
známý stav + neznámý operátor = známý stav,

neznámý stav + známý operátor = známý stav.

Takové dvě trojice úloh jsou na obrázcích.

Úloha:





Dá se očekávat, že nejobtížnější bude třetí typ úloh, kdy žáci neznají počáteční stav. Žáci v těchto úlohách namísto sčítání odečítají (zde $9 - 3 = 6$), dopočítávají (3 a kolik je 9), případně použijí metodu pokusů. Do kolečka dosadí nějaké číslo a ověřují, zda úloha funguje. Když ne, číslo adekvátně mění. Do úloh se rovněž mohou promítnout již pojmenované gradační parametry (směr šipek a přechod přes desítku).

K tomuto gradačnímu parametru lze s žáky dobře navázat se **slovními úlohami**. Třetímu hadovi odpovídá např. tato slovní úloha: „Anička si přidala do pokladničky 3 Kč. Pak měla v pokladničce celkem 9 Kč. Kolik korun měla v pokladničce před přidáním?“ Rozdíl mezi slovní úlohou a hadem je ten, že slovní úloha spíše žáky vede k manipulaci, která jim může s úlohou pomoci. Pro zmíněnou slovní úlohu lze použít manipulaci např. s mincemi: „Žák má 9 mincí, 3 odebere a získá počáteční počet mincí.“ Vzájemné propojení slovních úloh se záznamem úlohy do hada je další řešitelskou strategií, kterou se žáci učí. V budoucnu tyto myšlenky využijí při matematizaci slovních úloh pomocí rovnic.

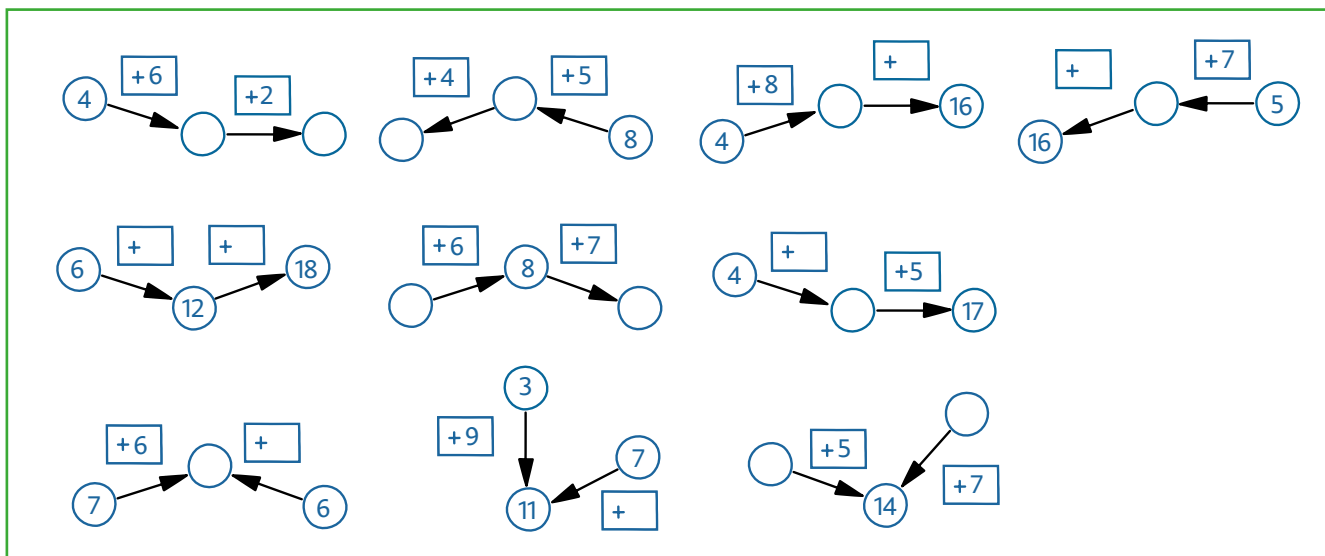
Složitost hadů

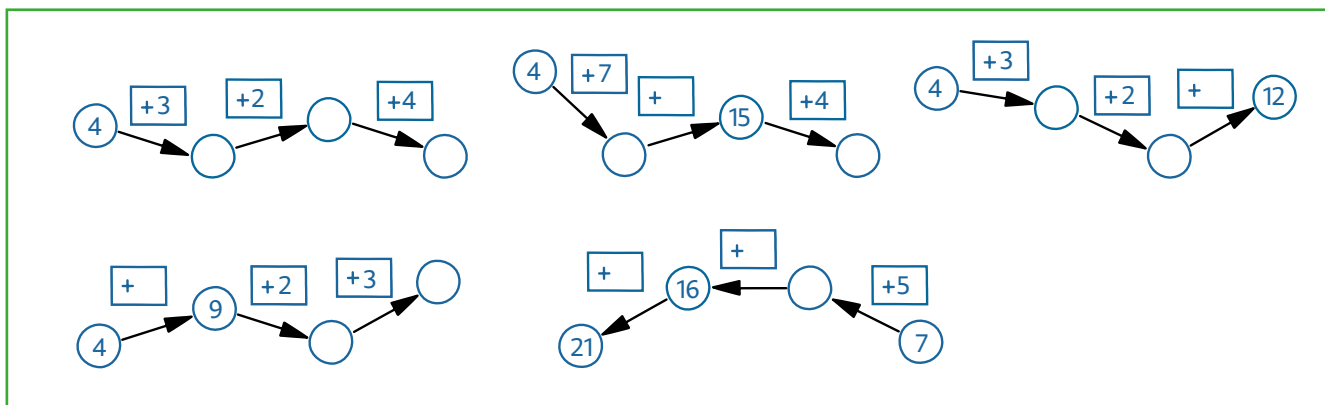
Dalším gradačním parametrem může být složitost hadů. Opustíme úlohy typu stav + operátor = stav a v hadech se objeví více koleček (stavů) i operací. Tento gradační parametr lze také pojmenovat jako řetězení operací. Pro některé žáky to bude pouze více počítání, někteří žáci mohou mít s řešením úloh potíže. Běžně se stává to, že žáci nevědí, s jakým doplněním začít. Znovu připomínáme, že zatím se v hadech objevuje pouze operace sčítání.

Řetězení operací (pozice neznámých čísel a směr šipek)

Na této sérii dobře vidíme, jak se prolíná řetězení hadů jako jeden gradační parametr spolu s parametrem pozice neznámého čísla. Učitel sleduje, jaké úlohy činí žákům potíže. Tím, že se setkává v jedné úloze více gradačních parametrů, není vždy jasné, co žákům činilo potíže.

Úloha:

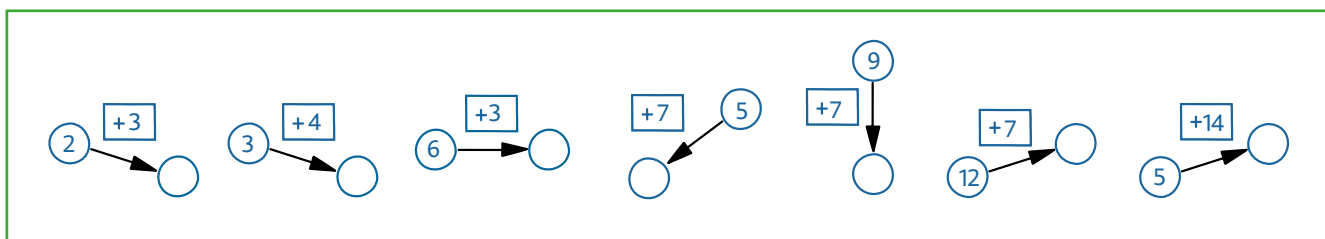




Velikost čísel

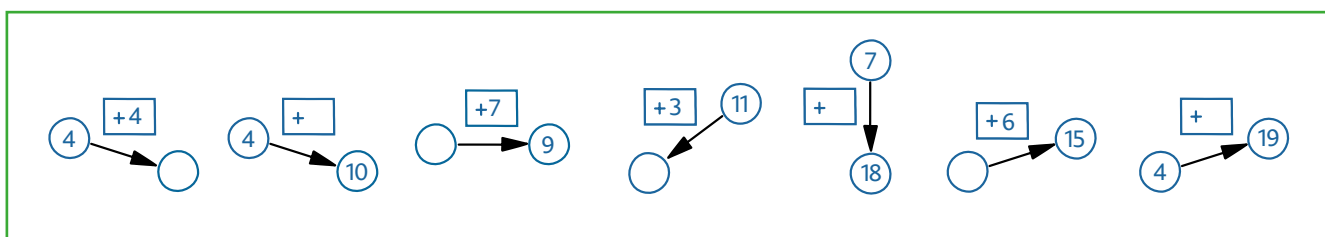
Postupně se žáci dostávají při řešení úloh s hady k vyšším číslům. I toto je třeba brát jako jeden z gradačních parametrů. Obtížnost úlohy může způsobit např. již zmiňovaný přechod přes desítku, velký rozdíl mezi známými stavy, použití víceciferných čísel apod. Samozřejmě ve vyšších ročnících se adekvátně zvyšuje i velikost čísel v úlohách, zde zůstaneme v číslech menších nebo rovných 20. V níže gradované sérii zůstáváme pouze v úlohách typu známý stav + známý operátor = neznámý stav.

Úloha:



Pokud budeme přidávat i další gradační parametry (konkrétně zde pozice neznámého čísla), můžeme dostat např. takovou sérii gradovaných úloh. Pak je opět důležité sledovat, jaký z gradačních parametrů žákům činí potíže.

Úloha:

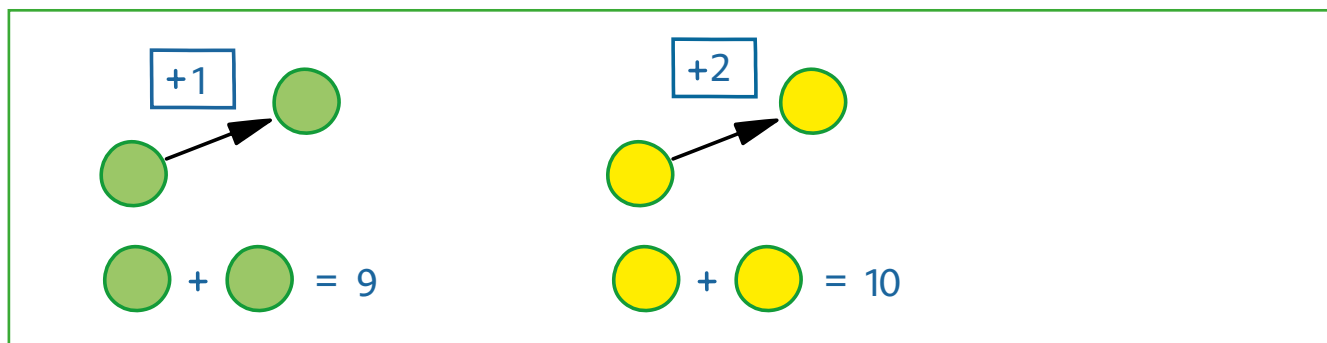


2. ročník

Ve 2. ročníku přicházejí úlohy s **hady s podmínkou**. Myšlenky, které obsahují, **připravují do budoucna soustavy dvou rovnic se dvěma neznámými**. Nutno dodat, že v této fázi jsou to jednoznačně přípravné úlohy, žáci neznají rovnice v pravém slova smyslu, natož jejich soustavy. Úlohy s podmínkami se ale objeví i v dalších matematických prostředích a žáci tak v budoucnu na tuto těžkou myšlenkou mohou být dobře připraveni.

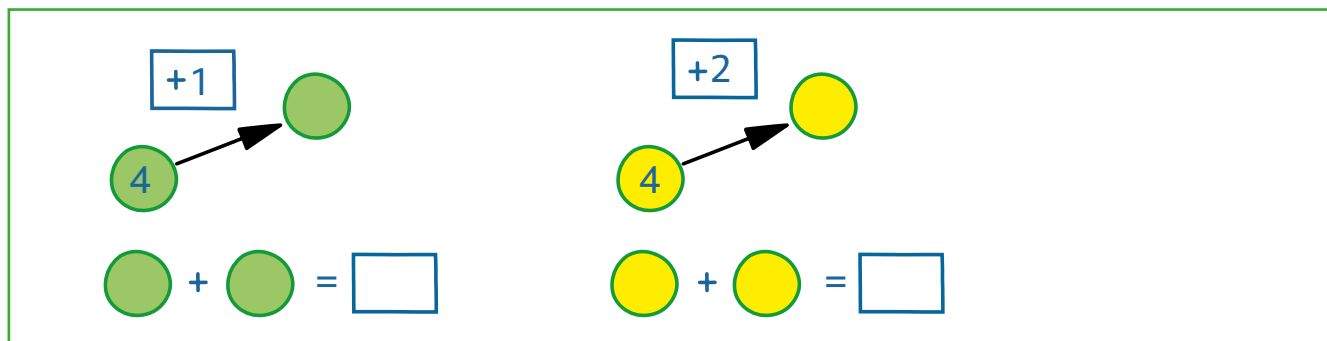
Hadi s podmínkou

Úloha:



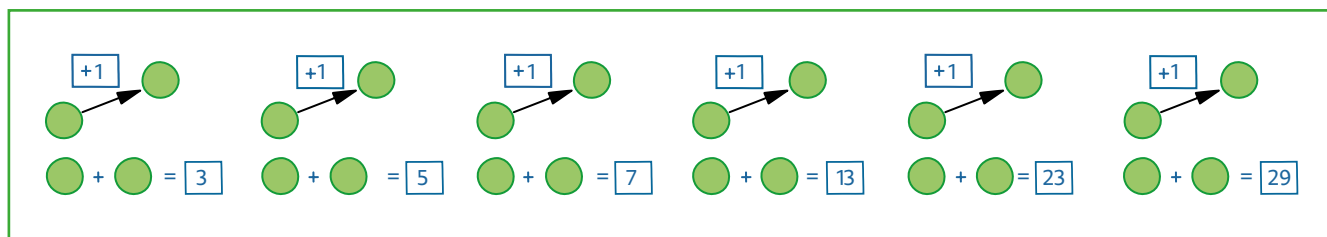
Ze zkušenosti z praxe vyplývá, že úlohy s podmínkou je **důležité připravit**. Pokud žákům zadáme úlohy výše bez přípravy, často mají žáci s úlohami potíže. Nerozumí totiž spojitosti hada a podmínky. Proto je vhodné začít úlohami, kde had lze lehce vyřešit a součet čísel v podmínce žáci počítají. Ukažme toto na dvou zmíněných úlohách:

Úloha:



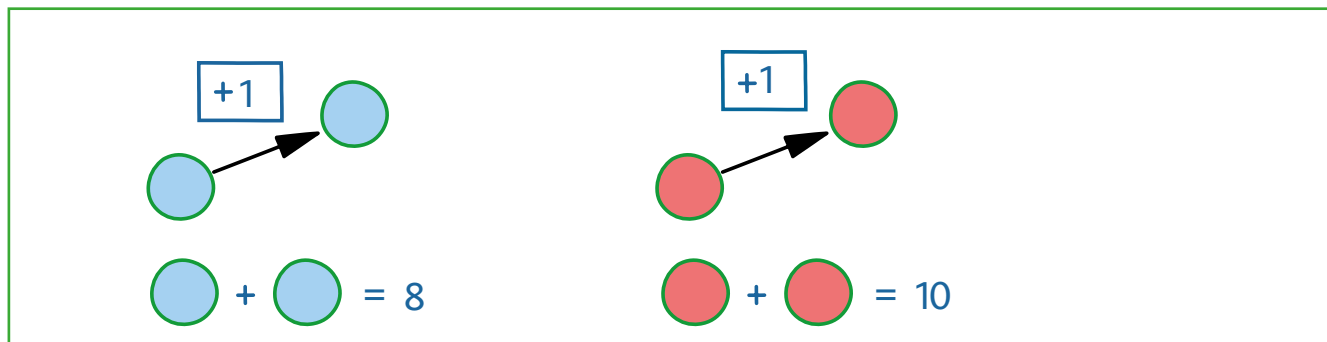
Žákům můžeme zadat sérii úloh, které vedou k nějakému zobecnění. Taková série může vypadat např. takto:

Úloha:



Když se najde žák, který řekne, že se jedná o součet dvou po sobě jdoucích čísel, má do situace dobrý vhled. Takovému žákovi lze zadat i úlohy, kde je součet sudý.

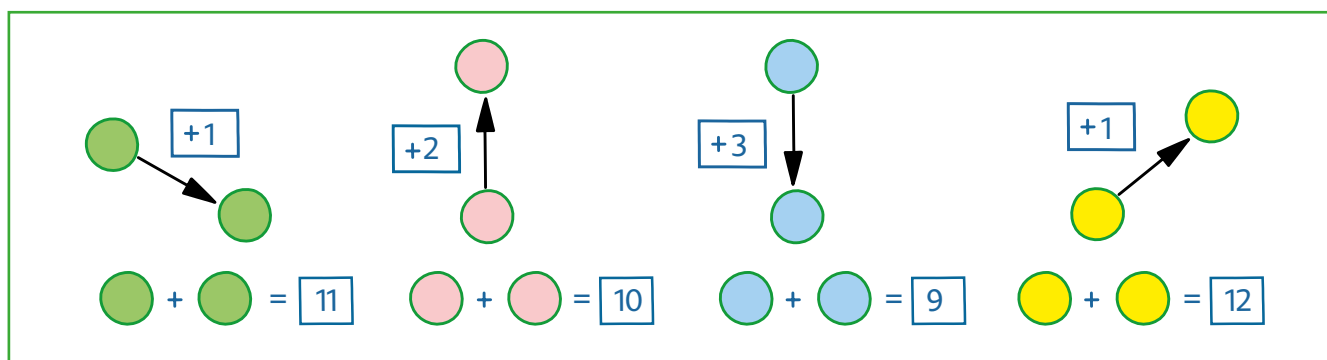
Úloha:



Pokud se žáci s úlohami s podmínkou dobře vyrovnali, lze jim zadat další úlohy, které lze gradovat stejně jako u úloh v prvním ročníku:

- a) rozdílem obou stavů,
- b) změnou směru šipek,
- c) velikostí čísel,
- d) případně změnou definičního oboru (použití desetinných čísel).

Úloha:

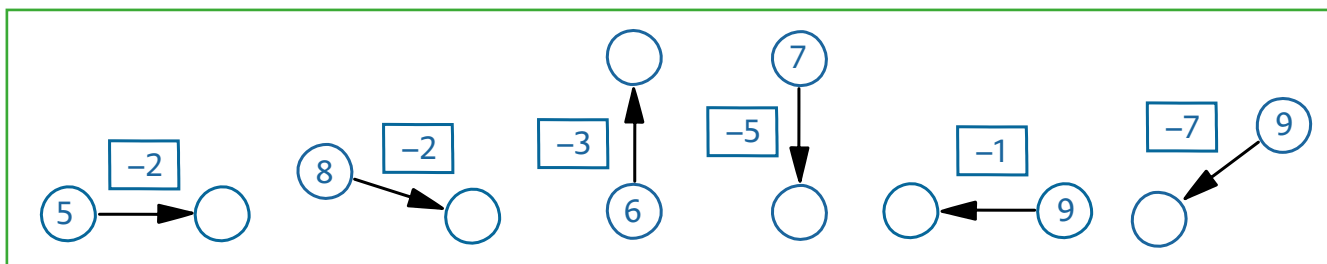


Operace odčítání

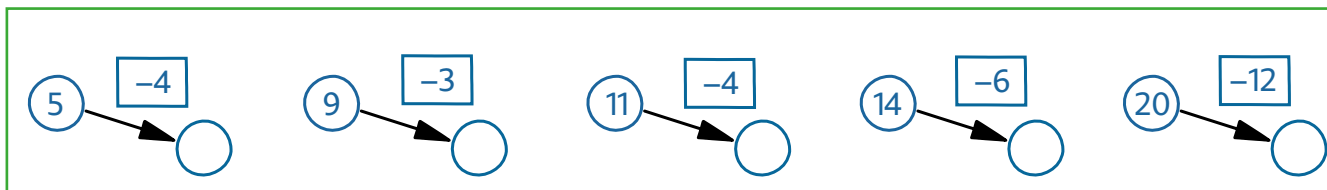
Dalšími gradačními parametry, které se v 1. ročníku neobjevily, jsou další početní operace. Do úloh s hady přibudou postupně operace odčítání, násobení i dělení. Přidejme nejprve operaci odčítání. Z hlediska gradačních parametrů bude situace stejná jako u sčítání, proto uvádíme pouze několik ilustrací. Opět budeme používat úlohy typu **stav – operátor = stav**.

Další parametry, které ovlivní náročnost úloh

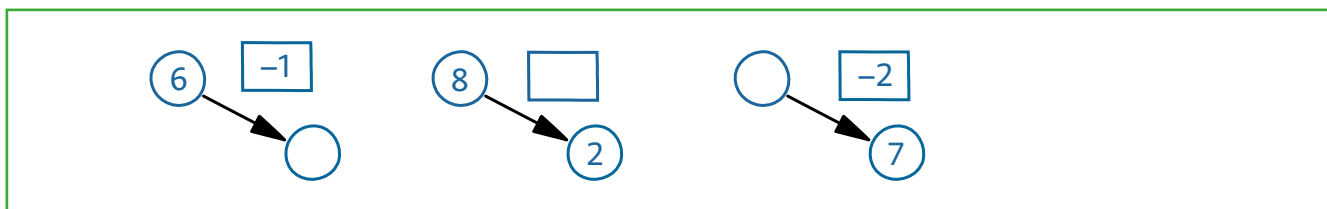
a) změna směru šipek



b) přechod přes desítku, s tím i související velikost čísel



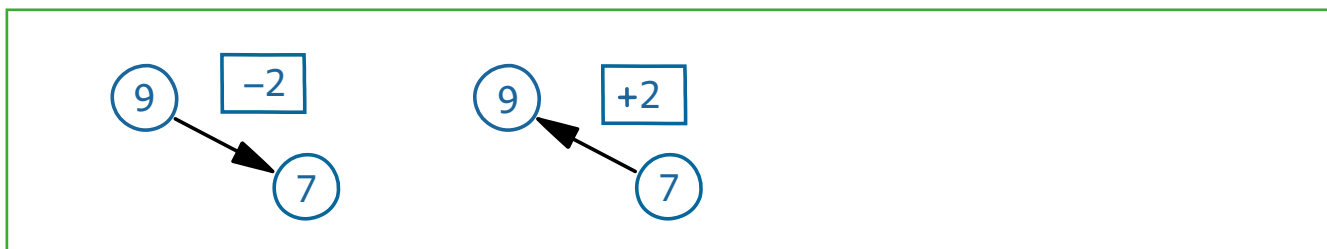
c) pozice neznámého čísla



Náročnější úlohy jde zase získat kombinováním uvedených gradačních parametrů, případně řetězením operací.

Odčítání je obecně pro žáky náročnější než sčítání. Dobré je s žáky diskutovat o vztahu obou operací nejen v hadech. Např. srovnání těchto hadů dobře ukazuje vzájemný vztah obou operací v hadech.

Úloha:

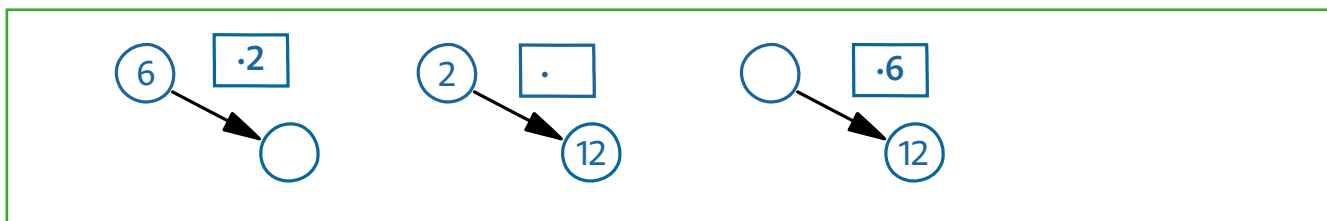


Operace násobení

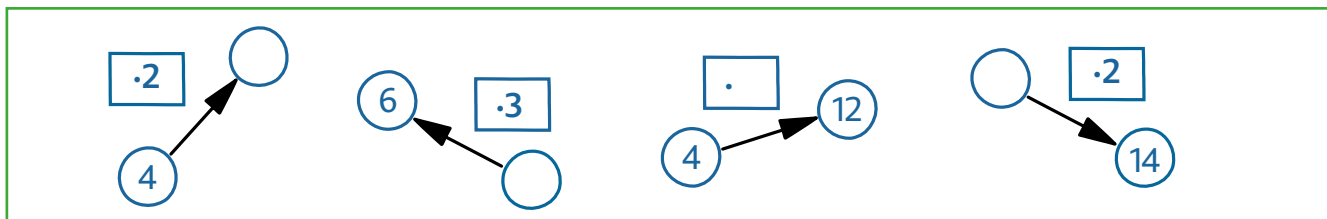
Ve 2. ročníku vstupuje i operace násobení. Gradační parametry zůstanou stejné jako u sčítání a odčítání. Při násobení se objevuje ještě jeden jev. Tím je znalost násobilky, resp. tzv. **majákové spoje**. Majákové spoje jsou spoje, které žák správně určí bez delšího počítání. Často se žákům na 1. stupni stává to, že např. výsledek úlohy $5 \cdot 7$ řeknou hned, ale u úlohy $6 \cdot 7$ nejprve použijí jimi dobře známý majákový spoj ($5 \cdot 7$) a k výsledku 7 přičtou. Učitel může sledovat, jaké spoje žáci umí a které ne. To mu umožňuje více frekvencovat „málo oblíbené spoje“. Dá se očekávat, že násobilka dvou bude patřit k nejjednodušším, ale nejde o pravidlo.

Gradační parametry lze tedy shrnout:

a) pozice neznámého čísla



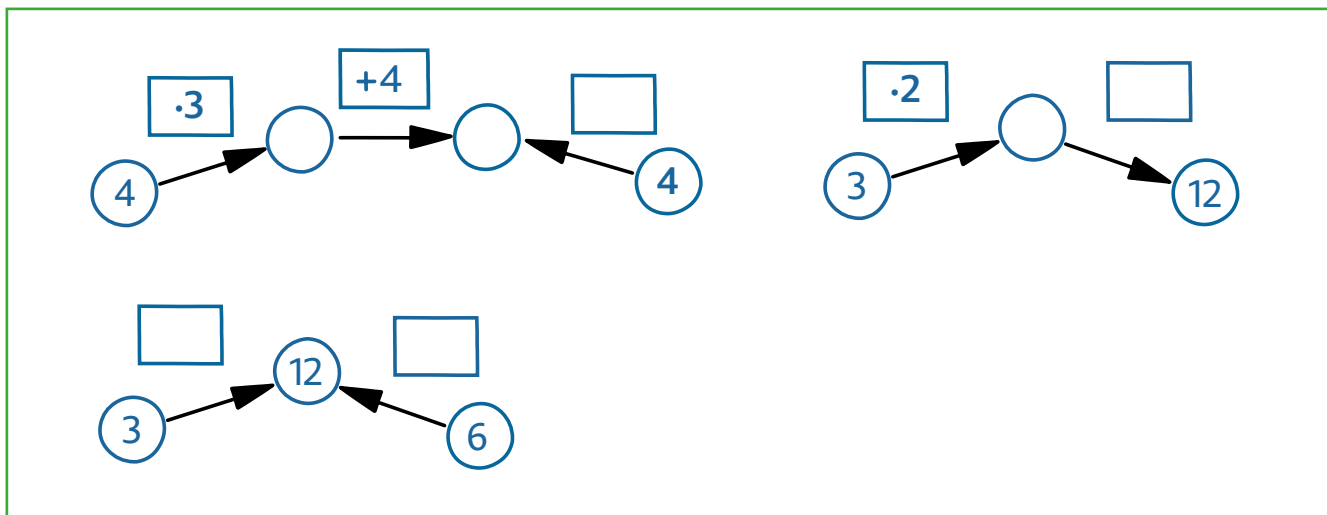
b) změna směru šipek a pozice neznámého čísla



c) řetězení operací (pozice neznámého čísla a směr šipek)

Stejně jako u sčítání a odčítání to pro nějaké žáky nebude náročnější, ale ti úlohy využijí jako nástroj pro mnohé počítání a posilování kalkulačních spojů. Navíc se v úlohách s řetězením operací objevují i možnosti vyřešit úlohy více způsoby. To platí pro všechny tři uvedené hady níže.

Úloha:



3. ročník

Operace dělení

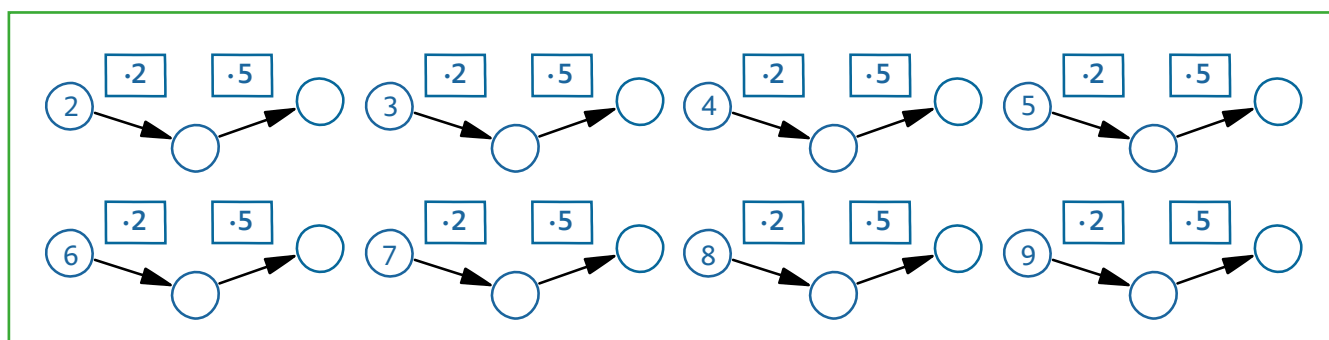
Ve 3. ročníku se objeví i operace dělení. Tam platí (stejně jako u podobnosti sčítání a odčítání) komentáře, které se objevily u operace násobení. Učitel může znovu zadat úlohy, které „útočí“ na vzájemný vztah obou operací.



Počítání s výhodou

Zajímavé úlohy jsou takové, které vedou žáky k zobecňování, k určitému **vhledu do úloh**. Takovými jsou i úlohy využívající tzv. počítání s výhodou. To lze popsat jako vyřešení úlohy „jednodušším“ způsobem. Když zadáme např. takovou sérii úloh,

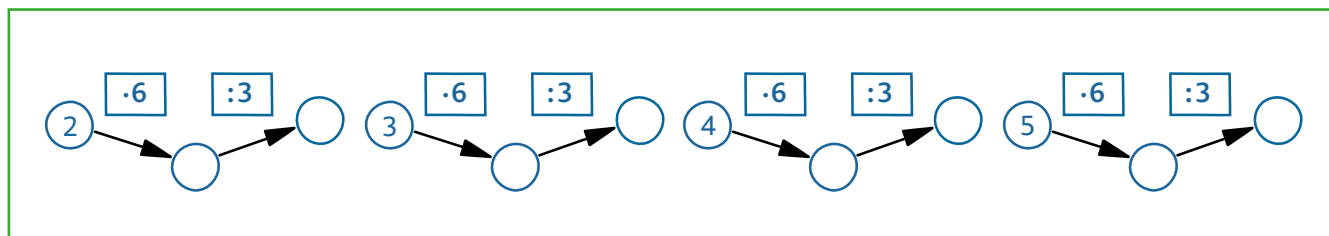
Úloha:



žáci postupem času zjišťují, že nemusí prostřední kolečko doplňovat a že stačí vždy vynásobit levé číslo v kolečku 10. Zjistí, že $\cdot 2 \cdot 5$ je totéž jako $\cdot 10$. Žák se tak učí dívat se na úlohy jako na celek (koncept) a může hledat onu zmiňovanou „jednodušší“ cestu řešení. U této série se navíc žáci učí, co se děje s číslem, které násobíme 10.

Podobně lze řešit úlohy s násobením $\cdot 2 \cdot 3$, $\cdot 3 \cdot 5$ apod. Nebo kombinovat operace násobení a dělení, např.

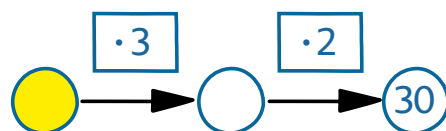
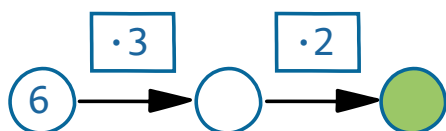
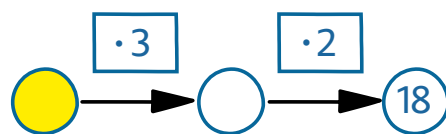
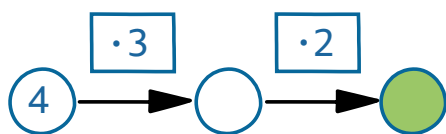
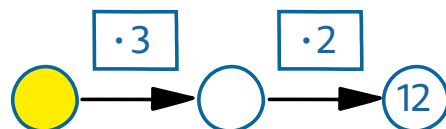
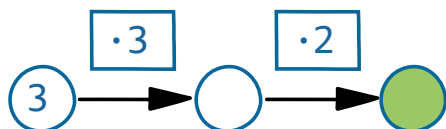
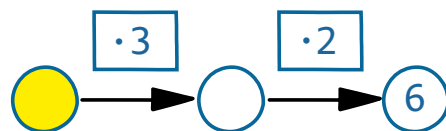
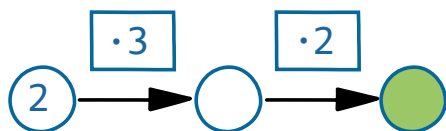
Úloha:



Proces x koncept

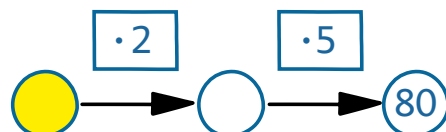
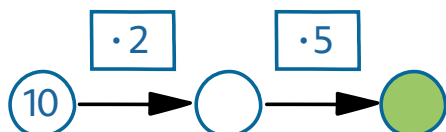
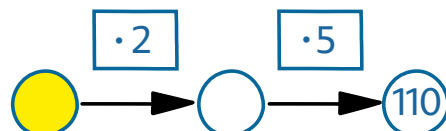
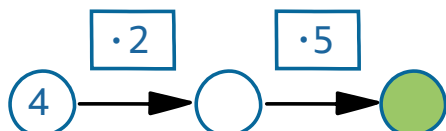
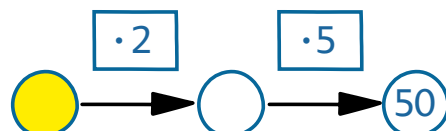
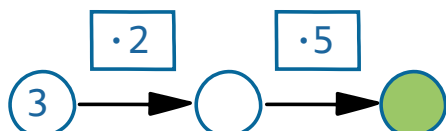
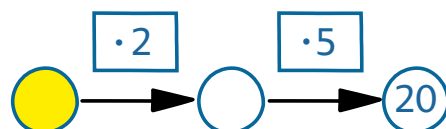
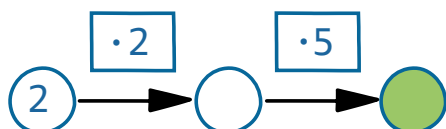
Úloha:

Doplň barevná pole.



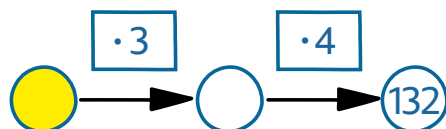
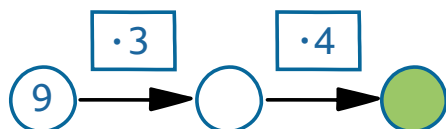
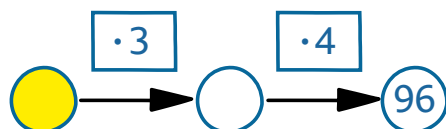
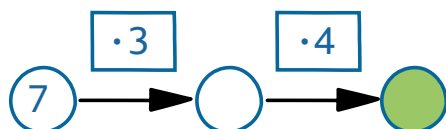
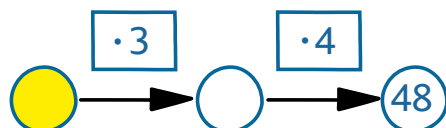
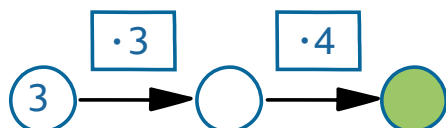
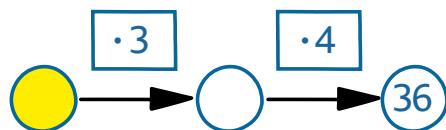
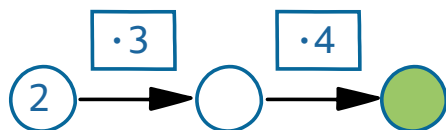
Úloha:

Doplň barevná pole.



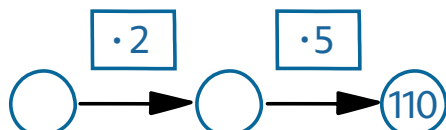
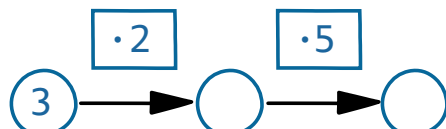
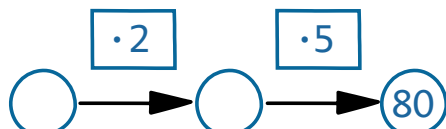
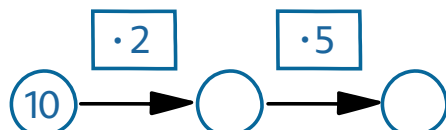
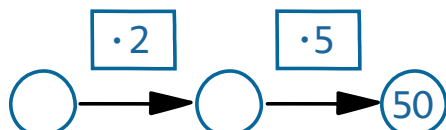
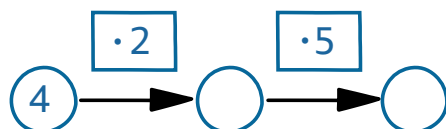
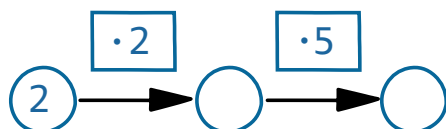
Úloha:

Doplň barevná pole.



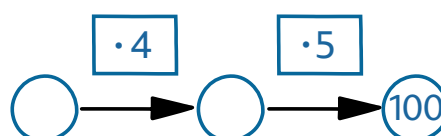
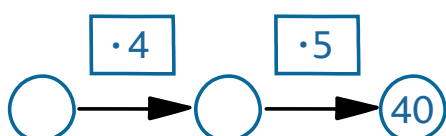
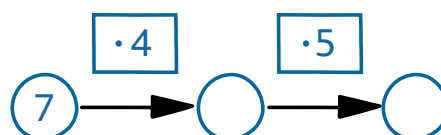
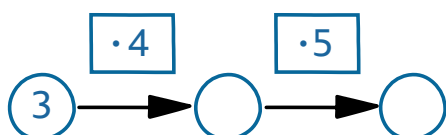
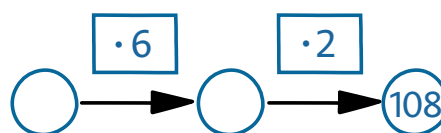
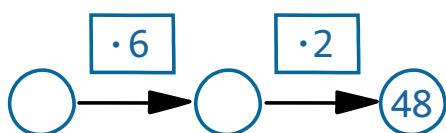
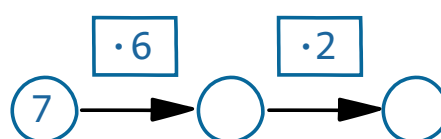
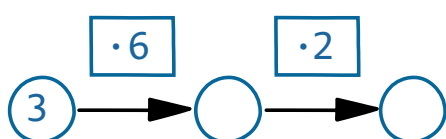
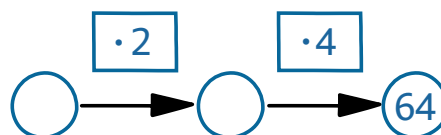
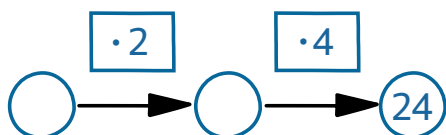
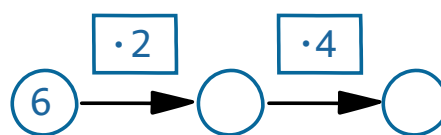
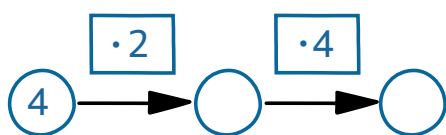
Úloha:

Přepiš hada tak, abys použil pouze jednu šipku.



K tomu, aby se žáci učili úlohu **zjednodušovat**, lze využít podobná zadání. Žáci jsou v této sérii úloh vyzváni, aby nahradili $\cdot 2 \cdot 5$ jednou operací $\cdot 10$.

Přepiš hada tak, abys použil pouze jednu šipku.

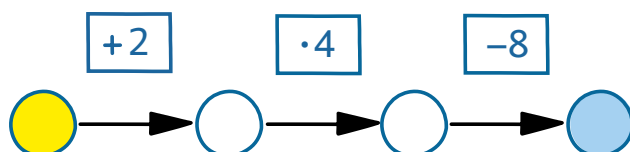


Hadi s kouzlem

Pro žáky bývají motivující úlohy s kouzly. Při snaze kouzlo odhalit žáci napočítají mnoho úloh. Často i odhalí, jak kouzlo funguje. Obvykle bývá náročné **dokázat, proč kouzlo funguje právě tím způsobem**. V úloze níže např. důkaz kouzla spadá do oblasti úprav výrazů čili na druhý stupeň. Přesto se i na 1. stupni objeví žáci, kteří jsou schopni princip kouzla popsat. Např. v následující úloze řeknou: „K neznámému číslu jsem přidal 2, to jsem vynásobil 4, takže jsem dostal čtyřikrát moje číslo a 8. Ale 8 jsem pak odečetl, takže v pravém kolečku zůstane čtyřikrát větší číslo než v levém kolečku.“

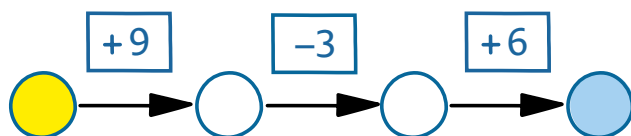
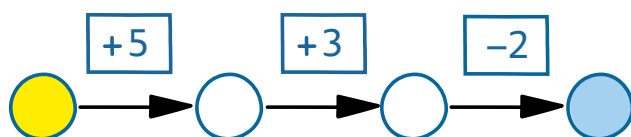
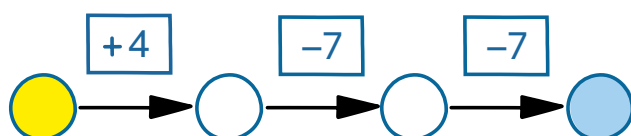
Úloha:

Když do žlutého pole dáš číslo, vyřešíš hada a řekneš mi číslo v modrém poli, rychle uhodnu, jaké číslo bylo v poli žlutém. Víš, jak to dělám?



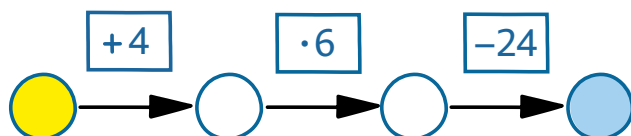
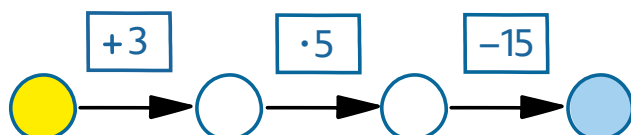
Úloha:

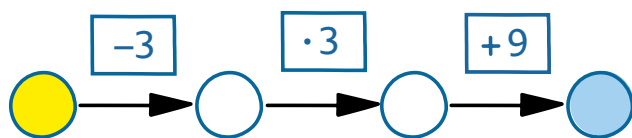
Když do žlutého pole dáš číslo, vyřešíš hada a řekneš mi číslo v modrém poli, rychle uhodnu, jaké číslo bylo v poli žlutém. Víš, jak to dělám?



V těchto úlohách se objevuje pouze sčítání a odčítání. Proto bude pro žáky pravděpodobně jednoduché kouzlo „rozlousknout“.

Úloha:



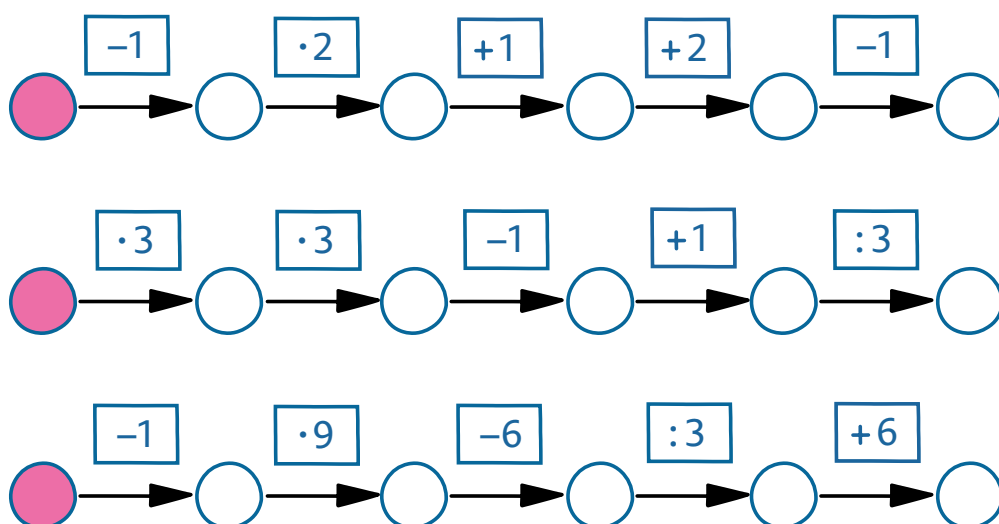


Nyní přidáme i operace násobení, případně lze i dělení. Tím se kouzlo může „zamotat“. Kouzla směřují k úpravám číselných výrazů, žáci objeví po pár pokusech vztah levého a pravého čísla hada.

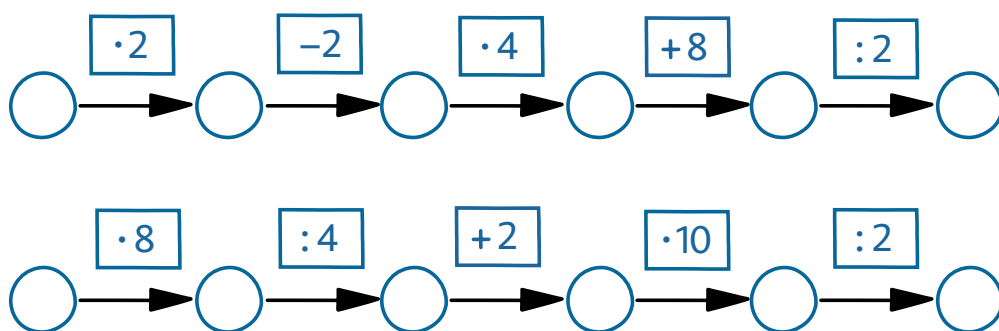
Podobných kouzel se dá vymyslet velké množství, uvádíme několik možností.

Úloha:

Vlož si do růžového pole číslo. Hada vypočítej.
Když mi řekneš, jaké číslo vyšlo na konci hada,
uhodnu rychle, jaké číslo sis dal do růžového pole.



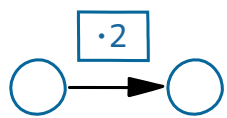
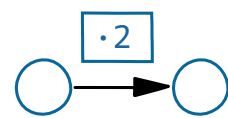
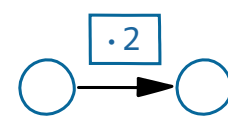
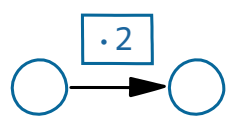
Úloha:

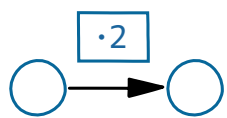
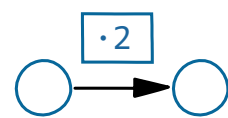
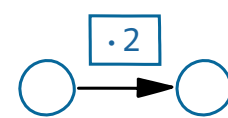
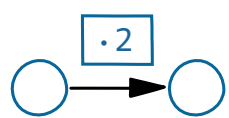


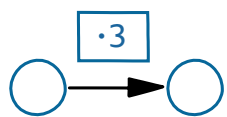
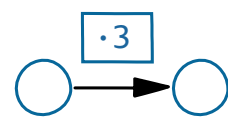
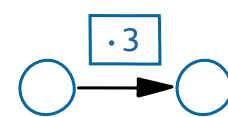
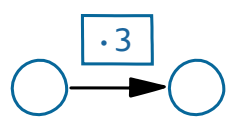
Ve 4. ročníku se objevují i úlohy s podmínkou, kde se vyskytují operace násobení, případně dělení. Ty žáci často řeší metodou pokusů. Znovu jde o zkušenosti, které žáci využijí na 2. stupni.

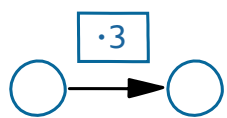
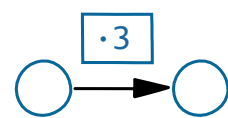
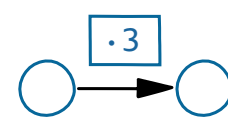
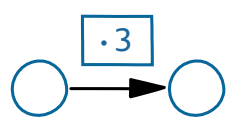
Hadi s podmínkou

Úloha:

			
$\bigcirc + \bigcirc = 12$	$\bigcirc + \bigcirc = 15$	$\bigcirc + \bigcirc = 18$	$\bigcirc + \bigcirc = 33$

			
$\bigcirc + \bigcirc = 42$	$\bigcirc + \bigcirc = 84$	$\bigcirc + \bigcirc = 96$	$\bigcirc + \bigcirc = 111$

			
$\bigcirc + \bigcirc = 12$	$\bigcirc + \bigcirc = 16$	$\bigcirc + \bigcirc = 20$	$\bigcirc + \bigcirc = 36$

			
$\bigcirc + \bigcirc = 52$	$\bigcirc + \bigcirc = 68$	$\bigcirc + \bigcirc = 92$	$\bigcirc + \bigcirc = 132$

Úlohy jsou často připraveny na nějaký **objev**. V horní sérii úloh žáci postupně zjišťují, že součet čísel z podmínky je třeba dělit třemi (vyjde levé číslo hada), v druhé sérii dělí 4.

4.-5. ročník

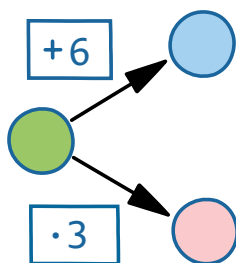
Otevření hadi

Otevření hadi nebo také dvojhadi jsou přípravným prostředím k prostředí Šipkové grafy. V otevřených hadech se klade **velký důraz na práci s tabulkou**, díky ní žáci postupně pronikají do vztahů a zákonitostí lineárních závislostí.

Než žáci získají zkušenost s otevřenými hady, kde je spojení hada a tabulky, můžeme napřed nabídnout úlohu, kde se objeví pouze had a zadání: Doplň do zeleného pole postupně čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6. Pak můžeme sledovat, zda některý žák přijde s návrhem tabulky.

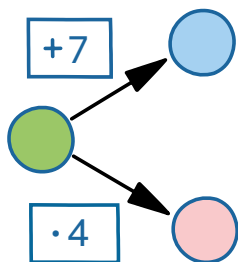
Úloha:

Doplň do zeleného pole postupně čísla: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Vyřeš.



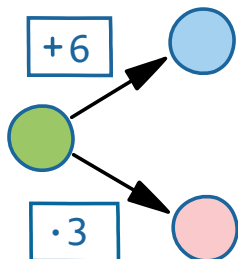
Úloha:

Doplň do zeleného pole postupně čísla: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Vyřeš.



Úloha:

Doplň tabulku pro modro-růžového dvojhada.

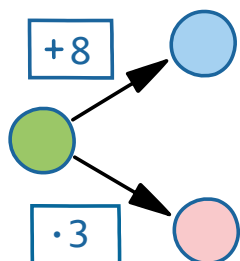


z	1	2	3	4	5	6
m						
r						

Tabulka je silný nástroj na zjišťování vztahů a zákonitostí nejen mezi čísly. Zde si žáci po několika zkušenostech se záznamem čísel do tabulky začnou všimnout rozdílů obou výstupních polí. Tomu se brzy pomůže ještě zavedením řádku, který bude evidovat rozdíl mezi oběma čísly.

Úloha:

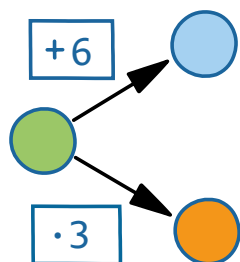
Doplň tabulku pro modro-růžového dvojhada.



z	1	2	3	4	5	6
m						
r						

Úloha:

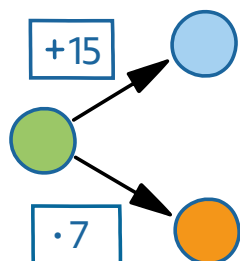
Doplň tabulku pro modro-oranžového dvojhada.



z	1	2	3	4	5	6	7	8
m								
o								
m-o								

Úloha:

Doplň tabulku pro modro-oranžového dvojhada.

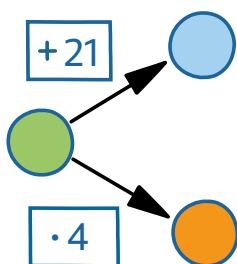


z			3					
m	16				20		15	
o		14		28		42		70
m-o								

Náročnost úloh se zvyšuje. Žáci zde nemají vždy zadáné vstupní zelené číslo, ale ani čísla výstupní.

Úloha:

Doplň tabulku.



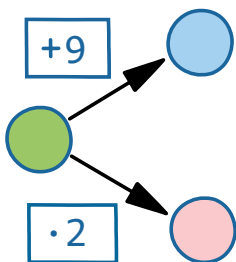
z	3							
m		20						
o							41	
m-o			0	-6	-9	-12		-129

Tady může učitel sledovat, zda žáci doplňují tabulku metodou pokusů, nebo již používají nějaké objevené vztahy, pravidelnosti: např. zjistí, že rozdíl v prvních dvou sloupcích je 12 a 6, čísla v zeleném poli budou 3 a 5. To již může vést k hypotéze, ověření a rychlejšímu doplňování tabulky.

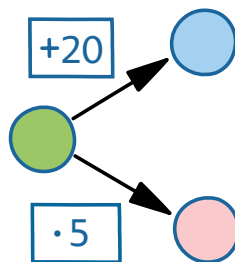
Úloha:

Jaké číslo musíme dát do zeleného pole, aby modré a růžové číslo bylo stejné?

a)



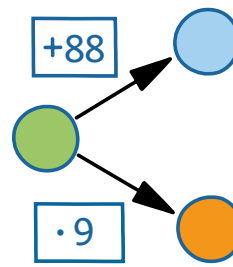
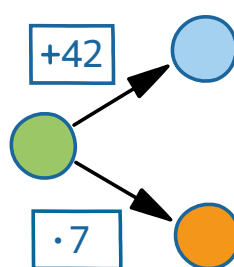
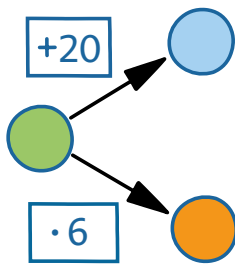
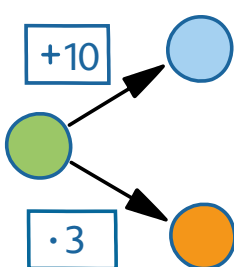
b)



Podmínkou o stejnosti čísel se připravuje prostředí Šipkové grafy. O tom zde ale psát nebudeme. Žáci při záznamu do tabulky zjistí, že hledáme výstupní čísla tak, aby jejich rozdíl byl nulový.

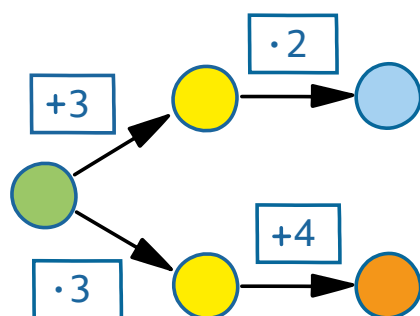
Úloha:

Jaké číslo musíme dát do zeleného pole, aby modré a oranžové číslo bylo stejné?



Úloha:

Doplň tabulku.

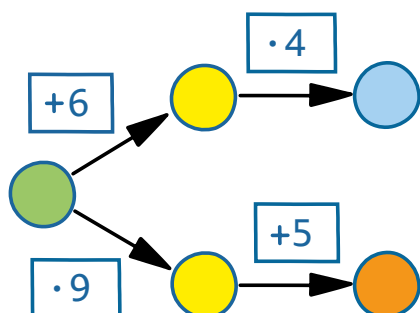


z				3			20	
m	6				16			40
o		7	10			34		
m-o								

Náročnost úloh pochopitelně stoupá se složitějšími hady. Zde se vyskytují dvě operace v každé části otevřeného hada. To jsou dobré výzvy pro žáky, často je baví i tvorba vlastních úloh.

Úloha:

Doplň tabulku.



z								
m	24				44			
o			23				95	
m-o		14		4		16		-81

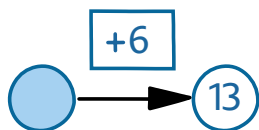
Přepis rovnice do hada

Žáci se postupně učí přepisovat úlohy z prostředí Hadi do rovnic a naopak. Zároveň pak přepisují do rovnic i úlohy z jiných prostředí (Váhy, Šipkové grafy, Krokování, Schody, ...). To jim umožňuje porozumět rovnicím skrze různá prostředí a také přecházet mezi jednotlivými prostředími pomocí klasických rovnic. Než žáci opustí matematická prostředí a rovnice budou řešit bez jejich použití, jsou tato prostředí důležitou pomůckou pro porozumění jevům, které jsou pro řešení rovnic klíčové (ekvivalentní úpravy rovnic, strategie řešení rovnic).

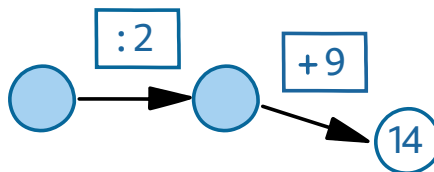
Úloha:

Úlohy s hady přepiš do číselně zapsaných rovnic. Vyřeš.

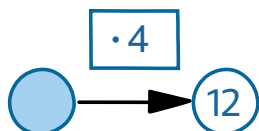
a)



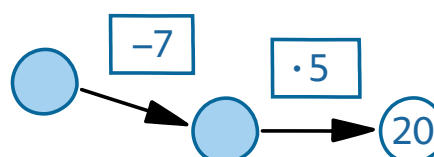
c)



b)



d)



Úloha:

Přepiš rovnice do hada.

$$5 + 2 = x$$

$$4 + x = 7$$

$$x + 3 = 9$$

$$24 - 13 = x$$

$$28 - x = 21$$

$$x - 13 = 219$$

$$2x = 6$$

$$2x + 5 = 13$$

$$4x - 10 = 22$$

$$4 + 2x = 6$$

$$7 + 3x = 19$$

$$(x - 3) \cdot 2 = 8$$

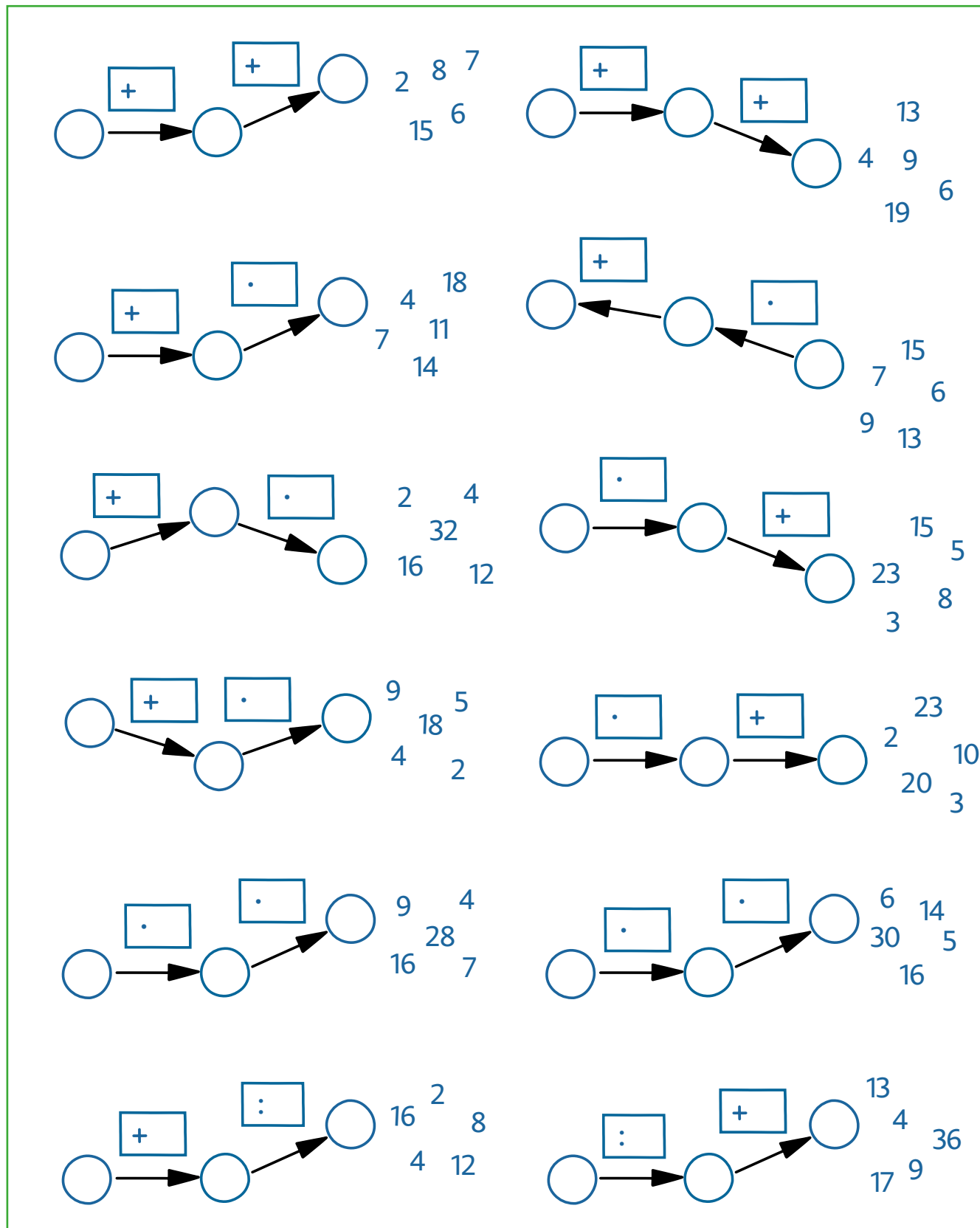
$$x \cdot 3 - 4 = 14$$

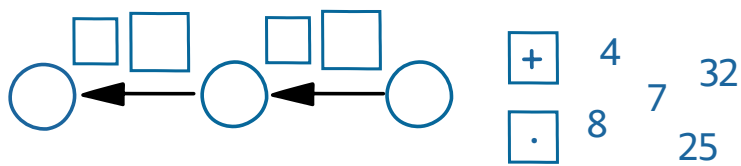
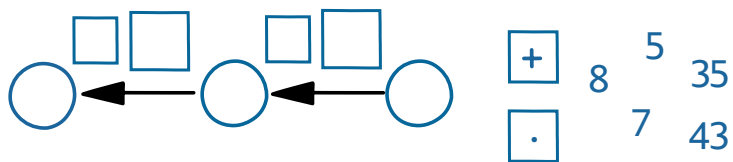
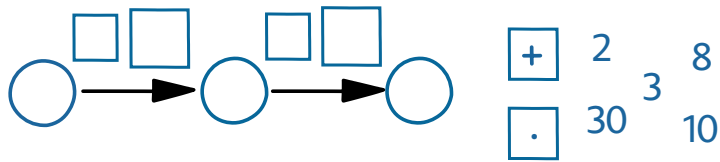
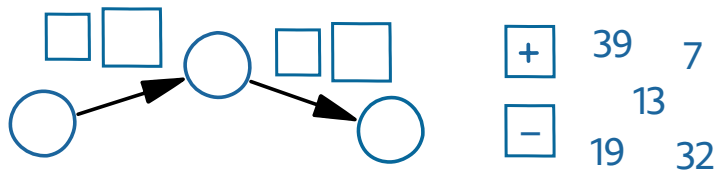
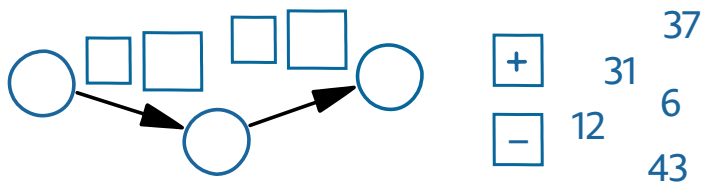
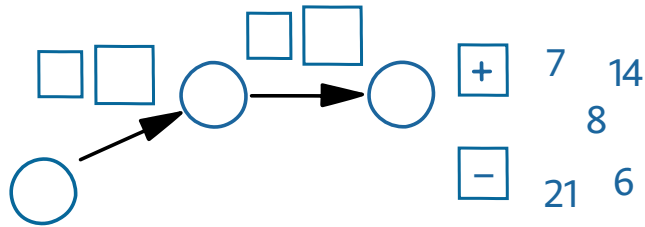
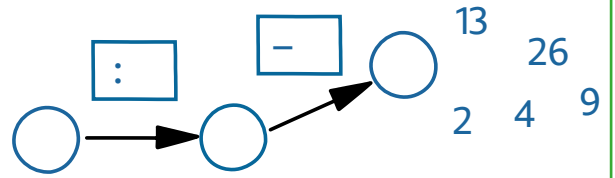
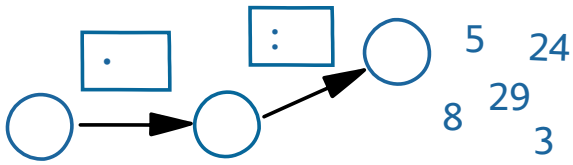
Je důležité, aby se žáci naučili přepis oběma směry – z prostředí do rovnice a naopak.

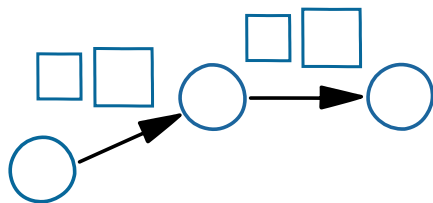
Neposedové

Úlohy s neposedy jsou dobrými výzvami pro žáky. Žáci se snaží „opravit“ strukturu úlohy, která je poškozena. Často v nich dochází ke kombinatorickým situacím, které např. vychází z komutativity sčítání. Např. ve druhé úloze lze doplnit na začátku řada $9 + 4$ nebo také $4 + 9$.

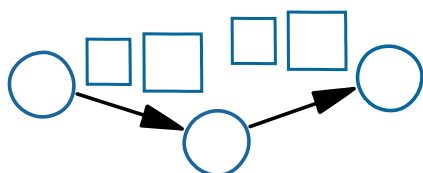
Úloha:



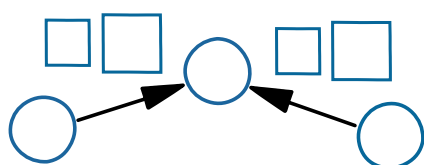




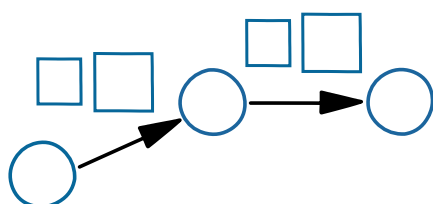
$$\begin{array}{r} \boxed{-} \quad 7 \quad 9 \\ \boxed{\cdot} \quad 4 \quad 16 \quad 28 \end{array}$$



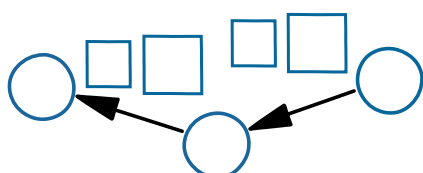
$$\begin{array}{r} \boxed{-} \quad 8 \quad 14 \\ \boxed{\cdot} \quad 6 \quad 48 \quad 34 \end{array}$$



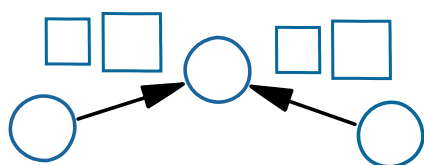
$$\begin{array}{r} \boxed{-} \quad 9 \quad 7 \quad 3 \\ \boxed{\cdot} \quad 27 \quad 34 \end{array}$$



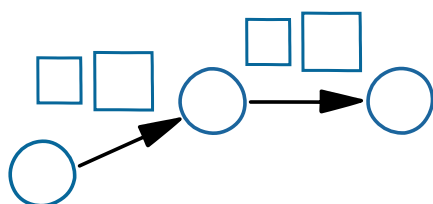
$$\begin{array}{r} \boxed{+} \quad 12 \quad 7 \\ \boxed{:} \quad 4 \quad 19 \quad 28 \end{array}$$



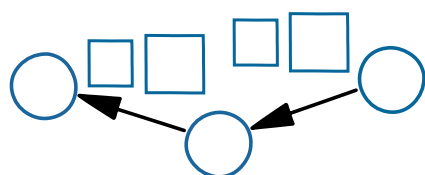
$$\begin{array}{r} \boxed{+} \quad 6 \quad 30 \quad 9 \\ \boxed{:} \quad 4 \quad 36 \end{array}$$



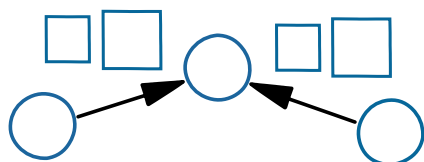
$$\begin{array}{r} \boxed{+} \quad 2 \quad 8 \\ \boxed{:} \quad 4 \quad 6 \quad 32 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} \boxed{-} \quad 56 \quad 8 \quad 65 \\ \boxed{:} \quad 9 \quad 7 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} \boxed{-} \quad 8 \quad 12 \\ \boxed{:} \quad 3 \quad 36 \end{array}$$



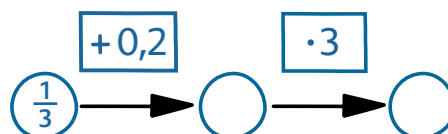
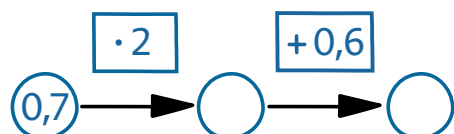
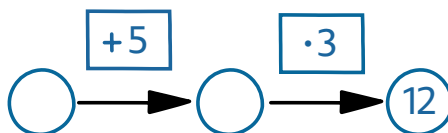
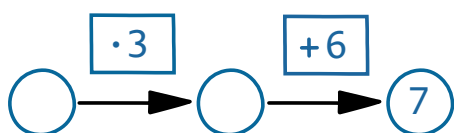
$$\begin{array}{r} \boxed{-} \quad 6 \quad 7 \quad 8 \\ \boxed{:} \quad 42 \quad 14 \end{array}$$

Rozšiřování číselných oborů (zlomky, desetinná čísla, záporná čísla)

Již v předchozím textu se objevila úloha, kterou žáci museli řešit s použitím půlek (např. 2,5). Použití jiného číselného oboru je samozřejmě také gradačním parametrem.

Např. v sérii následujících úloh se v prvním hadu objeví zlomek (coby počáteční stav), ve druhé úloze záporné číslo (opět jako počáteční stav), ve třetí úloze se objevují desetinná čísla coby stav i operátor a konečně ve čtvrté úloze dokonce kombinace zlomků a desetinných čísel. Hadi se tedy dají využívat pro počítání s dalšími číselnými obory (racionální čísla zejména). S těmi pracují žáci v 5. ročníku (a poté především na 2. stupni) a učitel si na podobných úlohách může ověřovat, zda žáci operace s takovými čísly zvládají.

Úloha:



MYSLÍM SI ČÍSLO

Prostředí Myslím si číslo je **strukturální** prostředí. To znamená, že čísla, která se v úlohách vyskytují, nemají přímou vazbu na objekty reálného světa (na rozdíl například od slovních úloh, kde čísla reprezentují reálné objekty, jejich počet nebo třeba veličiny). Žáci zde pracují s čísly jako s abstraktní strukturou: Myslím si číslo. Když od jeho dvojnásobku odečtu 3, dostanu 9. Které číslo si myslím?

Nicméně než začnou řešit tento typ úloh, řeší celý 1. ročník a část 2. ročníku úlohy **sémantické**, kde neznámé číslo není v abstraktní roli, ale zastupuje objekty reálného světa (například fazole, jahody atd.): V levé ruce mám tři jahody a dohromady mám pět jahod. Kolik jahod mám v pravé ruce?

Získávají zde také základní zkušenosti s vnímáním **neznámé**, která se v matematice běžně značí písmenem – např. x v rovnici $x + 3 = 5$. Stejnou rovnici můžeme v prostředí Myslím si číslo formulovat takto: „Myslím si číslo. Když k němu přičtu 3, dostanu 5. Které číslo si myslím?“ Taková formulace je pro mladší žáky mnohem přirozenější a jednodušší než rovnice, ke kterým se dopracují časem.

Dalším cílem prostředí je také budování a vylepšování řešitelských strategií. Zpočátku bývá nejčastější strategií metoda pokusů – žák dosadí číslo, a když řešení nevyjde, zkusí svůj pokus přiblížit podle toho, jak moc se špatný výsledek liší. Většinou však netrvá dlouho, aby se ve třídě objevila efektivní strategie řešení odzadu. Výše zmíněnou úlohu tak žáci řeší: Výsledek je 5. Proto od 5 odečtu 3 a výsledek je 2. To je myšlené číslo. Nicméně efektivních strategií pro řešení různých typů je mnoho a pro různé úlohy mohou být vhodné různé postupy.

V neposlední řadě skýtá prostředí také příležitost k mnohému počítání, které žáci nemusí pociťovat jako nudu. Často si neuvědomí, kolik dílčích početních úloh vyřeší, než se jim podaří dopracovat se ke správnému výsledku. Díky tomu dochází u žáků k automatizaci kalkulačních spojů.

Tak jako u jiných prostředí můžeme i zde různými parametry ovlivňovat obtížnost úloh (tzv. gradační parametry). Jednotlivé parametry uvedeme.

1. ročník

Předměty pod miskou

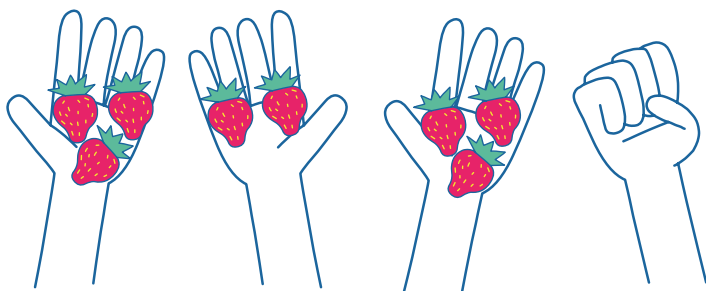
V tomto případě se jedná vlastně o slovní úlohy, které mohou být někdy znázorněny obrázkem. V takovém případě se nejedná o strukturální, ale o sémantické úlohy, protože žáci počítají s konkrétními předměty. Pro žáky 1. ročníku jsou takové úlohy díky tomuto kontextu jednodušší na představu a vyřešení. Můžeme je chápat jako důležitý předstupeň ke strukturálním úlohám o Myšleném čísle, které přijdou později.

Gradační parametry:

1. Pozice neznámého čísla
2. Zlomky v zadání úlohy
3. Způsob zadání úlohy (obrázek, slovně)
4. Zadání úlohy s negací

Pozice neznámého čísla

Parametr pozice neznámého čísla hraje často při řešení úlohy významnou roli. Z praxe víme, že úloha „**V levé ruce mám tři jahody a v pravé dvě jahody. Kolik jahod mám celkem?**“ bývá pro žáky jednodušší než úloha „**V levé ruce mám tři jahody a dohromady mám pět jahod. Kolik jahod mám v pravé ruce?**“.



V první úloze totiž žák sčítá (dává dohromady), ale ve druhé úloze musí žák odčítat nebo dopočítávat (což bývá v 1. ročníku častější způsob než odčítání).

Podívejme se na jinou dvojici úloh:

„**V levé ruce mám tři jahody a dohromady mám pět jahod. Kolik jahod mám v pravé ruce?**“ a

„**V pravé ruce mám tři jahody a dohromady mám pět jahod. Kolik jahod mám v levé ruce?**“

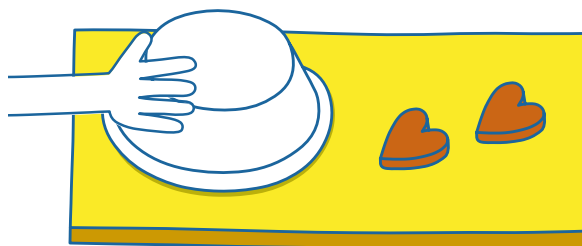
Pokud ji zadáme takto slovně (v 1. ročníku ji může učitel zadat ústně), zjistíme, že v tom příliš velký rozdíl nebude. Naopak pokud zadáme stejnou situaci žákům obrázkem, může se ukázat, že první úloha bude pro žáky jednodušší než druhá:

Úloha:

Na stole je celkem 6 jahod.
Kolik jich je pod miskou?



Na stole jsou 4 perníčky.
Kolik jich je pod miskou?

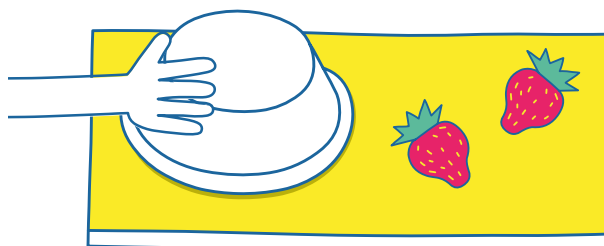


Úloha:

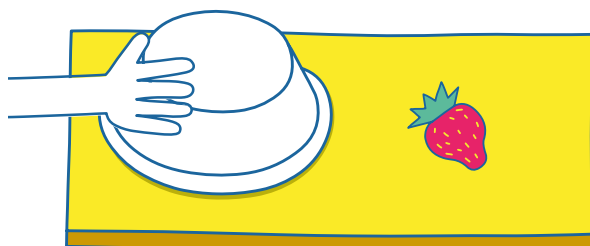
Na stole je celkem 5 jahod.
Kolik jich je pod miskou?



Na stole je celkem 5 jahod.
Kolik jich je pod miskou?



Na stole jsou 4 jahody.
Kolik jich je pod miskou?



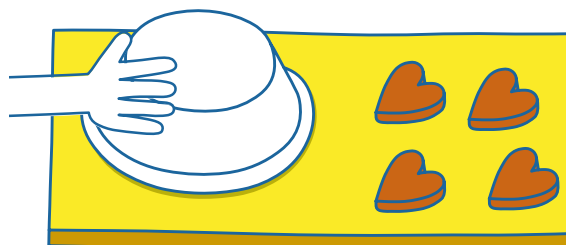
Na stole jsou 4 jahody.
Kolik jich je pod miskou?



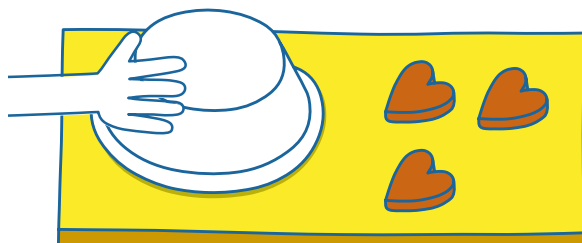
Na stole je celkem 9 perníčků.
Kolik jich je pod miskou?



Na stole je celkem 9 perníčků.
Kolik jich je pod miskou?



Na stole je celkem 10 perníčků.
Kolik jich je pod miskou?



Na stole je celkem 10 perníčků.
Kolik jich je pod miskou?



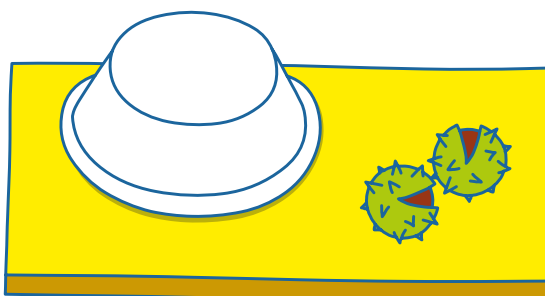
Je tomu tak proto, že když učitel žákům text předloží písemně nebo ústně, všechny informace přicházejí ve stejném pořadí bez ohledu na pravou nebo levou ruku. Nejdřív se žáci dozvědí počet známých jahod v jedné ruce, pak počet všech jahod v obou rukách a nakonec zazní otázka na počet jahod v druhé ruce. Naproti tomu obrázkové zadání „čtou“ žáci nejčastěji zleva doprava. Ve druhé úloze proto může být pro některé žáky mentální překážkou skutečnost, že jako první informace, kterou z obrázku vyčtou, je neznámý počet pod miskou. Naproti tomu u levého obrázku zjistí jako první informaci známý počet dvou jahod.

Zlomky v zadání úlohy

Parametrem, kterým měníme obtížnost v následující sérii úloh, je zlomek. S polovinou mají žáci často běžnou životní zkušenost, když vědí, že rozpůlit znamená spravedlivě rozdělit na dvě části. S pojmy jako třetina a čtvrtina již žáci v 1. ročníku životní zkušenost mít nemusí, proto je potřeba porozumění těmto slovům budovat přes různé činnosti (např. skládání papíru a provázku, dělení předmětů atd.). Pokud žáci ještě představu o zlomcích nemají, může se stát, že si např. třetinu vykládají jako tři kaštiny (tedy nerozlišují zlomek a počet) nebo pro ně dělení na třetinu může znamenat rozdělit na tři různě velké části.

Úloha:

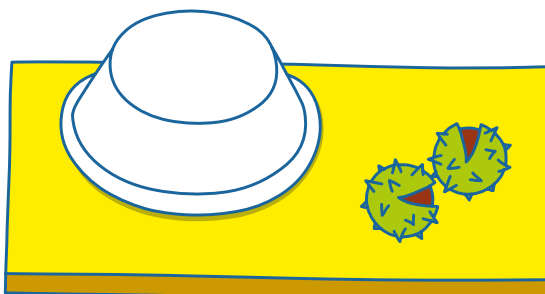
Polovinu kaštanů vidíme.
Kolik kaštanů nevidíme?



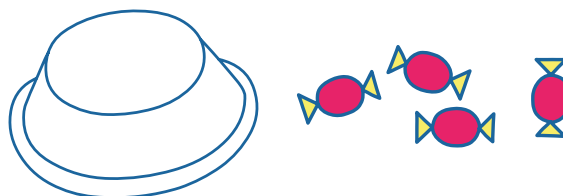
Polovinu bonbónů vidíme.
Kolik bonbónů nevidíme?



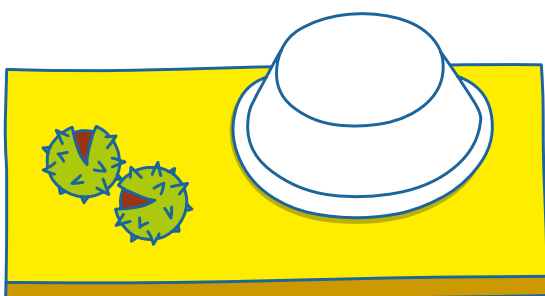
Třetinu kaštanů vidíme.
Kolik kaštanů nevidíme?



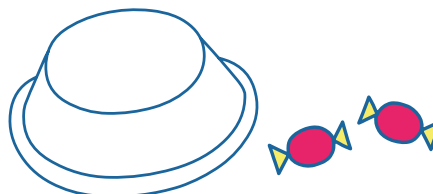
Třetinu bonbónů vidíme.
Kolik bonbónů nevidíme?



Čtvrtinu kaštanů vidíme.
Kolik kaštanů nevidíme?



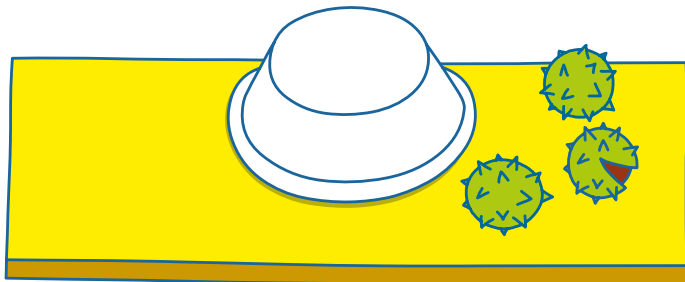
Čtvrtinu bonbónů vidíme.
Kolik bonbónů nevidíme?



Způsob zadání úlohy (obrázek, slovně)

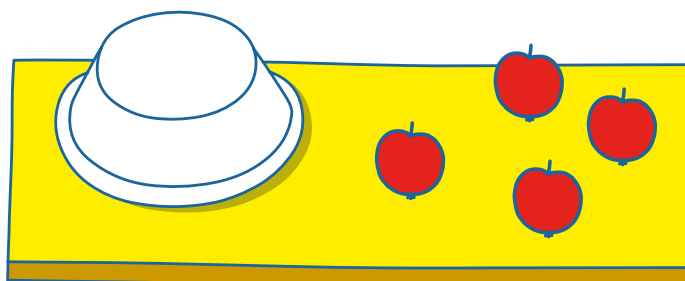
Úloha:

Na stole je 8 kaštanů. Vidíme 3 kaštiny. Kolik kaštanů je pod miskou?



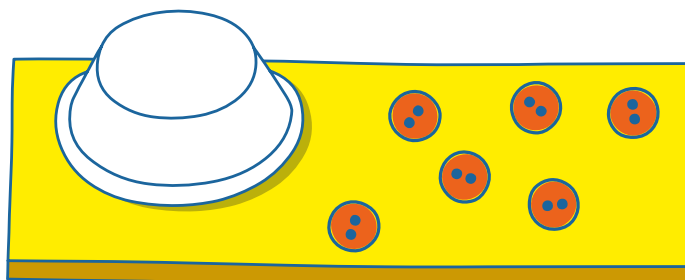
Úloha:

Na stole je 7 jablek. Vidíme 4 jablka. Kolik jablek je pod miskou?



Úloha:

Na stole je 10 knoflíků. Vidíme 6 knoflíků. Kolik knoflíků je pod miskou?



Slovní úlohy tohoto druhu lze žákům zadat buď s oporou o obrázek, nebo bez obrázku. První možnost pro ně bývá lehčí. Zejména pro žáky 1. ročníku, kteří si teprve čtenářství osvojují a vizualizace je pro ně silnou oporou. Pokud zadáme úlohu bez obrázku pouze slovně, můžeme dále volit zadání napsané na papíru, které si žáci sami přečtou (pokud to již dovedou). Nebo můžeme slovní zadání žákům nadiktovat. Žáci si často v takovém případě sami obrázek dokreslí, pokud ho potřebují. Další častou možností je, že si situaci modelují například pomocí víček či krychlí. Proto je důležité, aby měli tyto předměty vždy k dispozici. Obecně tedy bývá zadání bez obrázku pro žáky náročnější, protože si situaci musí představit nebo vizualizovat sami.

Zadání úlohy s negací

Úloha:

Na stole je 9 kaštanů. Vidíme 3 kaštany. Kolik jich je pod miskou?

Na stole je 9 kaštanů. Nevidíme 3 kaštany, které jsou schované pod miskou. Kolik jich vidíme?

Úloha:

Na stole je 7 kaštanů. Vidíme 5 kaštanů. Kolik kaštanů je pod miskou?

Na stole je 7 kaštanů. Pod miskou není 5 kaštanů.
Kolik kaštanů je pod miskou?

Úloha:

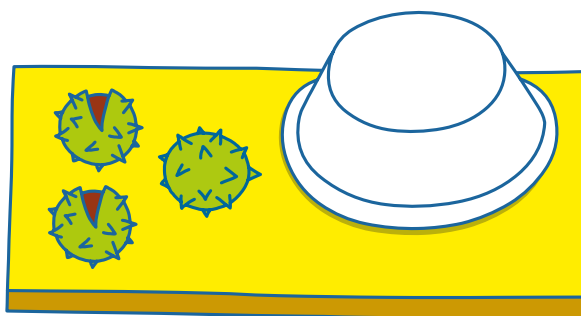
Na stole je 10 kaštanů. Vidíme 4 kaštany.
Kolik kaštanů je pod miskou?

Na stole je 10 kaštanů. Pod miskou nejsou 4 kaštany.
Kolik kaštanů je pod miskou?

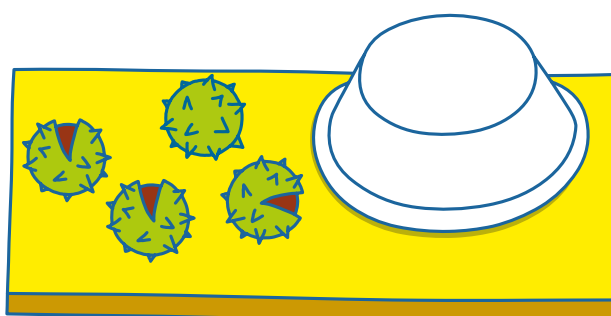
Přítomnost negace v zadání slovní úlohy bývá často pro žáky značně komplikující. Běžně se stává, že žáci v takových případech odpovídají na něco jiného, než se požaduje v zadání úlohy. Pokud je úloha pro žáky složitá, může ji učitel žákům vizualizovat obrázkem nebo přímo manipulací s předměty – manipulací mohou žáci řešit úlohu i sami. Žáci si mohou všimnout, že jednotlivé dvojice úloh vždy popisují stejnou situaci, pouze jinými slovy. První úloha je jednodušší, protože popisuje situaci přímo a říká nám, kolik kaštanů vidíme. Druhá úloha nám také sděluje, kolik kaštanů vidíme, ale neříká to přímo. Stejná informace je zde vyjádřená negací a žáci si musí uvědomit, že počet kaštanů, který není pod miskou, vidíme. Pokud jsou tyto úlohy pro žáky obtížné, lze postupovat i jiným způsobem, který ukážeme na této trojici úloh:

Přiřaď slovní úlohu ke správnému obrázku:

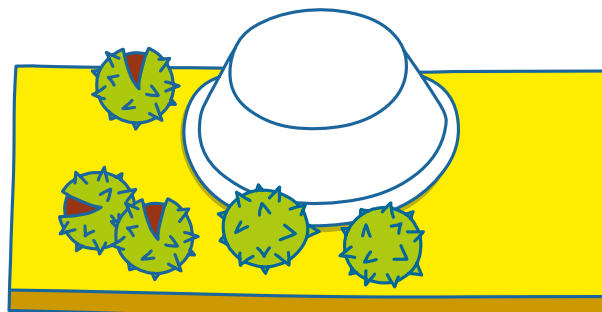
Na stole je 10 kaštanů.
Pod miskou nejsou 4 kaštany.
Kolik kaštanů je pod miskou?



Na stole je 7 kaštanů.
Pod miskou není 5 kaštanů.
Kolik kaštanů je pod miskou?



Na stole je 9 kaštanů.
Pod miskou nejsou 3 kaštany.
Kolik kaštanů je pod miskou?

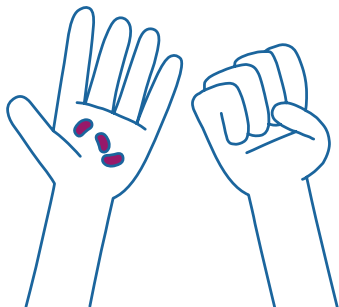


Úkolem žáků je přiřadit slovní úlohu k situaci zadané obrázkem. To jim má usnadnit porozumění úloze, kterou pak následně vyřeší.

Kouzla

Úlohy s matematickými kouzly se vyskytují v mnoha různých prostředích. Kouzlo v tomto případě představuje nějaký matematický algoritmus, který učitel zná, a úkolem žáků je odhalit, jak funguje. Přidaná hodnota těchto úloh spočívá v tom, že úloha je motivačně zaobalena tajemstvím právě do podoby kouzla. Může se stát, že žáci v jedné hodině princip kouzla neodhalí. V takovém případě nechá učitel kouzlo na viditelném místě ve třídě (např. na nástěnce nebo na tabuli) a nechá žákům čas k experimentování. V prostředí Myslím si číslo začínáme v učebnicích kouzlit touto úlohou.

Žák má v obou rukách dohromady 10 fazolí. Kouzelník říká: „Ukaž mi jednu ruku a já ti řeknu, kolik fazolí máš v druhé ruce.“



O kouzlo se jedná proto, že žák 1. ročníku zpravidla ještě nemá ukotvené numerické spoje. Proto se mu zdá kouzelné, že učitel dokáže velmi rychle říct správný počet fazolí v druhé ruce. Samozřejmě že například pro žáka 5. ročníku už se o kouzlo jednat nebude, protože se pro něj nejedná o přiměřeně obtížnou výzvu. Žáky, kteří kouzlo rychle odhalí a jsou v počítání rychlí, může nechat učitel vymyslet vlastní početní kouzla, která pak předvedou svým spolužákům.

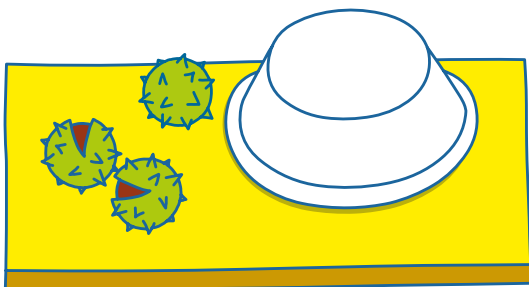
2. ročník

Předměty pod miskou

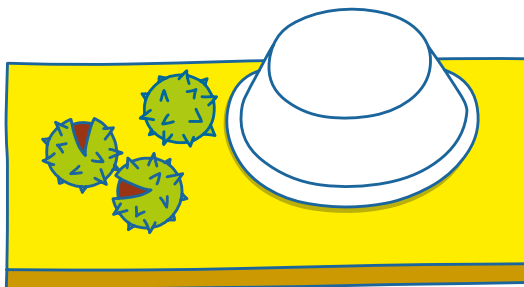
V této sérii úloh nepopisujeme nový gradační parametr, ale kombinaci dvou parametrů, které žáci znají z 1. ročníku – negaci (vidíme X nevidíme) a přítomnost zlomků v zadání úlohy. Kombinování více parametrů samozřejmě výrazně ovlivňuje obtížnost úloh. Obtížnost jednotlivých zadání úloh lze ovlivňovat počtem kaštanů nebo jiným zlomkem.

Úloha:

Vidíme polovinu kaštanů,
kolik jich je pod miskou?

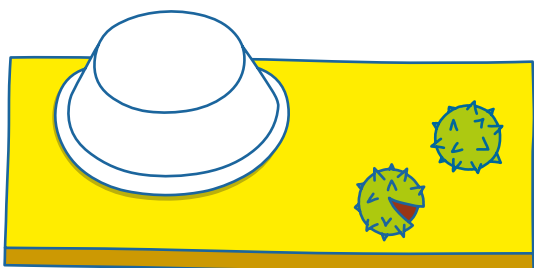


Nevidíme polovinu kaštanů,
kolik jich je pod miskou?

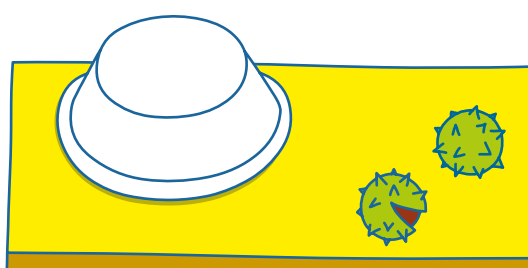


Úloha:

Vidíme třetinu kaštanů,
kolik jich je pod miskou?

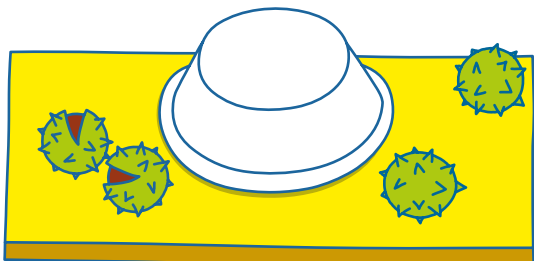


Nevidíme třetinu kaštanů,
kolik jich je pod miskou?

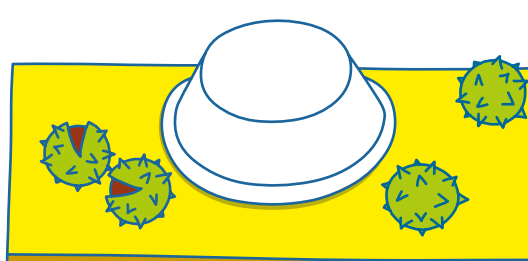


Úloha:

Vidíme čtvrtinu kaštanů,
kolik jich je pod miskou?



Nevidíme čtvrtinu kaštanů,
kolik jich je pod miskou?



Myslím si číslo

Ve 2. ročníku navazují na sémantické úlohy o předmětech pod miskou úlohy strukturální. To platí o všech následujících úlohách až do 5. ročníku. V těchto úlohách se vyskytnou čísla ve dvou významech – **stav** a **operátor**. Popíšeme je na konkrétní úloze: Myslím si číslo. Když k němu přičtu 3, dostanu 7. Které číslo si myslím? Tuto úlohu lze matematicky zapsat $___ + 3 = 7$, případně můžeme k označení neznámé použít i jiný symbol, například $? + 3 = 7$, nebo v jazyce algebry za použití písmen dostáváme například $x + 3 = 7$. V úloze se vyskytuje hledané číslo (4) na pozici **výchozího neznámého stavu**. Číslo, které je nositelem nějaké matematické operace (zde přičítání), je **operátor** – zde je to tedy číslo 3. Číslo 7 je zde tentokrát **konečný známý stav**.

Uvedeme jednu okolnost, která může obecně činit úlohy z prostředí Myslím si číslo pro žáky obtížnými. Ve všech úlohách je přítomný princip tzv. **antisignálu**. Ukážeme si ho na konkrétní úloze: Dvojnásobek myšleného čísla je 16. Které číslo si myslím? V zadání úlohy je přítomné signální slovo **dvojnásobek**. To v žácích může vyvolat automatické spojení s operací „vynásobit dvěma“, takže jejich chybné řešení je $16 \cdot 2 = 32$, tedy myšlené číslo je 32. Příčina chyby tkví v tom, že se žák orientoval pouze povrchně na některá slova zadání, ale nevnímá celý jeho kontext. Řešení úlohy je 8, protože dvojnásobek tohoto myšleného čísla je 16 ($8 \cdot 2 = 16$). Reedukovat tuto chybu lze například tím, že vedeme žáky k tomu, aby své výsledky ověřovali a dělali zkoušku. Podobná chyba se může objevit i v úlohách se zlomky (Polovina myšleného čísla je 10. Které číslo si myslím?). Svou roli hrají i čísla v zadání. Například v této úloze: Polovina myšleného čísla je 7. Které číslo si myslím? Zde může žáky, kteří by bezmyšlenkovitě chtěli číslo 7 dělit dvěma, zarazit skutečnost, že číslo 7 je liché. I když už rozumí desetinným číslům a uměli by vyřešit úlohu $7 : 2$, často se na tomto místě podívají ještě jednou na zadání a opraví svou původní chybnou strategii.

Pokud bychom chtěli úlohy o myšlených číslech formulovat bez antisignálu, museli bychom zadání upravit. Namísto toho, abychom žákům zatajili myšlené číslo, se kterým následně operace provádíme, toto

číslo bychom žákům prozradili a ptali bychom se na konečný výsledek. Například tedy: Mé číslo je 5. Jaký je dvojnásobek mého čísla zvětšený o 2? Operace použité k řešení jsou v souladu se signálními slovy, která se vyskytují v zadání: $5 \cdot 2 + 2 = 12$. Protože však považujeme za didakticky důležité, aby se žáci s antisignálem v úlohách setkávali, uvádíme v učebnicích i v těchto materiálech pouze úlohy prvního typu.

Gradační parametry:

1. Pozice neznámého operátoru/stavu
2. Formulace operátoru
3. Operace násobení
4. Číselný obor
5. Řetězení operací a jejich kombinace

Pozice neznámého operátoru/stavu

Úloha:

Myslím si číslo. Když k němu přičtu číslo 6, dostanu číslo 11.
Které číslo si myslím?

Úloha:

Myslím si číslo. Když ho přičtu k číslu 5, dostanu číslo 12.
Které číslo si myslím?

Zadané úlohy se liší v tom, zda je neznámé číslo v roli výchozího stavu, nebo operátoru. Dobře je to vidět, pokud zapíšeme obě úlohy pomocí čísel:

$$___ + 6 = 11$$

$$5 + ___ = 12$$

U sčítání není rozdíl v obtížnosti těchto dvou typů úloh tak velký, protože v obou případech dáváme dvě čísla dohromady a jedno z nich neznáme. Větší rozdíl je u odčítání:

Úloha:

Myslím si číslo. Když od něj odečtu 5, dostanu 6.
Které číslo si myslím?

Úloha:

Myslím si číslo. Když ho odečtu od čísla 10, dostanu 7.
Které číslo si myslím?

Aby byl rozdíl patrný, zapíšeme opět obě úlohy pomocí čísel:

$$___ - 5 = 6$$

$$10 - ___ = 7$$

Vidíme, že efektivní strategií v první úloze je $6 + 5 = 11$, což je myšlené číslo. V druhém případě se nabízí odečíst 7 od 10, tedy $10 - 7 = 3$, což je myšlené číslo. Vidíme, že v obou výpočtech jsme použili jinou operaci, což je dáno tím, že při odčítání záleží na pořadí čísel, kdežto u sčítání ne (říkáme, že sčítání je komutativní a odčítání není).

Formulace operátoru

Úloha:

Myslím si číslo. Když k němu přičtu číslo 5, dostanu číslo 12.
Jaké číslo si myslím?

Úloha:

Myslím si číslo. Když od něho odečtu číslo 5, dostanu číslo 6.
Jaké číslo si myslím?

Úloha:

Myslím si číslo. Když ho zvětším o 7, dostanu číslo 12.
Jaké číslo si myslím?

Úloha:

Myslím si číslo. Když ho zmenším o 7, dostanu číslo 6.
Jaké číslo si myslím?

Z jazykového hlediska je parametrem, který ovlivňuje náročnost těchto úloh, použitá slovní zásoba a slovní spojení. Obecně neznámá a složitá slova žákům samozřejmě porozumění úloze komplikují. Slova **přičtu** a **odečtu** mohou být pro žáky o něco jednodušší na porozumění, pokud mají jejich význam velmi úzce spojený s příslušnou matematickou operací. Spojení **zvětším/zmenším o** je náročnější, pokud se s těmito pojmy žáci setkávají zřídka. Je tedy dobré, když učitel ve třídě používá v úlohách oba způsoby, aby jim žáci rozuměli. Někdy se stává, že si žáci pletou spojení **zvětším o** a **zvětším několikrát**. První spojení popisuje aditivní charakter operace (zde konkrétně přičítání), druhé multiplikativní charakter operace (zde konkrétně násobení).

Operace násobení

V úlohách se mohou objevovat různé početní operace. Obecně čím více mají žáci danou operaci ukotvenou, tím jednodušší jsou pro ně úlohy, ve kterých se tato operace vyskytuje. Aditivní operace představují sčítání a odčítání, multiplikativní operace jsou násobení a dělení. Efektivní cesta, jak budovat strukturální porozumění multiplikativním operacím, je navázat je na operace aditivní. Tedy násobení představujeme žákům v různých kontextech jako opakované sčítání a analogicky dělení představujeme jako opakované odčítání. Nejprve se ve 2. ročníku objeví v úlohách operace násobení.

Úloha:

Myslím si číslo. Když ho vynásobím 5, dostanu číslo 15.
Které číslo si myslím?

Úloha:

Myslím si číslo. Jeho dvojnásobek zmenšený o 1 je 13.
Které číslo si myslím?

Číselný obor

Číselný obor úlohy je jedním z nejviditelnějších gradačních parametrů úloh. Obtížnost úloh může být ovlivněna například přechodem přes desítku, ale i prostou velikostí (hodnotou) čísel (jednociferná, dvouciferná čísla atd.). Nemusíme však zůstat pouze u čísel přirozených. Ve vyšších ročnících lze rozšiřovat číselný obor i jiným směrem do racionálních (zlomky a desetinná čísla) a záporných čísel. Velký potenciál přitom mají diagnostické úlohy, kde je naším cílem diagnostikovat, zda žáci již mají povědomí o těchto číselných oborech. Například následující úlohy zjišťují, zda žáci již mají vybudovanou představu o záporných číslech. V zadání úloh se žádné takové číslo nevyskytuje, ale v řešení úlohy ano. Pokud někteří žáci odpoví, že úloha nemá řešení, je to pro učitele zpráva o tom, že se zatím tito žáci pohybují pouze v oblasti přirozených čísel. Kdo úlohy vyřeší správně, ten už dokáže se zápornými čísly pracovat.

Úloha:

Myslím si číslo. Když k němu přičtu 4, dostanu 3.
Které číslo si myslím?

Úloha:

Myslím si číslo. Součet mého čísla a čísla 2 je 1.
Které číslo si myslím?

Podobně můžeme diagnostikovat porozumění racionálním číslům. Například těmito úlohami:

Úloha:

Myslím si číslo. Jeho dvojnásobek je 3. Které číslo si myslím?

Úloha:

Myslím si číslo. Když ho vynásobím dvěma, dostanu 9.
Které číslo si myslím?

Tyto úlohy může učitel zadat žákům v různých ročnících a získat tak představu o tom, kdo už s desetinnými čísly (zde s polovinami) umí pracovat.

Řetězení operací a jejich kombinace

Obtížnost úloh lze ovlivňovat také řetězením jednotlivých operací a jejich různou kombinací. Více operací v zadání a větší množství čísel samozřejmě zvyšuje obtížnost úloh.

Úloha:

Které číslo si myslím? Když ho vynásobím 3 a přičtu 2, dostanu 11.

Úloha:

Které číslo si myslím? Když ho vynásobím 2 a odečtu 5, dostanu 3.

Úloha:

Které číslo si myslím? Když k 7 přičtu trojnásobek myšleného čísla a od výsledku odečtu 8, dostanu 2.

3. ročník

Gradační parametry:

1. Operace dělení
2. Formulace operace (proces X koncept)

Operace dělení

Ve 3. ročníku žáci řeší úlohy, ve kterých se objevuje operace dělení. Pokud žáci již odhalili efektivní strategii řešení úloh odzadu, mohou tuto znalost uplatnit i v těchto úlohách:

Úloha:

Myslím si číslo. Když ho vydělím 4, dostanu číslo 6.
Které číslo si myslím?

Úloha:

Myslím si číslo. Když k němu přičtu 2 a výsledek vydělím 3, dostanu číslo 2. Které číslo si myslím?

Například první úlohu lze řešit výpočtem $6 \cdot 4 = 24$. Žáci si tak upevňují důležitou znalost, že násobení a dělení jsou vzájemně převrácené operace, které spolu velmi úzce souvisí.

Formulace operace (proces X koncept)

Již jsme zmínili, že výběr slov, kterými je slovní zadání formulováno, ovlivňuje obtížnost úlohy. Nyní tento parametr popíšeme u úloh s multiplikativními operacemi (násobení a dělení). Všimněme si, že obě úlohy popisují stejnou matematickou situaci:

Úloha:

Myslím si číslo. Když ho vydělím 4, dostanu číslo 6.
Které číslo si myslím?

Úloha:

Myslím si číslo. Jeho čtvrtina je 6. Které číslo si myslím?

Didaktický rozdíl je pouze v tom, že v první úloze je situace popsána procesuálně pomocí početní operace (tedy mluvíme o procesu, kdy myšlené číslo dělíme čtyřmi). Druhá úloha je zadána konceptuálně (čtvrtina myšleného čísla je část celku, což je koncept). V tomto případě nelze jednoduše říct, která formulace je pro žáky obecně jednodušší. Záleží totiž na tom, jaké zkušenosti má který žák, a také, zda je konceptuální či procesuální typ. Jinými slovy – zda je mu bližší vnímat a řešit úlohy postupně po částech, nebo zda úlohy vnímá a řeší vcelku (např. strategie řešení úlohy vhlédem).

Podobná situace je u následující dvojice uvedených úloh:

Úloha:

Myslím si číslo. Když ho vynásobím 3, dostanu 15.
Které číslo si myslím?

Úloha:

Myslím si číslo. Jeho trojnásobek je 15. Které číslo si myslím?

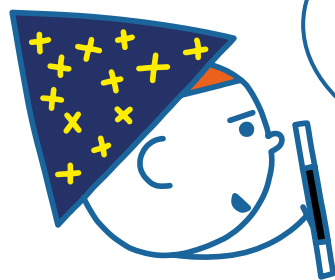
V první úloze je situace formulována procesuálně, protože popisujeme proces dělení myšleného čísla třemi. Druhá úloha je formulována konceptuálně, protože zde mluvíme o trojnásobku celku, tedy trojnásobku myšleného čísla.

Kouzla

Následující série dvou úloh z prostředí Myslím si číslo a Hadi opět obsahuje matematické kouzlo, jehož podstatu mají žáci odhalit. Žáci si jistě všimnou podobnosti obou úloh (v matematice hovoříme o tom, že obě úlohy jsou izomorfní – tedy mají stejnou matematickou podstatu jen v jiném kontextu). Ukazovat stejné úlohy v jiných kontextech a prostředích je důležité, protože tím jsou zkušenosti žáků bohatší. Žáci si uvědomují souvislosti. Kromě toho různým žákům mohou vyhovovat různá prostředí.

Úloha:

Kouzlo Kira

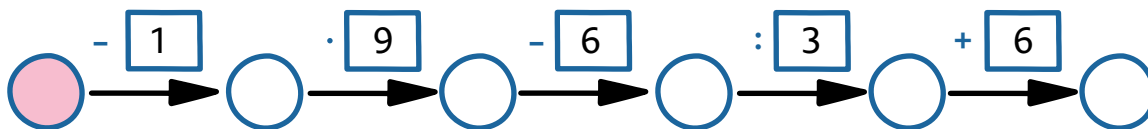


Mysli si číslo, odečti od něj 1, výsledek vynásob 9, odečti 6, vyděl 3, přidej 6. Řekni mi, co ti vyšlo, a já ti hned řeknu, které číslo si myslíš.

Jak to Kira uhodne?

Úloha:

Vlož si do růžového pole číslo. Hada vypočítej. Když mi řekneš, jaké číslo vyšlo na konci hada, uhodnu rychle, jaké číslo sis dal do růžového pole.



Úloha:

Mysli si číslo, přičti k němu 2, výsledek vynásob 4, přičti 8 a vyděl 4. Řekni mi, co ti vyšlo, a já ti řeknu, které číslo si myslíš.



Úloha:

Mysli si číslo, vynásob ho 3, k výsledku přičti 6, přičti 8, odečti 12, přičti 4 a vyděl 3. Řekni mi, co ti vyšlo, a já ti řeknu, které číslo si myslíš.



Aby žáci úspěšně kouzla odhalili, potřebují často mnoho zkušeností, výpočtů a čas. Nalezené výsledky je vhodné evidovat tabulkou, ze které mohou žáci podstatu kouzla lépe odhalit.

4.–5. ročník

Myslím si číslo – přepis do rovnic a do jiných prostředí

Jak jsme si ukázali v úvodu, úlohy z prostředí Myslím si číslo lze přepisovat pomocí jazyka algebry do rovnic. Proto jsou rovnice také jedním ze způsobů, jak lze tyto úlohy řešit. Od 4. ročníku jsou zařazeny v učebnicích výzvy, aby žáci úlohy do rovnic přepisovali. Všechny tyto zkušenosti žákům pomáhají budovat hlubší porozumění daným situacím a mimo jiné jim to také usnadní řešení rovnic a práci s neznámou.

Úloha:

$$2 + x = 6$$

$$x + 2 = 6$$

$$3 + x = 8$$

$$x - 5 = 6$$

$$x \cdot 5 = 15$$

$$x : 4 = 6$$

$$x + 2 \cdot 8 = 23$$

$$x - 3 \cdot 4 = 15$$

$$x + 9 : 3 = 14$$

$$x - 12 : 4 = 14$$

$$2 \cdot x + 5 = 29$$

$$3 \cdot x - 7 = 32$$

$$x : 2 + 2 = 13$$

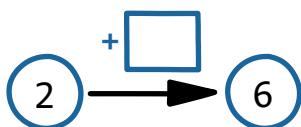
$$x : 3 - 3 = 6$$

Přepisovat do rovnic lze i úlohy z jiných prostředí. Například zde vidíme rovnici $2 + x = 6$ přepsanou do několika dalších prostředí. Mohli bychom také žáky vyzvat k tomu, aby úlohy z jednoho prostředí přepsali do ostatních prostředí (například úlohu formulovanou v Myslím si číslo lze přepsat do všech 4 dalších prostředí).

Níže uvedené úlohy reprezentují rovnici $2 + x = 6$.

Úloha:

Hadi: Vyřeš.



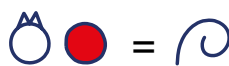
Vláčky: Doplň jeden vagónek tak, aby byly vláčky stejně dlouhé.



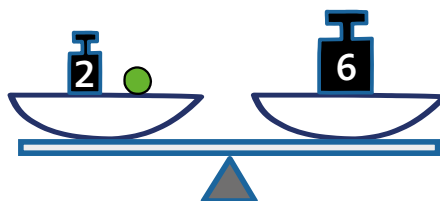
Myslím si číslo

Když myšlené číslo přičtu k číslu 2, dostanu číslo 6. Jaké číslo si myslím?

Děda Lesoň: Které zvířátko se skrývá pod maskou?



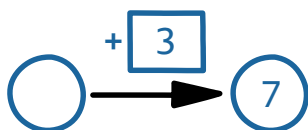
Váhy: Kolik váží kulička?



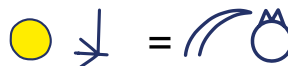
Níže uvedené úlohy reprezentují rovnici $x + 3 = 7$.

Úloha:

Hadi: Doplň.



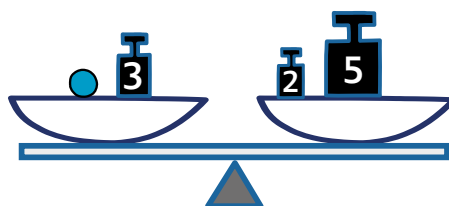
Děda Lesoň: Které zvířátko se skrývá pod maskou?



Vláčky: Doplň vagónek tak, aby byly vláčky stejně dlouhé.



Váhy: Kolik váží kulička?



Myslím si číslo:

Myslím si číslo. Když k němu přičtu 3, dostanu 7. Jaké číslo si myslím?

Následující úlohy reprezentují rovnici $3x + 6 = 15$.

Úloha:

Hadi: Vyřeš.



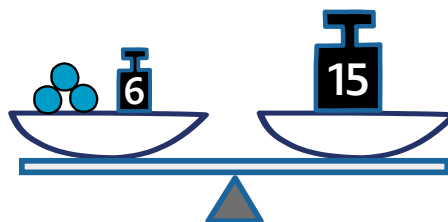
Děda Lesoň: Které zvířátko se skrývá pod maskou?



Vláčky: Doplň tři stejné vagónky tak, aby byly vláčky stejně dlouhé.



Váhy: Kolik váží kulička?



Myslím si číslo:

Myslím si číslo. Když k jeho trojnásobku přičtu 6, dostanu 15. Jaké číslo si myslím?

Gradační parametry:

1. Počet myšlených čísel

Počet myšlených čísel

Obtížnost úloh lze ovlivňovat počtem zadaných myšlených čísel. V následujících úlohách se vyskytuje pouze jedno myšlené číslo, které mají žáci zjistit. Úlohy jsou zároveň dalšími situacemi, ve kterých žáci hledají souvislosti mezi různými prostředími a rovnicemi.

Úloha:

Myslím si číslo. Když k jeho čtyřnásobku přičtu 6 dostanu číslo 14. Které číslo si myslím?

Úlohu o myšleném čísle přepiš do rovnice. Tuto rovnici pak přepiš do a) hada, b) vláček, c) dědy Lesoně, d) vah. Úlohy vyřeš. Modifikace v příslušném oboru.

Úloha:

Vyřeš rovnice. Přepiš je do prostředí Myslím si číslo.

- a) $x + 7 = 15$
- b) $12 - x = 9$
- c) $2x + 5 = 11$
- d) $20 - 3x = 8$

Úloha:

Doplň hada. Převeď na úlohu o myšleném čísle.



Úloha:

Vyřeš. Převeď do prostředí Hadi: Myslím si číslo. Když od něj odečtu 4 a výsledek vynásobím 6, dostanu 30.

Úloha:

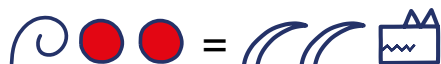
Zjisti, který vagónek se skrývá pod plachtou.

Převeď na úlohu o myšleném čísle. Modifikace v příslušném oboru.



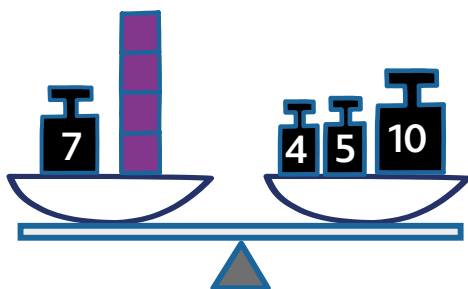
Úloha:

Zjisti, které zvířátko se skrývá pod maskou.
Převeď na úlohu o myšleném čísle. Modifikace v příslušném oboru.



Úloha:

Zjisti hodnotu neznámého závaží.
Převeď na úlohu o myšleném čísle. Modifikace v příslušném oboru.



Pokud zadáme úlohy se dvěma myšlenými čísly a dvěma podmínkami, žáci vlastně řeší soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Například:

Úloha:

Která dvě čísla si myslím? Jejich rozdíl je 4 a součet je 10.

Takovou situaci lze popsat dvojicí rovnic, kde písmena označují myšlená čísla:

$$x - y = 4$$

$$x + y = 10$$

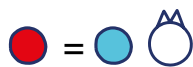
Pokud chceme, aby taková úloha měla jednoznačné řešení, je potřeba mít v zadání dvě podmínky, kterým bude vyhovovat právě jedna dvojice čísel. Kdybychom zadali v úloze výše pouze jednu podmínku (například že rozdíl čísel je 4), řešení by bylo nekonečně mnoho (každá dvojice čísel, která má rozdíl 4, je řešením úlohy). Analogicky mohou žáci řešit úlohy se třemi myšlenými čísly a třemi podmínkami a tak dále. Náročnost takových úloh ale se vzrůstajícím počtem myšlených čísel výrazně roste.

Na závěr dodejme, že úlohy tohoto typu jsou svojí podstatou spíše druhostupňové, ale pokud úlohy nenabízíme žákům v abstraktní podobě v jazyce písmen, mohou být v řešení úspěšní i žáci z 1. stupně. Důležité je nechat žáky, aby si hledali vlastní řešitelské strategie. Získávají tak důležité zkušenosti, které na druhém stupni při řešení rovnic zúročí. Podívejme se, jak lze převést do různých prostředí soustavu dvou rovnic:

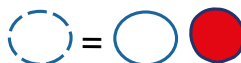
$$x + y = 6 \text{ a } y = x + 2.$$

Úloha:

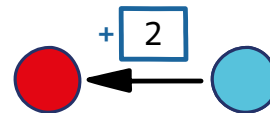
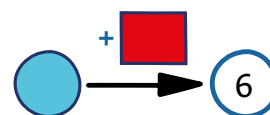
Děda Lesoň:



Vlášky:



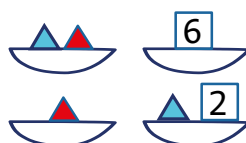
Hadi:



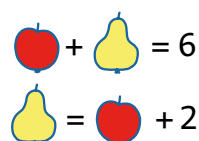
Myslím si číslo:

Myslím si dvě čísla.
Když je sečtu, dostanu 6.
Když k prvnímu číslu přičtu 2,
dostanu druhé číslo.

Váhy:



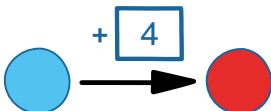
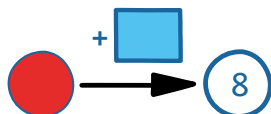
Ovoce:



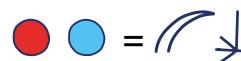
Další série úloh ukazuje soustavu dvou rovnic $x + y = 8$, $y + 4 = x$ v různých prostředích.

Úloha:

Hadi:



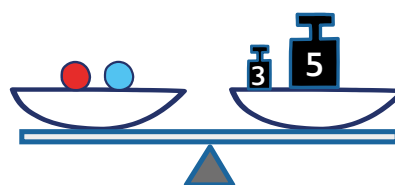
Děda Lesoň:



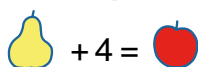
Vlášky:



Váhy:



Ovoce:

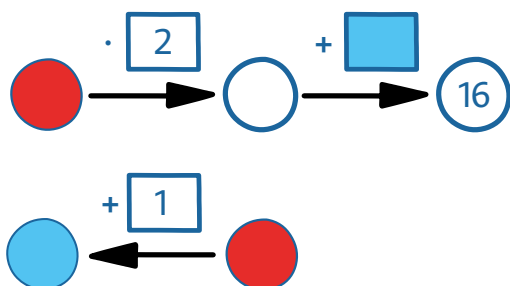


Myslím si dvě čísla. Když je sečtu, dostanu osm. Když k druhému přičtu 4, dostanu první. Jaká čísla si myslím?

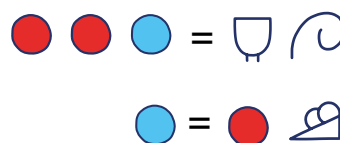
Tato série úloh ukazuje soustavu dvou rovnic $2x + y = 16$, $y = x + 1$ v různých prostředích.

Úloha:

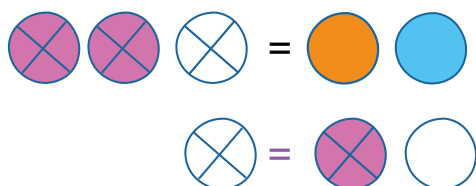
Hadi:



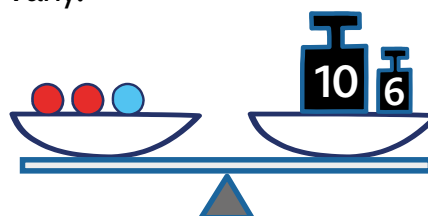
Děda Lesoň:



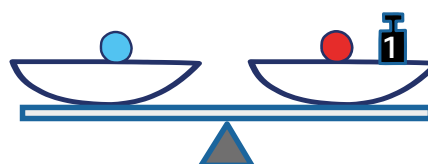
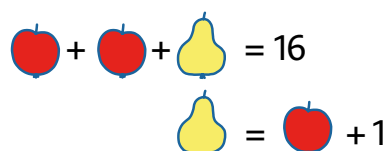
Vláčky:



Váhy:



Ovoce:



Myslím si číslo:

Myslím si dvě čísla. Když první číslo vynásobím dvěma a přičtu druhé číslo, dostanu šestnáct. Když k prvnímu číslu přičtu jedna, dostanu druhé. Jaká čísla si myslím?

Kouzla

Jak už jsme ukázali v předchozích ročnících, úlohy z prostředí Myslím si číslo lze zabalit do kontextu kouzel a nechat žáky, aby podstatu těchto početních kouzel odhalili. Podstata následující úlohy tkví v tom, jak lze rychle určit součet tří po sobě jdoucích přirozených čísel. Pokud to umím, mohu i rychle z tohoto součtu určit prostřední číslo dané trojice.

Úloha:

Mysli si číslo. Vytvoř z něj další dvě čísla: jednou od svého čísla odečti 1, podruhé ke svému číslu přičti 1. Všechna tato 3 čísla sečti a řekni mi výsledek. Já ti řeknu, na jaké číslo jsi myslel.

Takových úloh lze vymýšlet různé množství s různou obtížností, přičemž zásadním gradačním parametrem je počet a druh matematických operací.

Úloha:

Mysli si číslo. Odečti od něj 10. Přičti k němu 10. Tato 3 čísla sečti a řekni mi výsledek. Já ti řeknu, na jaké číslo jsi myslel.

Úloha:

Najdi zrcadlovou dvojici čísel (AB, BA). Urči rozdíl obou čísel. Ten vyděl devíti. Když mi řekneš jedno číslo tvé dvojice, hned ti řeknu výsledek.

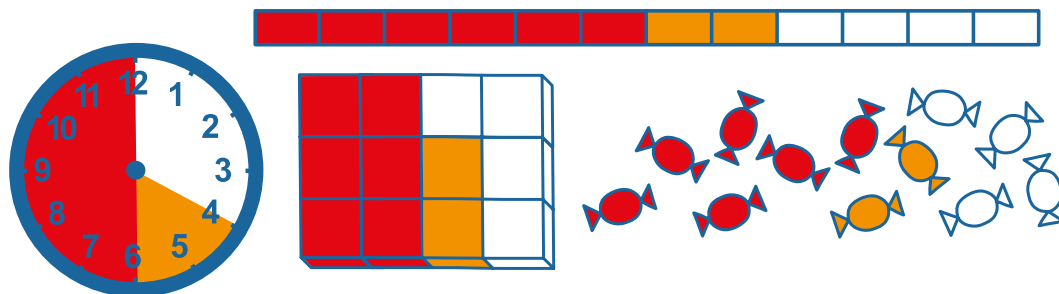
ZLOMKY

Zlomky nepatří mezi prostředí Hejného metody, ale jedná se o **průřezové téma**. Se zlomky se seznamují již děti v mateřské škole, když dělí spravedlivě počet předmětů na poloviny a poznávají, že obě poloviny musí být stejné. Kvalitní představa o zlomcích musí být budována přes manipulativní zkušenosti žáků s dělením různých předmětů (dělíme například provázek, papír nebo počty krychlí). Postupem času, jak budou žáci získávat se zlomky zkušenosti, budou oporu v podobě manipulace sami opouštět. Důležité je, aby měli zkušenosti se základními modely zlomků, které jsou uvedeny v následující úloze. Každý z modelů má své výhody i nevýhody při použití, ne všechny se hodí pro řešení každé úlohy. Teprve když mají žáci dostatek zkušeností, představíme jim způsob, jak zlomky zapisovat. Nejprve pracujeme s kmenovými zlomky, které mají v čitateli 1, teprve později se v úlohách vyskytují i zlomky nekmenové. Čtyři výše uvedené modely jsou vhodné nejen pro znázorňování zlomků a budování představ o nich, ale také pro výuku početních operací se zlomky (v uvedené úloze vidíme vizualizaci operace sčítání).

V následující úloze vidíme, jak lze znázornit a vyřešit úlohu $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ na čtyřech základních modelech – **kruh** (ten může být rozdělen na různě velké základní díly, například na dvanáct, respektive na šedesát – pak se jedná o hodinový, respektive minutový ciferník), **tyč**, **obdélník (čokoláda)** a **diskrétní model** (počet konkrétních objektů, které dále nedělíme na menší části – např. zde bonbóny).

Úloha:

Znázorni na každém ze čtyř různých modelů a vypočítej $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$.



Na úvod uvedme, že obecně lze třídit úlohy o zlomcích do třech základních kategorií:

- A. určení velikosti celku** (např.: Polovina z celkového počtu jsou 3 míče. Jaký je celkový počet míčů?)
- B. určení zlomku z daného celku** (např.: Jaká část jsou 3 míče ze 6 míčů?)
- C. určení velikosti dané části celku** (např.: Kolik je polovina ze 6 míčů?)

Toto je tradiční dělení, které vychází z toho, že ve vazbě celek (6 míčů) – část celku vyjádřená zlomkem (polovina všech míčů) – část celku vyjádřená počtem nebo veličinou (3 míče) lze vždy jednu z těchto tří informací zatajit a tím vytvořit pro žáky úlohu.

Dále můžeme jednotlivé úlohy třídit podle toho, s jakým modelem zlomku v úloze pracujeme (viz přehled modelů uvedený výše v úvodu).

Pro lepší přehlednost a využitelnost našeho materiálu v učitelské praxi jsme se přidrželi dělení úloh na jednotlivé ročníky.

1. ročník

Žáci získávají v začátcích zkušenosti prostřednictvím manipulace (překládání papíru nebo provázku) a postupně se také seznamují s modely zlomků (čokoláda, tyč, ciferník). Důležité je, aby žáci získávali kvalitní představy o zlomcích.

V 1. ročníku žáci řeší úlohy s **překládáním papíru** nebo dalších předmětů. Přitom samozřejmě není cílem počítat, jak je tato polovina velká. Žáci určí polovinu prostým přeložením papíru. Důležité je, aby svá řešení zdůvodňovali. Pro žáky tohoto věku je většinou nejsrozumitelnějším argumentem to, že poloviny mají stejný tvar a velikost. Pokud se po přeložení poloviny přesně nekryjí, je možné papír podle skladu rozstříhnout a obě části přeložit na sebe.

Úloha:

Přelož na polovinu.



Lze zadat i další úlohy na překládání čtverce (přelož na čtvrtiny, třetiny, ...). Pokud žáci nerozumí nebo mají s řešením úlohy (např. u třetiny) potíže, je to signál, že úloha přišla moc brzy. Jinou možností je místo čtvercového papíru zkusit použít provázek.

Úloha má nekonečně mnoho řešení, protože čtverec lze rozdělit na poloviny libovolnou úsečkou procházející středem čtverce. S mladšími žáky se ale velice pravděpodobně objeví pouze „klasická“ řešení (vodorovná osa, svislá osa, případně řešení s úhlopříčkou), což je v 1. ročníku v pořádku.

Náročnější úlohy lze získat překládáním dalších základních geometrických útvarů.

Úloha:

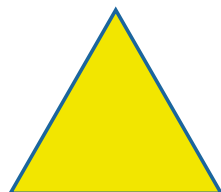
Přelož na polovinu.



Úloha má nekonečně mnoho řešení, stejně jako u čtverce.

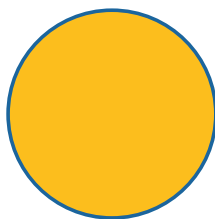
Úloha:

Přelož na polovinu.



Úloha:

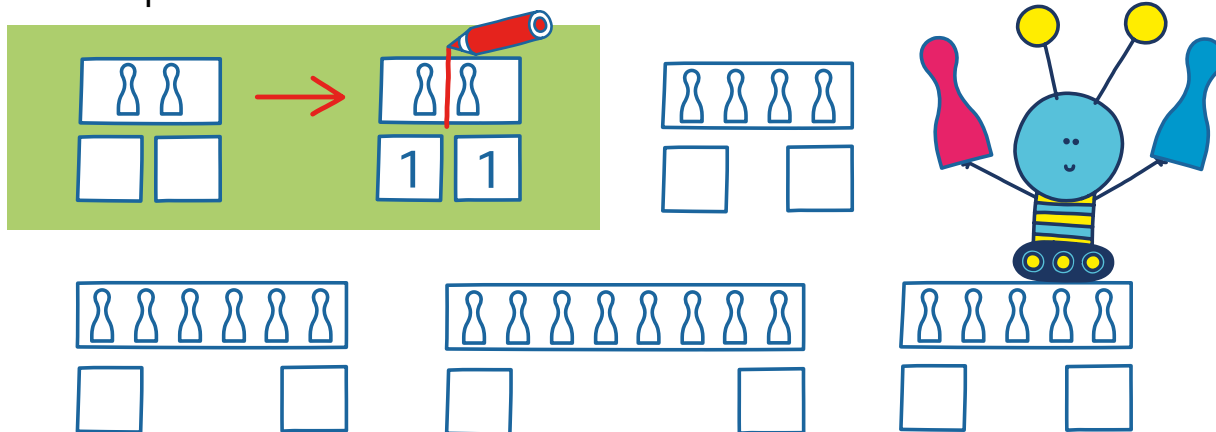
Přelož na polovinu.



Dalšími úlohami, které žáky připravují na zlomky, jsou výzvy ke **spravedlivému dělení** nějakého počtu, zde konkrétně figurek. Zde se žáci intuitivně setkávají s kmenovými zlomky (s polovinou, třetinou, čtvrtinou, ...), přestože se v úlohách zpočátku tyto pojmy nepoužívají. Úlohy můžeme gradovat zvyšováním počtu, dělením na více částí (mezi tři žáky, mezi čtyři žáky, ...) nebo také přítomností dělení se zbytkem. To se zde týká poslední úlohy, kde žáci rozdělují na dvě skupiny 5 figurek.

Úloha:

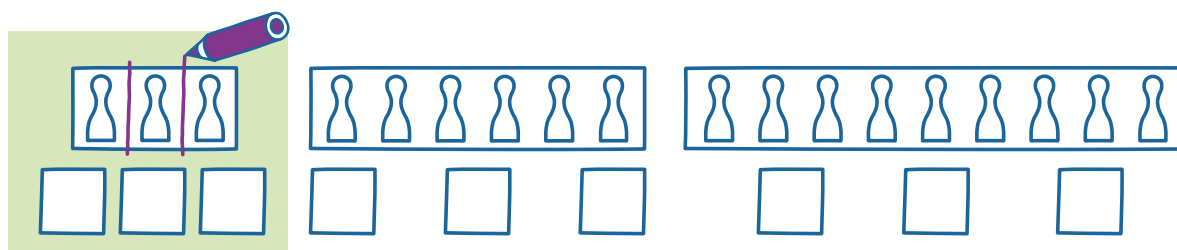
Rozděl spravedlivě.



Dělení na tři stejné skupiny pro některé žáky bude náročnější než dělení na dvě stejné skupiny.

Úloha:

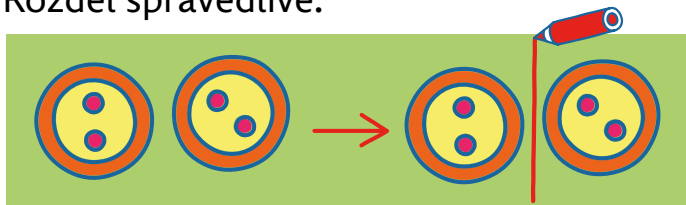
Rozděl spravedlivě.



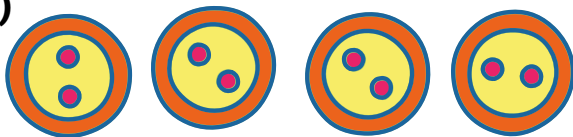
Podobnou úlohou je následující s dělením koláčů. Tam se objevují v každém koláči i podobjky (dvě ro-zinky). I to může být pro nějaké žáky gradační parametr. Mohou se zabývat tím, jak rozdělit koláč na dvě „totožné“ části. V úlohách s figurkami by se to stát nemohlo.

Úloha:

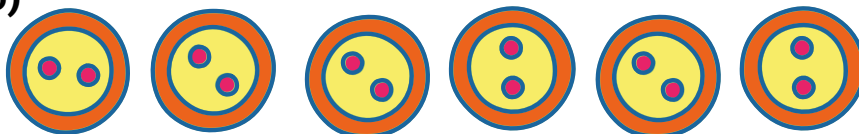
Rozděl spravedlivě.



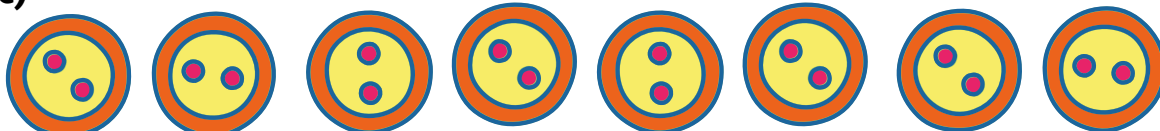
a)



b)



c)



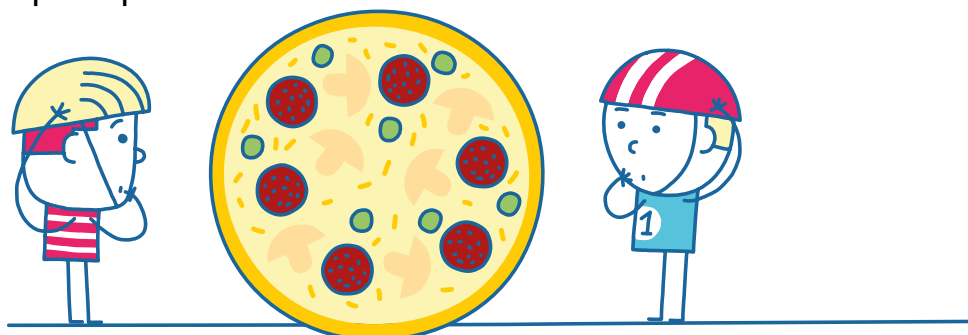
d)



Spravedlivé dělení se brzy objeví i v klíčových modelech při práci se zlomky (kruh, čokoláda, tyč).

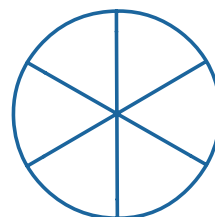
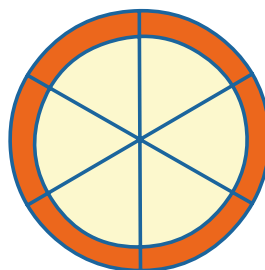
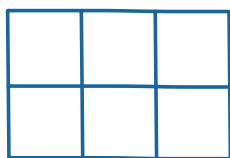
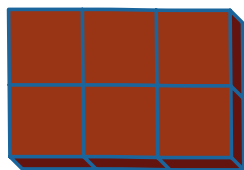
Úloha:

Jak rozpůlíš pizzu?



Úloha:

Rozděl čokoládu a koláč spravedlivě mezi Adama a Benjamina.
Vybarvi, kolik dostane každý.

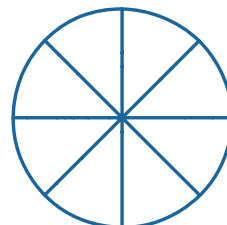
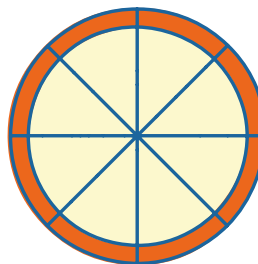
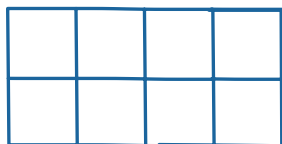
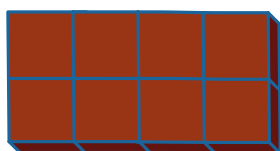


Žáci dělí obrázek čokolády a koláče a také obdélník, který čokoládě odpovídá, a kruh, který odpovídá koláči. Pracují tedy jak s obrázky reálných objektů, tak s jejich zjednodušenou geometrickou interpretací (geometrickým modelem). Je praktičtější nakreslit si jednoduchý obdélník nebo kruh než kreslit skutečnou čokoládu a koláč. Tuto myšlenku si v úloze mohou žáci uvědomit, případně jim ji pomůže zvědomit učitel.

Úlohy lze **gradovat velikostí celku** (počet jednotlivých částí) nebo také **počtem osob**, mezi které se objekty dělí. Zde uvádíme jednu sérii úloh, která jemně graduje.

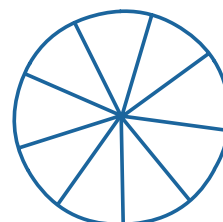
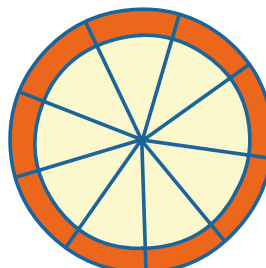
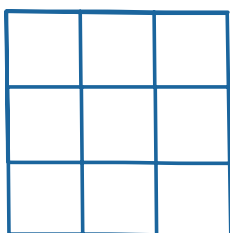
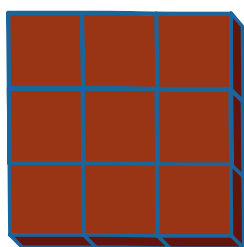
Úloha:

Rozděl čokoládu a koláč spravedlivě mezi Jonatána a Kristiána.
Vybarvi, kolik dostane každý.



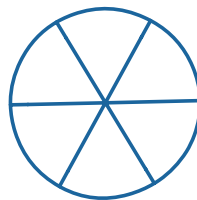
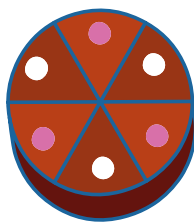
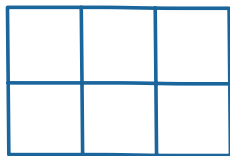
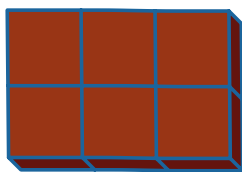
Úloha:

Rozděl čokoládu a koláč spravedlivě mezi Matouše, Julinku a Viktorku.
Vybarvi, kolik dostane každý.



Úloha:

Šest kamarádů si dělilo spravedlivě čokoládu a dort.
Vybarvi, kolik dostane každý. Jaká to je část?

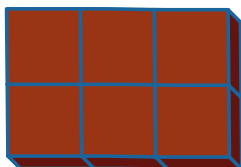


Následující úlohy nejsou oproti předchozím myšlenkově náročnější. Liší se tím, že v zadání se nemluví již o spravedlivém dělení, ale objevují se v něm již **zlomky** (polovina, ...).

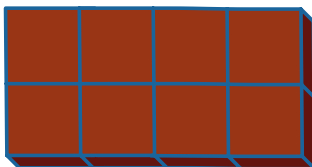
Úloha:

Urči, kolik kostiček je polovina čokolády.

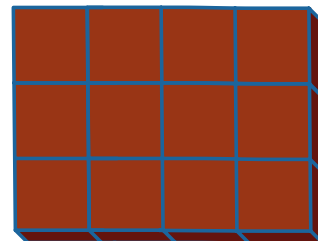
a)



b)



c)

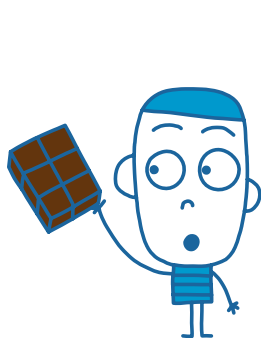


Podle zkušeností učitel může zařadit další podobné úlohy, kde žáci určují čtvrtinu nebo třetinu čokolády.

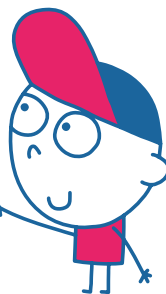
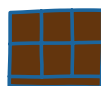
Náročnější úlohy budou pravděpodobně ty, kdy žáci hledají celek. Dá se očekávat, že pokud je známa polovina celku, žáci díky životní zkušenosti nebudou mít s řešením větší potíže. Pokud ano, je nutné situace vizualizovat (čokoláda, ciferník, tyč, ...).

Úloha:

Kolik kostiček má celá čokoláda?



JÁ JSEM
DOSTAL
POLOVINU.

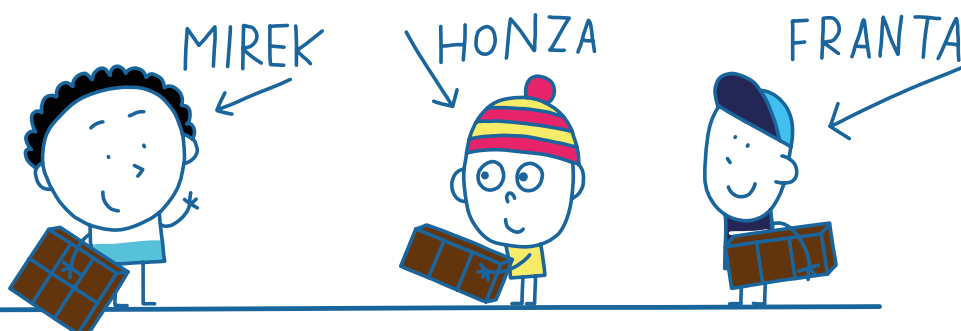


JÁ JSEM DOSTAL
TAKÉ POLOVINU,
JE TO
KOSTIČEK.

Žáci se již v 1. ročníku setkávají s modely zlomků. Oblíbený mezi žáky bývá model čokolády.

Úloha:

Mirek si nechal polovinu čokolády, druhou polovinu dal Honzovi s Frantou. Ti se o čokoládu spravedlivě rozdělili.



Jakou část čokolády dostal Franta?

Na úloze je náročná čtenářská gramotnost. Pokud mají žáci v 1. ročníku potíže se čtením zadání, přečte ho učitel. Proto pokud zde žáci mají potíže, učitel může nejprve zařadit úlohy typu: „Čokoláda má 12 kostiček. Mirek dostal polovinu čokolády. Zbytek si spravedlivě rozdělil Honza s Frantou.“ Pro žáky bude jednodušší nejprve úlohu řešit procesem, tedy skutečným dělením. Úloha zde je již zadaná obrázkem – konceptem, což může být pro některé žáky náročnější.

V úloze se objevuje pojem čtvrtina. Žáci často před tímto pojmem dávají přednost spojení poloviny z poloviny. Učitel může sledovat, kdy a kolik žáků čtvrtinu začne používat.

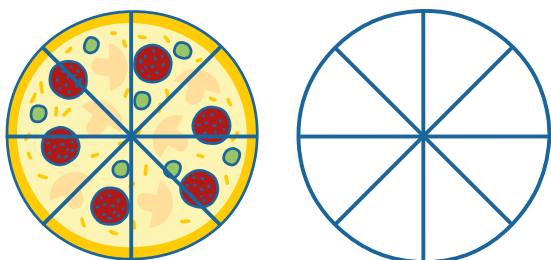
Pokud žák odpoví tři kostičky, má pravdu. Ale zadání úlohy se ptalo na část čokolády. K tomu lze ve třídě otevřít diskuzi.

2. ročník

Ve 2. ročníku pokračujeme v práci s různými modely zlomků. Objevují se úlohy, kde dochází k opakovanému půlení celku (koláče, počtu objektů, ...). Tím žáci získávají zkušenosti s dalšími zlomky, zde konkrétně čtvrtinou i osminou.

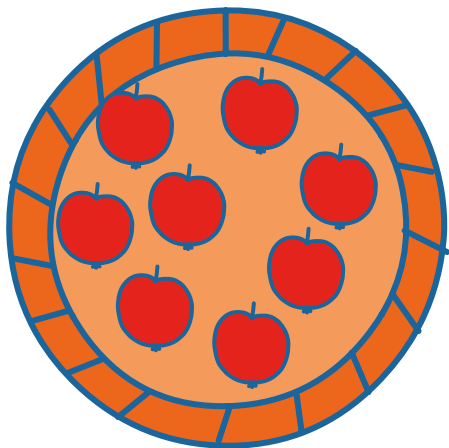
Úloha:

Alenka snědla polovinu pizzy.
Vašek snědl polovinu z toho, co zbylo.
Jaká část pizzy zůstala Honzíkovi?



Úloha:

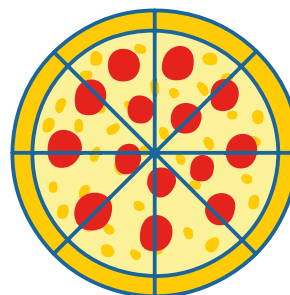
Jonatán snědl polovinu jablek z košíku. Kristián snědl polovinu z toho, co zbylo. Jaká část jablek zůstala Violce? O kolik více jablek snědl Jonatán než Kristián? O kolik více snědl Kristián než Violka?



Úloha:

Tatínek snědl polovinu pizzy.
Maminka snědla polovinu ze zbytku.
Z toho, co zbylo, si polovinu vzal jejich syn.

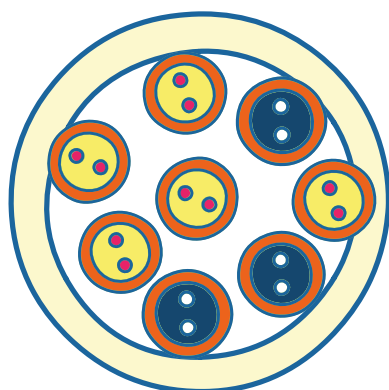
- a) Jaká část pizzy zbyla na jejich dceru?
- b) Má větší porci tatínek, nebo maminka se synem dohromady?



Úloha:

Ivča snědla z mísy polovinu koláčů.
Verča snědla polovinu ze zbytku.
Z toho, co zbylo, si polovinu vzala Lucka.

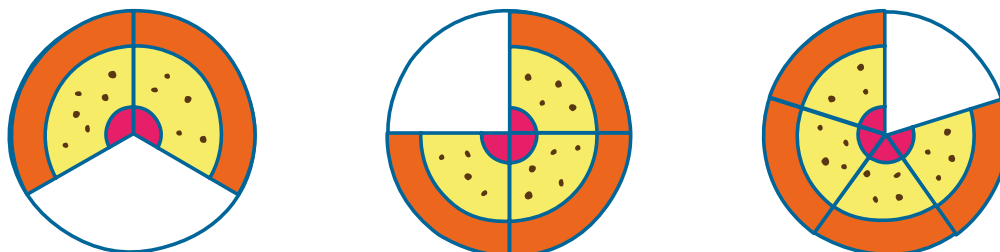
- a) Jaká část koláčů zbyla na Lucku?
- b) Má větší porci Ivča, nebo Verča s Luckou dohromady?
- c) O kolik méně má Lucka než Verča?



Ve 2. ročníku se objevují i úlohy, ve kterých žáci určují část celku. Další série úloh se týká **určování chybějící části celku** nejprve ciferníkového a poté čokoládového modelu. Úlohy lze **gradovat** především **velikostí čokolády, počtem dělených částí, náročností zlomků** (polovina bude asi nejjednodušší) nebo (spíše později) **použitím nekmenových zlomků** (např. dvě třetiny).

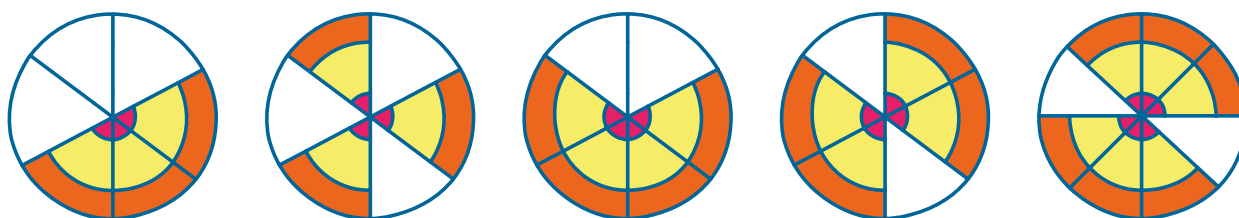
Úloha:

Jaká část koláče chybí?



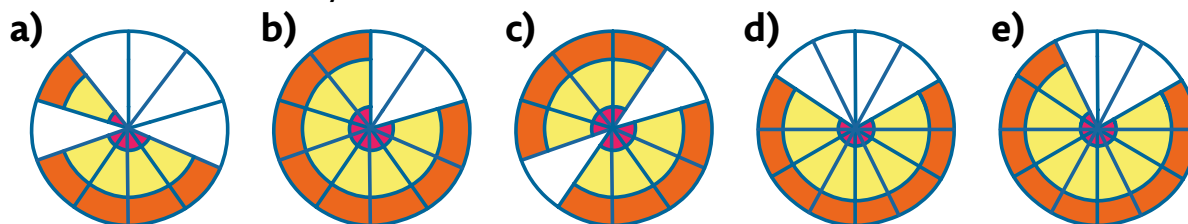
Úloha:

Jaká část koláče chybí?



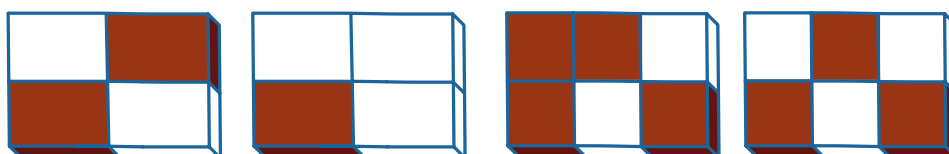
Úloha:

Jaká část koláče chybí?



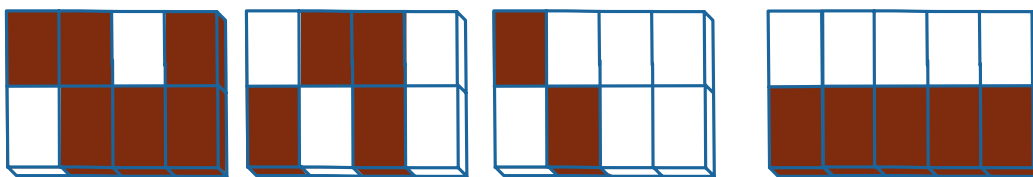
Úloha:

Jaká část čokolády chybí?



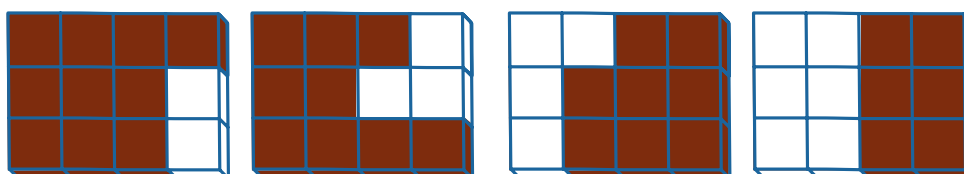
Úloha:

Jaká část čokolády chybí?



Úloha:

Jaká část čokolády chybí?



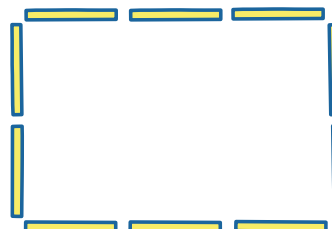
Se zlomky můžeme pracovat také v geometrických prostředích s pomůckou, kterou nazýváme dřívka, jak ukazují následující úlohy.

Úloha:

Vytvoř podle obrázku.

Přilož další dvě / a:

- a) vyznač jednu třetinu obdélníku.
- b) vyznač jednu šestinu obdélníku.



Úloha:

Vytvoř podle obrázku.

Přilož jednu / a:

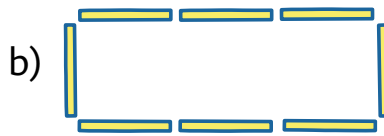
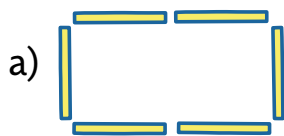
- a) rozděl obdélník na poloviny.
- b) vyznač jednu čtvrtinu obdélníku.



Tyto typy úloh lze **gradovat** různými parametry, například **počtem dřívek**, a tedy velikostí útvaru. Nebo můžeme samozřejmě variovat zlomky, se kterými pracujeme. Žáci si mohou všimnout také vztahů mezi jednotlivými částmi: šestina obdélníku se do jeho třetiny vejde dvakrát, stejně je tomu se čtvrtinou a polovinou. Úlohy můžeme také otočit, aby úkolem žáků bylo naopak najít celek:

Úloha:

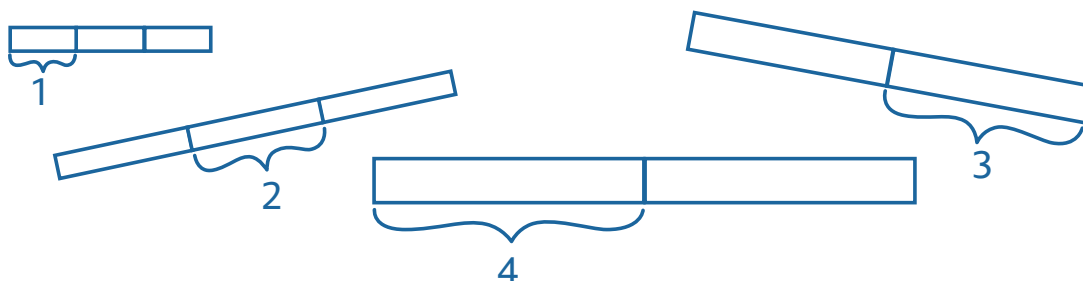
Obdélník na obrázku je polovinou jiného obdélníku.
Najdi tento větší obdélník.



Tyčový model přichází také velice brzy. Pokud se používají pravidelně různé modely, učitel může sledovat, jaké modely žáci preferují, pokud si mohou vybrat. Tyčový model se často používá, pokud se celek nedělí na větší počet kusů. Pak je většinou výhodnější použít čokoládový model.

Úloha:

Na obrázku jsou některé obdélníky rozděleny na poloviny, jiné na třetiny. Jak jsou dlouhé?

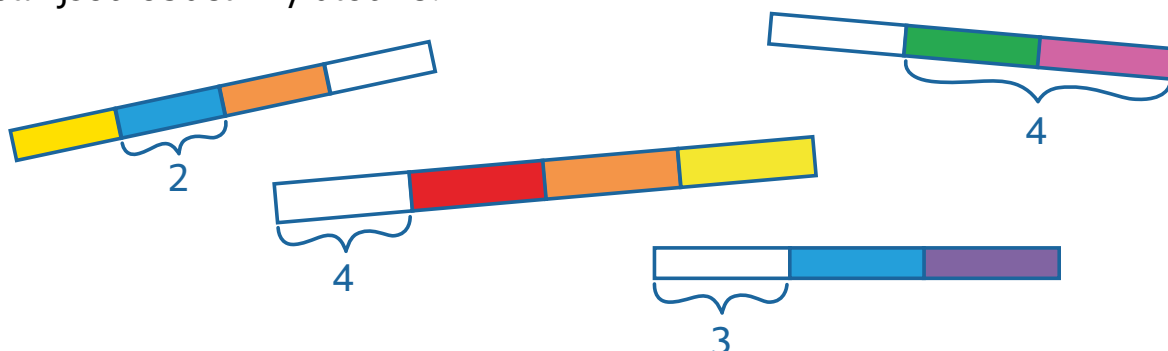


Poprvé se objevuje obrázek, kde je **délka kótována**. To je velice důležitá myšlenka z hlediska budoucích strategií řešení podobných úloh. Žáky vedeme k tomu, aby si situaci uměli správně vizualizovat, nakreslit. To jim umožní v budoucnu do takových situací dobře vhlédnout. Dá se očekávat, že nejjednodušší budou úlohy s polovinou.

Úlohy lze opět dobře **gradovat** tím, že zvětšíme **počet dělených částí** nebo také situací z další úlohy. Tam v obdélníku vpravo nahoře není známa hodnota jedné základní části, ale částí dvou. Objevuje se **nekmenový zlomek** dvě třetiny. Zde ale taková věc žáky asi moc nevyruší. Jednu část určí vydělením dvěma a zbytek dopočítají.

Úloha:

Dva obdélníky jsou rozděleny na třetiny a dva na čtvrtiny.
Jak jsou obdélníky dlouhé?



Další gradací může být **text a jeho náročnost**. Úlohy výše šlo řešit víceméně pouze za pomoci obrázku. Nyní přicházejí úlohy, kdy se text dostává do popředí. Např. v úloze b) by samotný obrázek bez textu mohl vyvolat diskuzi, jak to s délkami barevných částí je. Kombinace textu a obrázku tak bude pro žáky náročnější – čtenářská gramotnost je velkým tématem. Ještě náročnější pravděpodobně budou adekvátní úlohy zadané pouze textem.

Dalším gradačním parametrem, který úlohu ztíží, je ten, že **tyč není rozdělena na adekvátní části**. V úloze b) tak žáci musí sami 50 cm rozdělit na dvě části, aby získali třetiny. Pokud žáci mají s úlohami potíže, lze jim takovou radu (pomoc) nabídnout.

Úloha:

Vyřeš.

- a) Polovina tyče je natřena na modro. Zbytek tyče měří 30 cm.

Jak dlouhá je tyč?

Tyč je dlouhá centimetrů.



- b) Třetina tyče je natřena na zeleno. Zbytek tyče měří 50 cm.

Jak dlouhá je tyč?

Tyč je dlouhá centimetrů.



- c) Třetina tyče je natřena na žluto, zbytek tyče měří 34 cm.

Jak dlouhá je tyč?

Tyč je dlouhá cm.



- d) Pětina tyče je natřena na zeleno, zbytek tyče měří 36 cm.

Jak dlouhá je tyč?

Tyč je dlouhá cm.



Úlohy s obrázky nesou jednu záludnost, na kterou je žáky třeba pečlivě připravovat. Pokud na obrázku napsané rozměry nebudou odpovídat skutečnosti, upozorníme na to žáky.

Na řadu přichází i komplexnější úlohy. Následující úloha v sobě skrývá jeden ze základních zlomkových vztahů: **celek = polovina + třetina + šestina**.

Úloha:

Tyč má délku 60 cm. Polovina je natřena na modro, třetina na červeně a zbytek je žlutý. Kolik měří žlutá část tyče?



Učitel může zadat úlohy s jinými modely – např. ciferník, čokoláda (2×3 , 3×4) a může sledovat, zda žáci výše zmíněný vztah vnímají. To se dá očekávat až ve vyšších ročnících. Zkušenosti ale žáci získávají průběžně. Učitel může např. zadat sérii úloh s čokoládou.

Ilustrativní úloha: Z celé čokolády odebereme její polovinu, její třetinu a její šestinu. Kolik kostiček čokolády nám zbyde, když čokoláda má rozměry: a) 1×6 , b) 2×6 , c) 3×4 , d) 4×6 apod.

Je pravděpodobné, že i žáci 4. či 5. ročníku budou potřebovat více takových zkušeností, než řeknou: „Nebude v žádném z případů ani jedna kostička.“

Úloha:

Polovina tyče je natřená na žluto a čtvrtina na modro. Zbytek je natřený na růžovo. Kolik měří celá tyč, když na růžovo je natřeno:

- a) 10 cm b) 20 cm c) 40 cm d) 62 cm?



Gradace oproti předchozí úloze je jasná. Tam žáci znali celek, který postupně dělili. Zde ale **celek neznají**, musí si uvědomit, že růžová část je jednou čtvrtinou celé tyče. Podobně učitel může zadávat další výzvy, které může ztěžovat, např. použití náročnějších zlomků. Úspěšnost žáků půjde ruku v ruce s jejich vybudovanými strategiemi. Znovu opakujeme důležitost vizualizace úloh za pomoci modelů a kreslení.

Dalším prvkem, kterým lze podobné úlohy obohatit, je použití **tabulky**. Gradovat takové úlohy budeme stejně jako v předchozích textech.

Úloha:

Čtvrtina tyče je natřená na modro, zbytek na červeno.

Jak dlouhá je modrá část, když celá tyč měří:

- a) 20 cm
b) 28 cm
c) 44cm?



celá	20	28	44
modrá			

Učitel může porovnat úspěšnost žáků ve stejných zadáních, která se liší pouze tabulkou. V úloze výše se doplňuje pouze modrá část, v úloze níže modrá i červená část.

Úloha:

Čtvrtina tyče je natřená na modro, zbytek na červeně.
Jak dlouhá je modrá část a jak červená, když celá tyč měří:

- a) 40 cm
- b) 60 cm
- c) 52 cm?

--	--

celá	40	60	52
modrá			
červená			

V další úloze jde opět o gradaci tím, že žákům musí dojít, že žlutá část jsou dvě třetiny celé tyče. Takže se objeví nekmenový zlomek. Předkreslená šablona může žákům pomoci. Učitel může i porovnat jejich úspěšnost, pokud šablona bude nebo nebude zadána.

Úloha:

Třetina tyče je natřená na červeně, zbytek na žluto.
Jak dlouhá je červená část a jak dlouhá je celá tyč, když žlutá část měří:
a) 10 cm, b) 20 cm, c) 30 cm, d) 40 cm, e) 46 cm?

--	--

žlutá	10	20	30	40	46
červená					
celá					

Opět jinak zadána úloha. Zde se žáci musí zorientovat v tabulce. Pokud mají již více zkušeností např. s předchozími úlohami, neměl by to být problém.

Úloha:

Tyč je natřená červenou a modrou barvou. Jaké části připadají na kterou barvu, když známe celkovou délku tyče?

celá	16	20	27	36	48
modrá	8	5	9	6	6
červená	8	15	18	30	42

Úloha:

Zjisti délku tyče, když víme, že:

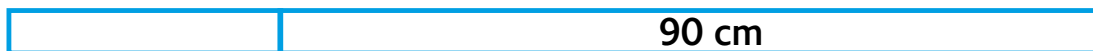
- a) polovina tyče je natřená na červenou, čtvrtina na žlutou a zbylých 20 cm na modro.



- b) třetina tyče je natřená na zelenou a zbylých 60 cm na hnědou.



- c) čtvrtina tyče je natřena na modro a zbylých 90 cm na červenou.



Úloha:



Na obrázku je velký trojúhelník.

- a) Jaká jeho část je růžový trojúhelník?

- b) Jaká jeho část je žlutý čtyřúhelník?

Úloha není myšlenkově náročnější než některé předchozí úlohy. Žáci určují části celku v jiném celku (trojúhelník). Zároveň se připravují na myšlenky, že **žlutá část jde vyjádřit jako jedna polovina, ale také jako dvě čtvrtiny**. Takové úlohy se na 1. stupni hodně vyskytují, aby žáci později dobře zvládli rozšiřování a krácení zlomků.

Úloha:

Doplň.

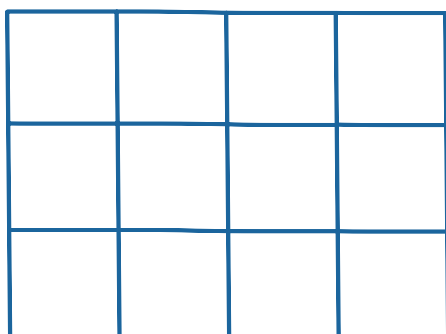
Stavba je vytvořena z krychlí. Z nich polovina má barvu . Třetina má barvu a šestina má barvu .



Zlomky se objevují i při práci s krychlovými stavbami. Znovu se zde objevuje vztah **celek = polovina + třetina + šestina**. Ten je přítomný i v další úloze.

Úloha:

Polovinu obdélníku vybarvi červeně. Třetinu vybarvi žlutě.
Zbývající část vybarvi zeleně.
Jakou částí celého obdélníku je zelená část?



Úlohy lze samozřejmě **gradovat náročností zlomků nebo počtem základních částí** (v další úloze dvánáctina).

Úloha:

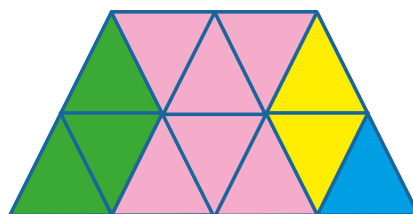
Doplň správné slovo: **polovinu, třetinu, čtvrtinu, pětinu, šestinu** nebo **dvanáctinu**:

Růžové pole tvoří celku.

Zelené pole tvoří celku.

Žluté pole tvoří celku.

Modré pole tvoří celku.



Při práci s kruhovým modelem se často objevuje problém, jak zakreslit čtvrtinu, třetinu, pětinu apod. Pokud žáci neznají ještě úhly, rozdělit např. kruh přesně na třetiny je náročné. Proto se pracuje často na intuitivní úrovni, s odhady. K tomu slouží i následující úlohy.

Úloha:

Doplň správné slovo: polovinu, třetinu, čtvrtinu, šestinu, osminu.

Modré pole tvoří _____ celku.

Oranžové pole tvoří _____ celku.

Červené pole tvoří _____ celku.

Zelené pole tvoří _____ celku.



Úloha:

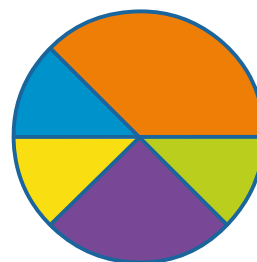
Doplň správné slovo: polovinu, třetinu, čtvrtinu, šestinu, osminu.

Modré pole tvoří _____ celku.

Oranžové pole tvoří _____ celku.

Žluté pole tvoří _____ celku.

Fialové pole tvoří _____ celku.



Žáci získávají zkušenosti s tím, že **celek není vždy stejný**. K tomu nám pomáhají životní zkušenosti – polovina fotbalového zápasu, třetina hokejového zápasu, polovina žáků ve třídě apod. Dobrým pomocníkem bývají i **hodiny**, protože se je žáci postupně učí ve škole, a hlavně skrze životní zkušenost. Toho lze využít i při výuce zlomků.

V následující úloze se objevuje např. zlomek tři čtvrtiny. Učitel může sledovat, zda např. žák používá v převodu minut na hodiny tři čtvrtě hodiny, ale zlomek tři čtvrtiny nepoužije apod. Nevnímá zlomek sám o sobě, ale spojení tři čtvrtě ze života dobře zná.

Úloha:

Spoj, co k sobě patří.



60 minut

20 minut

15 minut

45 minut

30 minut

tři čtvrtě hodiny

půl hodiny

hodina

třetina hodiny

čtvrt hodiny

S žáky používáme jak analogový, tak digitální čas.

Úloha:

Spoj, co k sobě patří.



10 minut

čtvrt hodiny



30 minut

třetina hodiny



15 minut

šestina hodiny



20 minut

tři čtvrtě hodiny



45 minut

půl hodiny

Úloha:

Spoj, co k sobě patří.

2:15

45 minut

třetina hodiny

4:05

30 minut

dvanáctina hodiny

7:30

5 minut

tři čtvrtě hodiny

11:45

20 minut

čtvrt hodiny

22:20

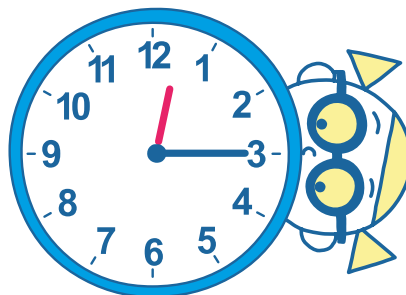
15 minut

půl hodiny

Spojování odpovídajících hodnot může být pro žáky jednodušší. Proto učitel může zadat i tradiční úlohu s doplňováním hodnot. Tam žáci již nemohou vybírat z nabízených odpovědí.

Úloha:

Hodina má minut.
Půl hodiny má minut.
Čtvrt hodiny má minut.
Třetina hodiny má minut.
Tři čtvrtě hodiny má minut.



3. ročník

Ve 3. ročníku je již zpravidla u většiny žáků čtenářská gramotnost na dostatečné úrovni, aby mohli úspěšně řešit **slovní úlohy**. Dodejme, že úspěšnost řešení slovních úloh ovlivňuje mnoho faktorů, mezi něž patří kromě úrovně čtenářské gramotnosti také zejména životní zkušenosti žáků, slovní zásoba a také repertoár řešitelských strategií, které žáci ovládají (například znázornit situaci obrázkem, schopnost řešit úlohu s oporou o nějaký model nebo manipulaci atd.). V následujících čtyřech sadách slovních úloh pracují žáci se zlomky v reálném kontextu.

Každá série úloh je gradovaná. V následující sérii úloh jsou jednotlivé podúlohy gradované tím, co má žák spočítat, přitom vždy žák pracuje s polovinou celku. V úloze a) stačí, aby si žák uvědomil, že druhá polovina je stejná jako ta první. V úloze b) je potřeba určit polovinu z celku. V úloze c) žák z poloviny určuje velikost celku.

Úloha:

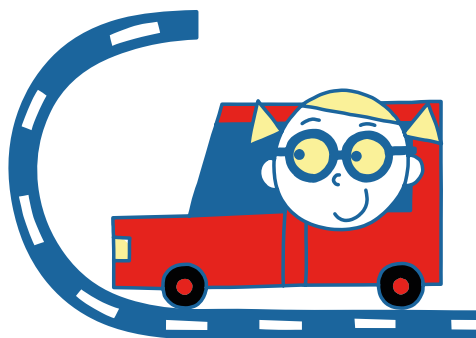
Vyřeš.

- Jedeme k dědovi. Cesta je dlouhá 50 kilometrů.
Nyní jsme v polovině cesty. Kolik kilometrů jsme ujeli?
- Jedeme ke strejdovi. Před sebou máme ještě 9 kilometrů.
Polovinu cesty jsme již ujeli. Kolik kilometrů jsme ujeli?
- Jedeme k babičce. Polovinu cesty jsme již ujeli a zbývá nám ještě 12 kilometrů. Kolik kilometrů je dlouhá celá cesta k babičce?

Úloha:

Vyřeš:

- a) Jedeme k tatínkovi mého tatínka. Polovinu cesty máme za sebou a před sebou máme ještě 26 kilometrů. Kolik kilometrů je dlouhá celá cesta?
- b) Jedeme k tatínkovi maminky. Před sebou máme ještě 17 kilometrů. Polovinu cesty máme za sebou. Kolik kilometrů je dlouhá celá cesta?
- c) Ujeli jsme již 10 kilometrů. To je čtvrtina cesty k maminčině mamince. Kolik kilometrů máme ještě před sebou?



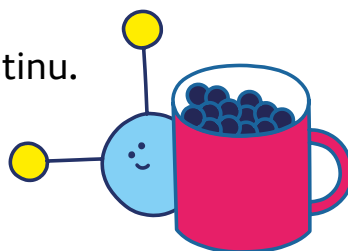
Primárním cílem úlohy je práce se zlomky v reálném kontextu slovních úloh. Sekundárním cílem je skládání relací (vztahů) v prostředí Rodiny. V úloze a) a b) si musí žák k úspěšnému vyřešení úlohy uvědomit, že dvě poloviny tvoří celek. V úloze c) je nalezení doplňku (komplementu) k jedné čtvrtině náročnější – hledaná část (tři čtvrtiny) totiž není kmenový zlomek.

Úloha:

Novákovi byli sbírat borůvky.

Tatínek nasbíral polovinu. Syn třetinu a dcera šestinu.

Kolik hrnků borůvek nasbíral každý z nich, když dohromady nasbírali a) 6, b) 12, c) 9 hrnků?

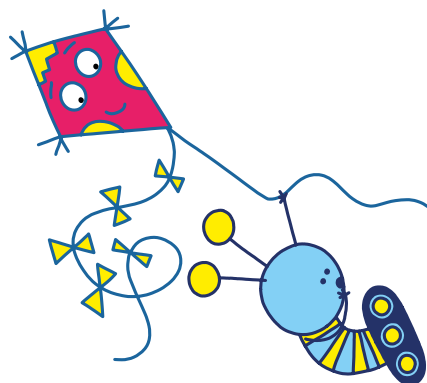


V úloze se opět vyskytuje koncept **polovina + třetina + šestina = celek**, ale zde již bez grafického znázornění. V úloze c) se v řešení objeví zlomek polovina. Všimněme si, že polovina se zde tedy vyskytuje ve dvou různých rolích – v zadání je to polovina všech borůvek (respektive polovina všech nasbíraných hrnků). V řešení úlohy c) je to polovina jednoho hrnku.

Úloha:

Tři kamarádi si společně koupili draka.

- a) Z celkové ceny draka dal Alfred polovinu, Bivoj čtvrtinu a zbylých 10 korun zaplatil Ctirad. Kolik stál drak?
- b) Z celkové ceny draka dal Alfred polovinu, Bivoj třetinu a zbylých 10 korun zaplatil Ctirad. Kolik stál drak?
- c) Z celkové ceny draka dal Alfred polovinu, Bivoj šestinu a zbylých 10 korun zaplatil Ctirad. Kolik stál drak?



Žáci opět řeší úlohu s konceptem polovina + třetina + šestina = celek. Nyní je jejich úkolem zjištění velikosti celku. K tomu je potřeba nejprve určit velikost chybějící části, která zbývá do celku.

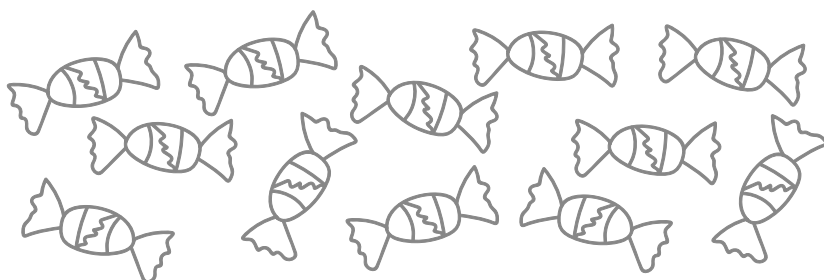
V následující sérii tří úloh určují žáci velikost zlomků z různých celků, což bývá často obtížné. **Gradačních parametrů**, kterými můžeme obtížnost úloh ovlivňovat, je více. Jedním z nich je **počet dětí**, které si odměnu rozdělí. Ve všech třech úlohách jsou děti tři. Menší počet dětí obtížnost úlohy sníží, větší počet naopak zvýší.

Dalším gradačním parametrem je **velikost zlomků** (tedy částí, které děti z odměny dostanou).

Obtížnost následujících úloh lze rozlišit ještě jedním parametrem a tím je **velikost celku**. V první úloze tvoří celek 12 bonbónů. Úloha následující je náročnější, protože celek tvoří 24 kostiček čokolády.

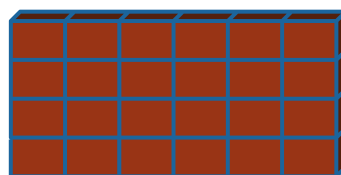
Úloha:

Děti hrály „Člověče, nezlob se!“. Navrhly, jak si podle umístění rozdělí bonbóny. Vítěz dostal polovinu bonbónů, druhý dostal třetinu ze zbytku bonbónů a třetí dostal čtvrtinu z toho, co zbylo. Kolik bonbónů dostal čtvrtý, poslední hráč?



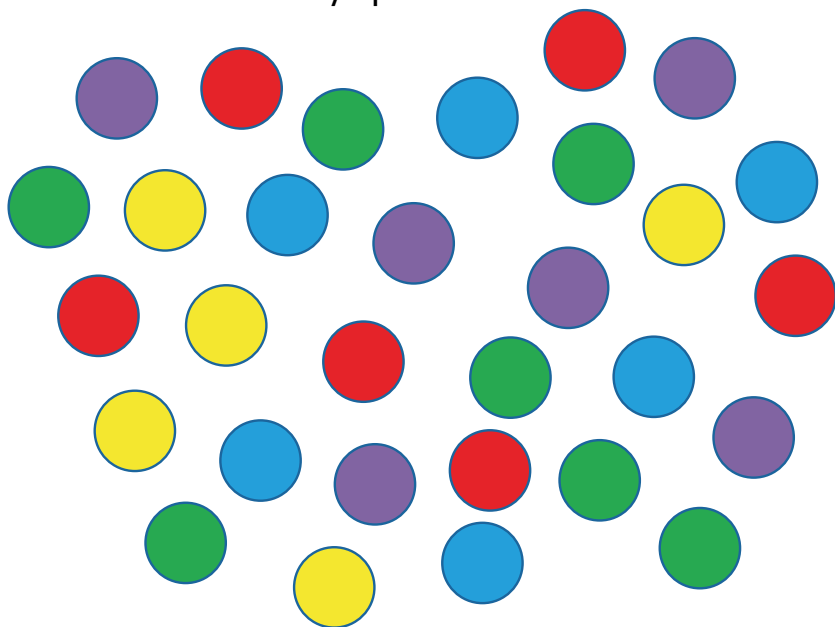
Úloha:

Děti hrály „Člověče, nezlob se!“ Navrhly, jak si podle umístění rozdělí čokoládu. Vítěz dostal polovinu čokolády, druhý dostal třetinu ze zbytku čokolády a třetí dostal čtvrtinu z toho, co zbylo. Kolik kousků čokolády dostal čtvrtý, poslední hráč? Bylo rozdělení odměny, které děti navrhly, spravedlivé?



Úloha:

Děti hrály hru „Člověče, nezlob se!“. Navrhly, jak si podle umístění rozdělí barevné kuličky.
Vítěz dostal polovinu kuliček, druhý dostal třetinu ze zbytku kuliček, třetí dostal pětinu z toho, co zbylo.
Kolik kuliček dostal čtvrtý, poslední hráč?
Bylo rozdělení odměny spravedlivé?



4. ročník

Následující úlohu může učitel využít k tomu, aby žáky seznámil s formálním způsobem zápisu zlomků. Je ale možné, že některý z žáků tento způsob znát bude, takže mu může dát učitel přednost. Žáci tedy mohou k obrázkům zároveň zapsat, že figurka je $\frac{1}{3}$ skupiny, $\frac{1}{4}$ skupiny, $\frac{1}{5}$ skupiny a $\frac{1}{6}$ skupiny. Zároveň si na těchto příkladech mohou žáci uvědomit, že počet červených figurek v každé skupině je stále stejný – vždy se jedná o jednu figurku. To, co se mění, je velikost celku, tedy počet všech figurek ve skupině. Tedy čím větší je celek, tím menší částí celku je jeden její člen.

Úloha:

Nakresli obrázek, ve kterém je červená figurka

- a) pětinou skupiny,
- b) šestinou skupiny.



Obě úlohy o provázku a tyči cílí na určování velikosti celku, když známe některou jeho část. S tím by již měli mít žáci zkušenosti. Pokud by jim tento typ úloh dělal potíže, učitel může zařadit nejprve snazší úlohy, kde je úkolem žáků najít (např. vybarvit nebo spočítat) velikost části známého celku (polovinu, třetinu atd.). V této úloze je nový způsob, kterým je žákům předloženo zadání. Poprvé se v něm vyskytuje formální matematický zápis zlomku. Kromě toho v úloze s tyčí zkracujeme celý zápis pomocí písmene T. Toto zestručnění je motivováno potřebou zkrátit a usnadnit si zápis.

Úloha:

Zjisti délku provázku, když víš, že:

- a) $\frac{1}{2}$ provázku = 15 cm,
- b) $\frac{1}{4}$ provázku = 9 cm,
- c) $\frac{1}{3}$ provázku = 21 cm,
- d) $\frac{1}{5}$ provázku = 14 cm.

Délku tyče označme T.

Zjisti T, když víš, že:

- a) $\frac{1}{2}$ T = 25 cm,
- b) $\frac{1}{4}$ T = 35 cm,
- c) $\frac{1}{3}$ T = 33 cm,
- d) $\frac{1}{5}$ T = 20 cm.

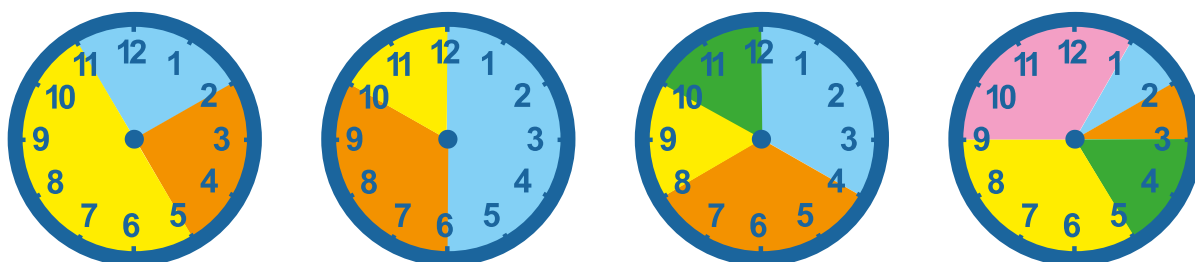
V dalších úlohách s ciferníkem se opět vyskytuje již formální zápis zlomku a od předešlých úloh se liší tím, že úkolem žáků je **vyjádřit zlomkem všechny části celku**. Ciferníky v obou úlohách se liší. V první úloze pracujeme s hodinovým ciferníkem, v druhé úloze se pouštíme do jemnějšího dělení a pracujeme s ciferníkem minutovým.

Rovnost, kterou zapsala v druhé úloze Kira, je pouze formálním matematickým zápisem situace, která je znázorněná na ciferníku – všechny barevné části dávají dohromady jeden celý ciferník. Pro některé žáky 4. ročníku může být tento zápis ještě náročný.

Úloha:

Na prvním ciferníku je modře vybarvena jeho čtvrtina.

Zapišeme modrá = $\frac{1}{4}$ C. Stejně zapiš, jaká část ciferníku je vybarvena oranžově a jaká žlutě. Totéž proved' u ostatních ciferníků.



Úloha:

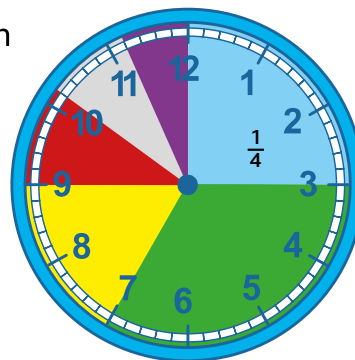
Ted' budeme pracovat s ciferníkem, na kterém jsou vyznačeny i minuty. Těmi je ciferník rozdělen na 60 částí. Modrá část je $\frac{1}{4}$ ciferníku a to je 15 minut. To zapíšeme: modrá = $\frac{1}{4}C = 15 \text{ min.}$

Podobně zapíše i další barevné části ciferníku (zlomkem i počtem minut).

Kira, po vyřešení předchozí úlohy, napsala:

$$\frac{1}{4}C + \frac{1}{3}C + \frac{1}{6}C + \frac{1}{10}C + \frac{1}{12}C + \frac{1}{15}C = 1C.$$

Rozumíte Kiře?



Úloha:

Třetina tyče je modrá, třetina zelená a zbytek, 40 cm, je červený. Jak dlouhá je tyč?



Tuto úlohu můžeme zapsat $\frac{1}{3}T + \frac{1}{3}T + 40 \text{ cm} = T$.

S podobnými úlohami, ve kterých se vyskytuje tyčový model zlomku, mají již žáci zkušenosti. Nyní tuto úlohu zapisují formálním matematickým zápisem – tvoří **rovnici**. Není třeba, aby žáci dále rovnici řešili. Úlohu vyřeší jednoduššími způsoby.

Následují obdobné typy úloh, které jsou však namísto obrázku formulované **tabulkou**. Každá tabulka se skládá z několika podúloh. **Gradačními parametry jsou zde délka tyče, velikost zlomků, se kterými pracujeme, nebo počet oken tabulky.** Žáci si mohou v tabulce všimnout důležitých vztahů mezi jednotlivými sloupci. Kupříkladu v poslední tabulce můžeme šestinu délky tyče spočítat tak, že polovinu délky tyče vydělíme třemi, protože šestina se do poloviny vejde třikrát. Podobné vztahy mohou žáci buď využít při řešení, nebo pokud je neznají, mohou být předmětem třídní diskuze po vyplnění tabulky.

Úloha:

Tyč je dlouhá 60 cm. Dopln tabulku.

celá tyč	polovina tyče	třetina tyče		
60 cm			15 cm	10 cm

Známe délku tyče $T = 60 \text{ cm}$. Dopln tabulku.

1 T	$\frac{1}{2}T$	$\frac{1}{3}T$		
60 cm			15 cm	10 cm

Úloha:

Známe délku tyče $T = 120$ cm. Doplň tabulku.

$1T$	$\frac{1}{2}T$	$\frac{1}{6}T$	$\frac{1}{12}T$			
120 cm				40 cm	24 cm	12 cm

Čím jsou žáci starší, tím jim předkládáme **textově náročnější úlohy**. Žáci se v nich učí text zpracovávat, hledat klíčové informace k vyřešení úlohy.

Úloha:

Vyřeš úlohy:

- Plavky stály 320 Kč. Potom je zlevnili o polovinu.
Kolik Kč stály plavky po slevě?
- Plavky stály 420 Kč. Potom je zlevnili o polovinu.
Následovně novou cenu zlevnili ještě jednou o polovinu.
Kolik Kč stály plavky po obou slevách?
- Plavky zlevnily o polovinu. Plavky stály po slevě 150 Kč.
Kolik Kč stály plavky před slevou?

Gradace je jasná. V úlohách a) a b) je znám celek, v úloze c) nikoli. Úloha b) má na rozdíl od úlohy a) dva řešitelské kroky (dvakrát se zlevňuje).

Učitel může samozřejmě zadat i úlohy s menšími čísly. Je otázka, zda žáci budou úspěšnější při počítání s menšími čísly, která nejsou celá, nebo budou úspěšnější u „hezčích“ počtů, jako např. v úloze se 150 Kč. Přidáváme další sérii úloh s menšími čísly.

Úloha:

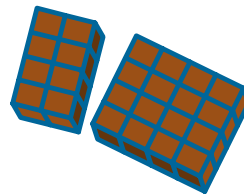
Vyřeš.

- Sluneční brýle stály 120 Kč. Poté je zlevnili o polovinu.
Kolik Kč stály brýle po slevě?
- Velká čokoláda stála 88 Kč. Poté ji zlevnili o polovinu.
Další týden novou cenu zlevnili ještě jednou o polovinu.
Kolik Kč stála čokoláda po obou slevách?
- Gelová pera zlevnila o polovinu. Po slevě stála pera 46 Kč.
Kolik Kč stála pera před slevou?
- Tričko zlevnili o polovinu. Novou cenu následně opět zlevnili o polovinu a tričko poté stálo 26 Kč.
Jaká byla cena trička před slevami?

Pochopitelně i ve vyšších ročnících se stále vracíme k osvědčeným modelům. Postupně jen zvyšujeme náročnost úloh. V další úloze se pracuje s modelem čokoláda, kde žáci poznávají kmenové zlomky. Pokud situace nebude zaznamenána obrázkem, bude úloha pro některé žáky náročnější. Další úlohu tak učitel může ztížit vynecháním obrázku.

Úloha:

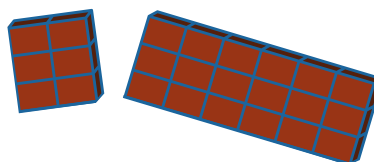
Z tabulky čokolády zůstala jen třetina, tj. 8 kostiček.
Jak velká byla tabulka čokolády původně?



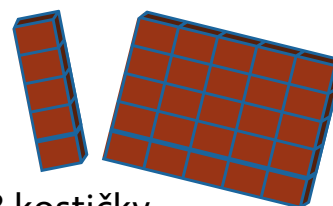
Úloha:

Vyřeš.

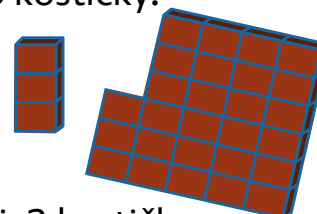
Z tabulky čokolády zůstala jen čtvrtina, tj. 6 kostiček.
Jak velká byla tabulka čokolády původně?



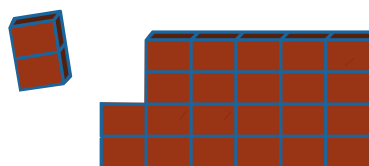
Z tabulky čokolády zůstala jen šestina, tj. 5 kostiček.
Jak velká byla tabulka čokolády původně?



Z tabulky čokolády zůstala jen desetina, tj. 3 kostičky.
Jak velká byla tabulka čokolády původně?



Z tabulky čokolády zůstala jen dvanáctina, tj. 2 kostičky.
Jak velká byla tabulka čokolády původně?



Zvýšenou náročnost přinášejí další úlohy.

Úloha:

Etapu cyklistického závodu měří $E = 180$ km. Vyřeš.

a) $\frac{1}{4}E + 15 = \text{---} E$

b) $\frac{1}{4}E + \frac{1}{12}E = \text{---} E$

c) $E - 108 = \text{---} E$

d) $\frac{1}{5}E - \frac{1}{15}E = \text{---} E$

e) $\frac{1}{3}E - \frac{1}{4}E = \text{---} E$

Úloha:

Pět dní má $P = 120$ hodin. Vyřeš.

a) $\frac{1}{6}P + \frac{1}{3}P = \text{---} P$

b) $\frac{1}{3}P + \frac{1}{4}P = \text{---} P$

c) $\frac{1}{3}P - \frac{1}{12}P = \text{---} P$

d) $\frac{1}{4}P - 6 \text{ hodin} = \text{---} P$

d) $P - 2 \text{ dny} = \text{---} P$

Hlavním cílem těchto úloh je fixovat myšlenku, že **celek není vždy stejný**. Tyto úlohy jsou ale náročné používáním písmen. Proto jsou na ně žáci postupně připravováni pomocí úloh jako: „Třetina provázku je 20 cm. Kolik měří celý provázek?“ Poté se tyto úlohy zkrátí na $\frac{1}{3}P = 20$ cm. Důležité je, aby žáci měli dobrou představu, co je celek úlohy. V případě potíží se znovu nabízí úlohy rozdělit. Např. v úloze s etapou a) nejprve žáci určí čtvrtinu E (etapa = 180 km), což je 45 km. K výsledku přidají 15 km → 60 km. A poté zjistí, že je to třetina celé etapy (60 ze 180 km).

Tyto úlohy lze dále gradovat, např. použitím náročnějších zlomků jako $\frac{1}{7}$ apod.

Úloha:

Označme ciferník $C = 12$ hodin. Vyřeš.

a) $C - 6 \text{ hod} = \text{---} C$

b) $C - \text{---} C = 8 \text{ hod}$

c) $\text{---} C + 10 \text{ hod} = C$

d) $\frac{1}{3}C - \frac{1}{4}C = \text{---} C$

Úloha:

Jedeme k babičce. Musíme urazit vzdálenost $V = 140$ km. Vyřeš.

a) $\frac{1}{5}V + 42 \text{ km} = \text{---} V$

b) $V - 112 \text{ km} = \text{---} V$

c) $\frac{1}{7}V + 15 \text{ km} = \text{---} V$

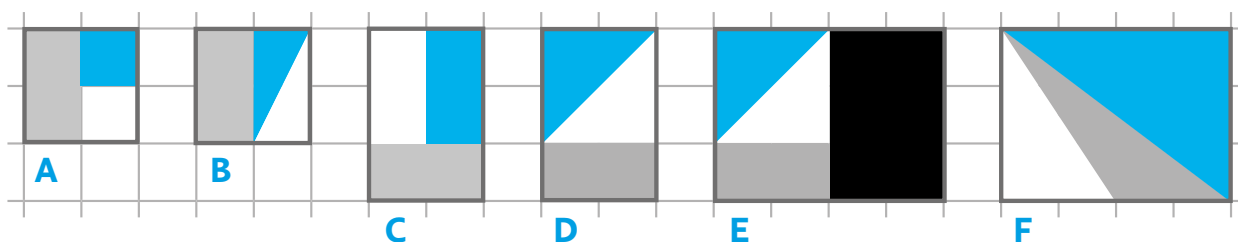
d) $\frac{1}{4}V - \frac{1}{5}V = \text{---} V$

V úlohách žáci určují velikosti jednotlivých částí celku **bez opory o model či obrázek**. Sledujeme, zda budou mít žáci potřebu si namalovat obrázek nebo řešit úlohu s nějakým modelem.

Úlohy se zlomky je vhodné zadávat i v **geometrickém kontextu**. Následující dvě úlohy propojují zlomky s počítáním obsahů geometrických útvarů (zejména pak trojúhelníků).

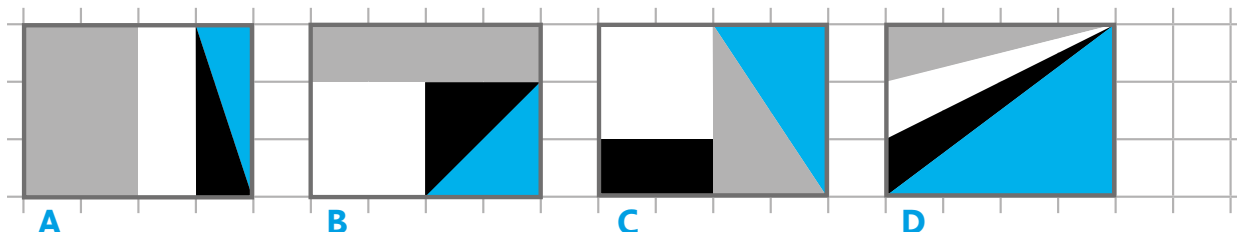
Úloha:

Zapiš číslem, jaká část obsahu daného čtyřúhelníku je modrá, šedá, bílá a v případě E i černá.



Úloha:

Zapiš číslem, jaká část obsahu daného čtyřúhelníku je modrá, šedá, bílá a jaká černá.

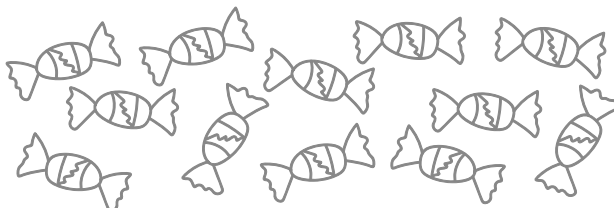
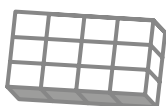
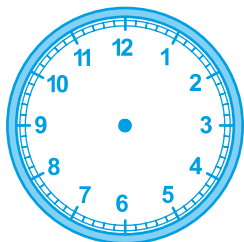


5. ročník

V 5. ročníku se objevují i **početní operace se zlomky**, konkrétně sčítání a odčítání. Jde o dobrou přípravu, kterou žáci zúročí na 2. stupni. Důležitá je i pestrost modelů, jak ukazují následující úlohy.

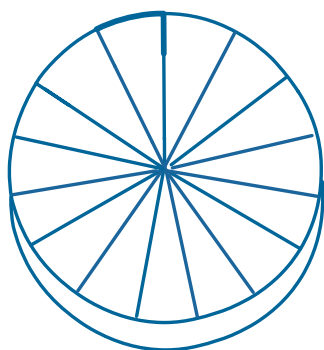
Úloha:

Znázorni na každém ze čtyř různých modelů a vypočítej $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$.

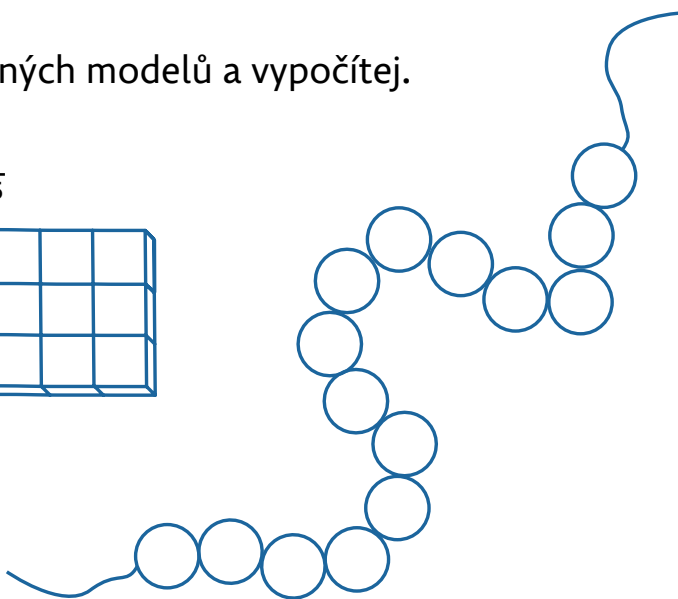
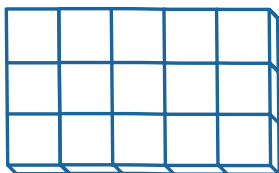


Úloha:

Znázorni na každém ze čtyř různých modelů a vypočítej.

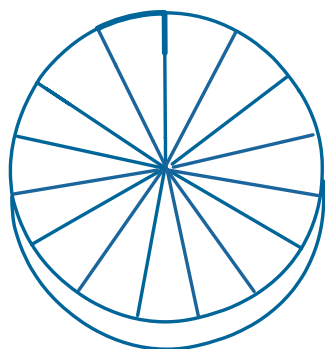


$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$$

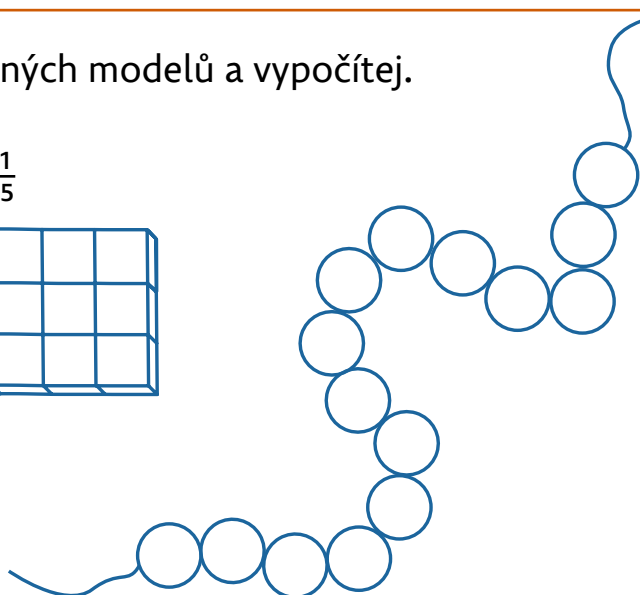
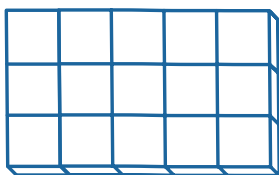


Úloha:

Znázorni na každém ze čtyř různých modelů a vypočítej.

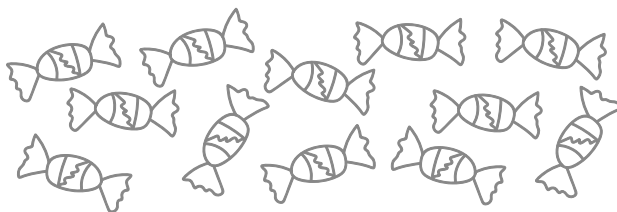
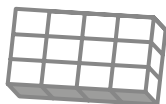
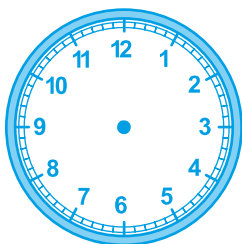


$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5}$$



Úloha:

Znázorni na každém ze čtyř různých modelů a vypočítej $\frac{1}{2} - \frac{1}{6}$.



Úlohy lze samozřejmě dále **gradovat** např. **počtem objektů, náročností zlomků**, pro expertní žáky lze např. zadat i **úlohu s odčítáním, která má záporný výsledek**. Ale to je spíše výzva na 2. stupeň. Tam už nepomáhají modely a žáci pracují více se zlomky ve struktuře.

Opět se objevují úlohy, které často žáky vedou k potřebě si situaci vizualizovat. To je klíčový útok na jejich metakognici. Pokud si odnesou tuto výhodu zakreslování si situace, často jim to pomůže k vyřešení úlohy.

Úloha:

Na modro je natřená čtvrtina tyče.

Jakou část tyče musíme ještě natřít, aby byla na modro natřená:

- a) polovina tyče,
- b) třetina tyče,
- c) dvě pětiny tyče?

GEOBOARD

Geoboard je čtvercová deska, na které modelujeme geometrické obrazce pomocí gumiček. Pro naše účely používáme geoboard s devíti (3×3) kolíky uspořádanými do čtverce. Prostředí je manipulativní, ruce pomáhají lépe porozumět geometrickým tvarům a vztahům. Žáci se připravují rovněž na pozdější práci se čtvercovou mříží, pravítkem a kružítkem.

Pokud není řečeno jinak, modeluje žák obrazce vždy pomocí jedné gumičky.

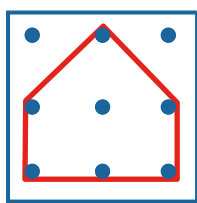
1.-2.ročník

Tvorba obrázku/obrazce

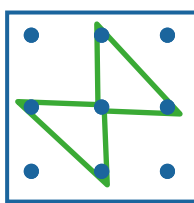
Úloha:

Pomocí jedné gumičky vytvoř na geoboardu:

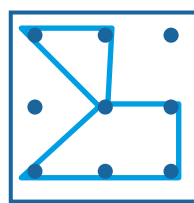
- a) jakýkoliv obrázek,
- b) obrázek podle předlohy.



domeček



mašle



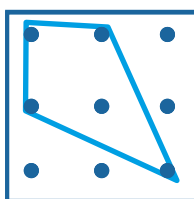
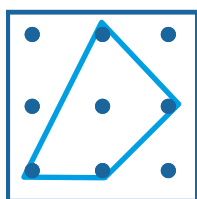
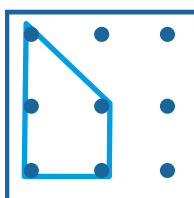
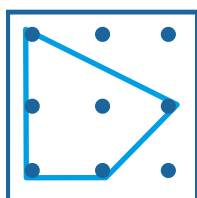
robot

Úvodní aktivity s geobardem mají formu hry. Žáci se seznamují s pomůckou, vytvářejí obrázky, o kterých si společně povídají.

Úloha:

Pomocí jedné gumičky vytvoř na geoboardu:

- a) jakýkoliv obrazec,
- b) obrazec podle předlohy.



Žáci si o obrázcích povídají s ohledem na věk. Mladší žáci budou tvořit především obrázky, které dokáží životně pojmenovat – viz předchozí úloha. Postupně se budou učit pojmenovávat mnohoúhelníky (trojúhelníky, čtyřúhelníky) nebo určovat jejich vlastnosti. Tomu může dobře posloužit i učitel, který v případě výskytu pojmy sám pravidelně používá. Pokud se např. objeví ve třídě poslední z obrázků, mladší žáci ho pojmenují drak. Učitel sám řekne, že v matematice takovému útvaru říkáme deltoid.

Úloha:

Pomocí gumičky vytvoř na geoboardu čtverec, obdélník, trojúhelník, ... Útvar překresli (přerýsuj) do šablony.

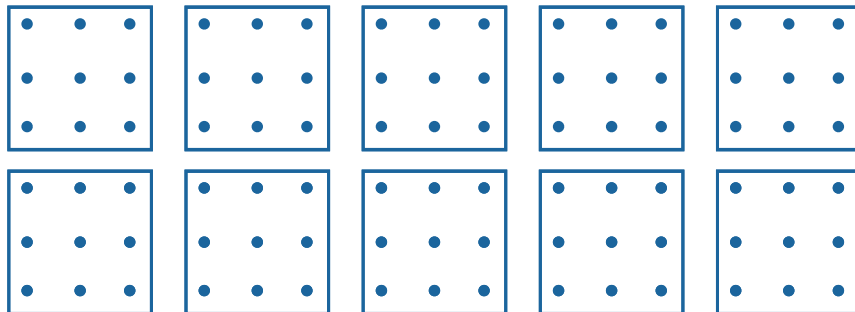
Úloha přináší nové myšlenky. Žáci již pracují s geometrickými pojmy, jako např. trojúhelník. Navíc jsou žáci vyzváni k překreslení obrázku na papír. Tím se mimo jiné připravují na práci v mříži.

3.–5. ročník

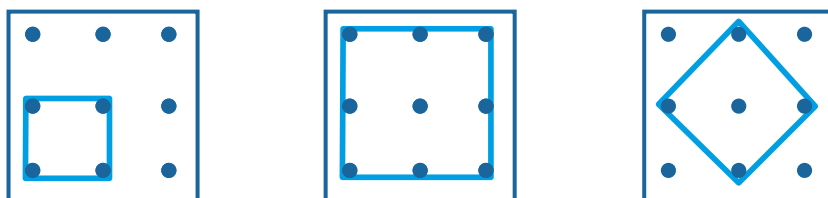
Klasifikace útvarů

Úloha:

Pomocí gumičky vytvoř na geoboardu čtverec a překresli ho do šablony.



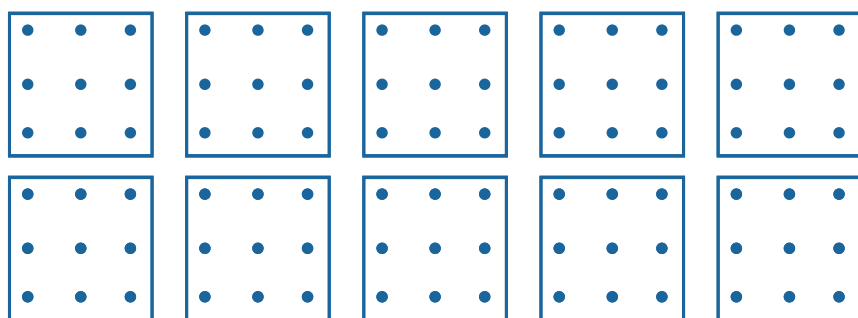
Čtverců lze vytvořit několik různých. Z hlediska obsahu jsou tři typy: čtverce s obsahem 1 malého čtverečku, čtyř malých čtverečků a dvou malých čtverečků – viz obr.



Čtverce s obsahem 1 čtvereček (první obr.) jsou celkem čtyři. Všechny mají stejný tvar, ale jsou každý na různých kolících. S žáky je dobré diskutovat o počtu řešení. Pokud řeknou: „Takové čtverce jsou celkem čtyři“, dostáváme se do oblasti kombinatoriky. Taková výzva (na počet všech čtverců) se objevuje v následující úloze.

Úloha:

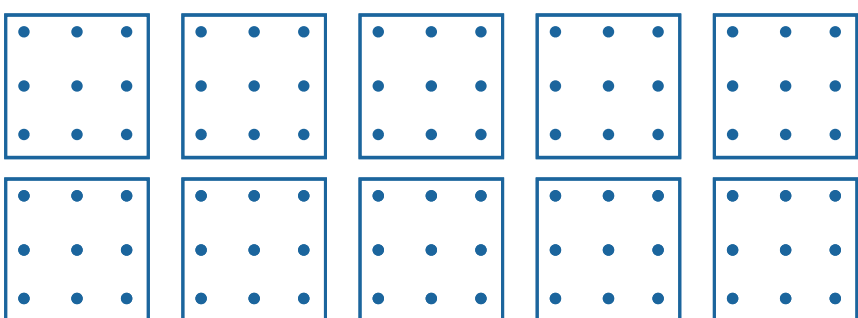
Pomocí gumičky vytvoř co nejvíce různých čtverců
a překresli je do šablony.



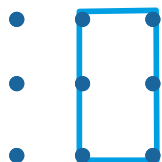
Postupně žáci hledají na geoboardu i další geometrické útvary – obdélníky, trojúhelníky a další mnohoúhelníky.

Úloha:

Pomocí gumičky vytvoř co nejvíce různých obdélníků
a překresli je do šablony.

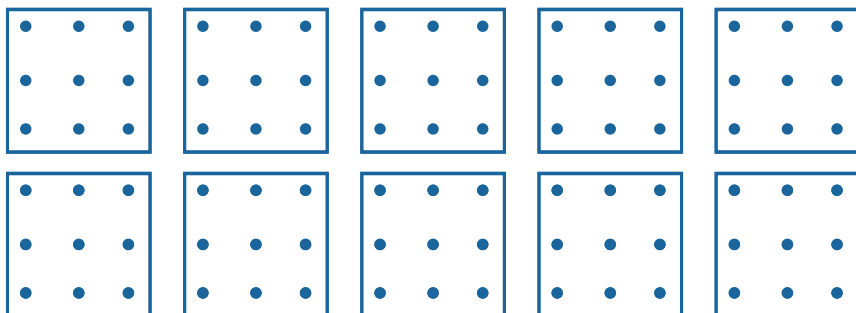


Řešení:



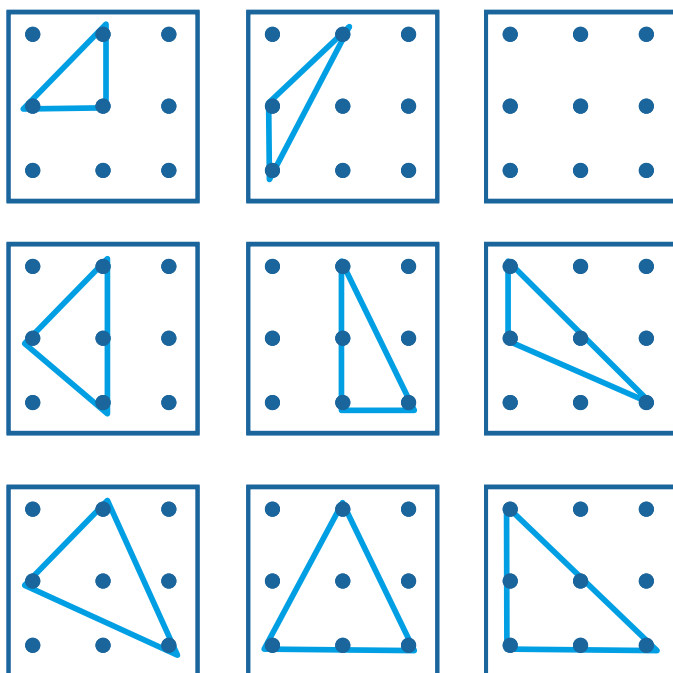
Úloha:

Pomocí gumičky vytvoř co nejvíce různých trojúhelníků a překresli je do šablony. Jsou všechny trojúhelníky stejně velké? Mají některé trojúhelníky alespoň dvě stejně dlouhé strany?



Stejně jako u předešlých úloh mohou žáci začít volnou tvorbou. Poté lze zadávat podmínky tvorby, např.: „Vytvoř trojúhelník, který má dvě strany stejně dlouhé.“ Nebo později: „Vytvoř trojúhelník s obsahem dva čtverečky.“

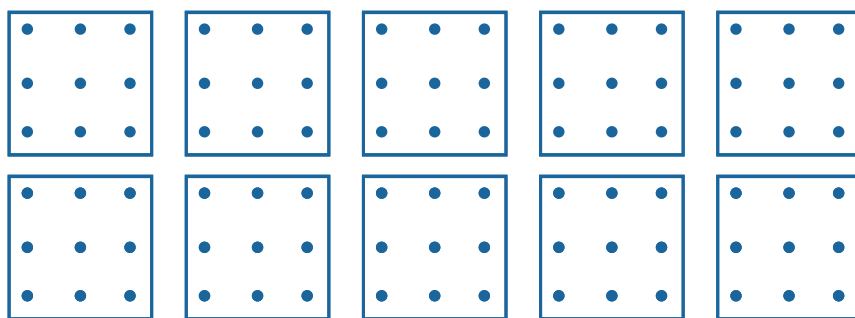
Řešení:



Jak lze vytvořit gradovanou výzvu na geoboardu, ukazuje další série úloh. V úloze a) hledají žáci jeden rovnoramenný trojúhelník. V úloze b) hledají žáci další rovnoramenné trojúhelníky. Řešení tak bude více a s žáky se opět dostáváme do oblasti kombinatoriky. Žáci mohou dostat i výzvu, aby našli všechna řešení. Úloha c) nemá v geoboardu řešení – rovnostranný trojúhelník nelze vytvořit. To, že úloha nemá řešení, lze také pokládat za gradační parametr.

Úloha:

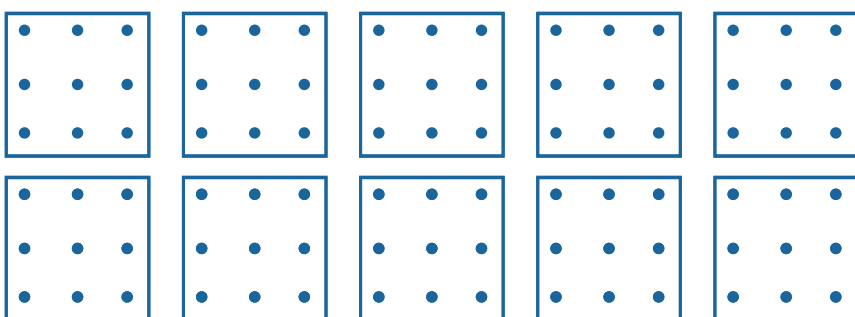
- Pomocí gumičky vytvoř trojúhelník, který má dvě strany stejně dlouhé, a zakresli ho do šablony.
- Pomocí gumičky vytvoř co nejvíce různých trojúhelníků, které mají dvě strany stejně dlouhé, a zakresli je do šablony.
- Pomocí gumičky vytvoř co nejvíce různých trojúhelníků, které mají všechny strany stejně dlouhé, a zakresli je do šablony.



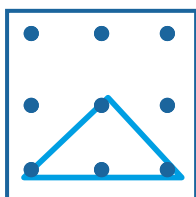
Z hlediska gradace se dá očekávat, že tvorba „víceúhelníků“ bude pro žáky náročnější.

Úloha:

Vytvoř na geoboardu co nejvíce různých pětiúhelníků a překresli je do šablony.



V úlohách s n-úhelníky se může objevit jiné porozumění žáka/ů klasifikaci útvarů podle počtu úhlů. V praxi se objevila myšlenka, že útvar na obrázku má čtyři vrcholy, a tudíž je to čtyřúhelník.

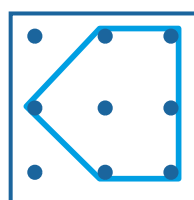
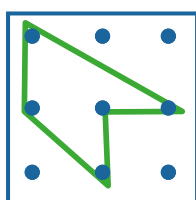
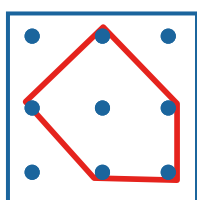


Žák počítá všechny kolíky geoboardu za vrcholy útvaru. Není to chyba, je to otázka chápání situace a zde je ideální směřovat žáky ke třídní diskuzi. Pokud se nedomluví, nevadí, situace se vyjasní později. Např. až žáci budou obrázky překreslovat na čistý papír, podobný problém nenastane.

Pokud žáci mají s tvořením „víceúhelníků“ potíže, lze jim zadat úlohu tak, že mají „víceúhelníky“ modelovat podle nakresleného obrázku. Důležité je i diskutovat, proč a zda se skutečně jedná (v tomto případě) o pětiúhelníky. Žáci ukazují jednotlivé úhly (vrcholy) a počítají je.

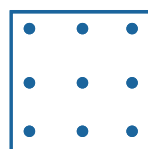
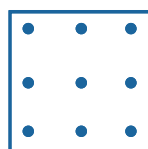
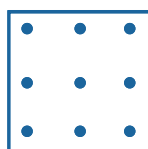
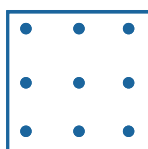
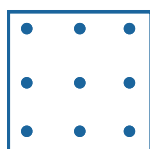
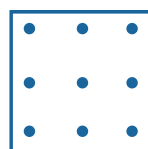
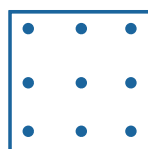
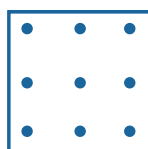
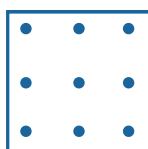
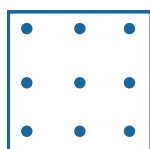
Úloha:

Pomocí gumičky postupně vymodeluj na geoboardu dané pětiúhelníky.

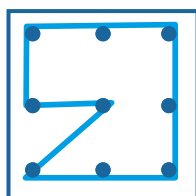


Úloha:

Vytvoř různé mnohoúhelníky a zakresli je do šablony. Kolik vrcholů nejvíce má mnohoúhelník, který jsi vytvořil?

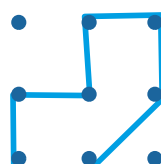
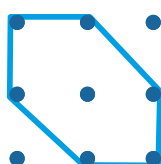
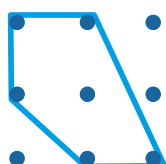


Teoreticky lze sestavit i devítiúhelník. Záleží na vnímání situace, kterou jsme popisovali výše.



Řešení:

Trojúhelníky a čtyřúhelníky jsme už skládali. Pokračujeme dále, např.:



Obsah

Geoboard lze také využít pro počítání obsahů. Jako jednotka se ideálně vezme malý základní čtvereček. Takže celý geoboard má obsah 4 čtverečky. Dříve než žáci budou řešit úlohy s obsahy na mříži, je dobré obsah zažít i na geoboardu. Útvary, které lze vytvořit, jsou velikostí geoboardu velice omezeny, a tím i jejich obsahy.

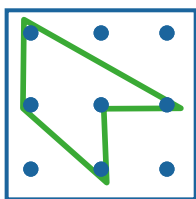
Úloha:

Urči obsah obrazce vytvořeného na geoboardu.

Volná tvorba útvaru může ukazovat jistou sebedůvěru žáků. Pokud zvolí např. takové čtverce,

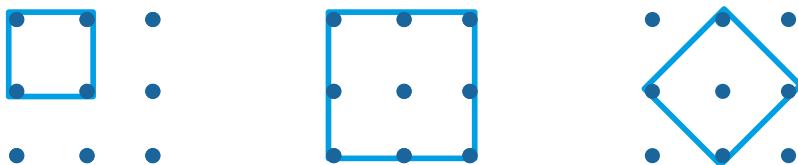


pravděpodobně s úlohou nechtějí mít větší práci. Někteří žáci ale půjdou do větších výzev, např.:



Úloha:

Urči obsah čtverce, který jsi na geoboardu sestavil.



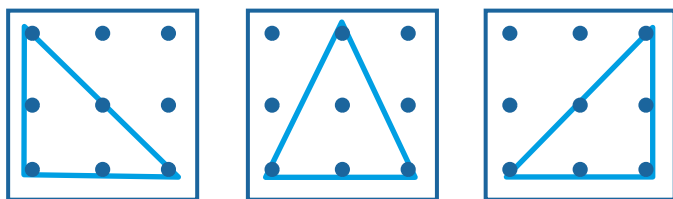
Řešení:

Žáci zapisují dle dohody jednotky obsahu. Již jsme psali, že nejobvyklejší je jeden základní malý čtvereček. V této úloze tedy budou obsahy útvarů postupně 1 čtvereček, 4 čtverečky, 2 čtverečky. Může se ale objevit i jiná jednotka obsahu, např. jeden malý trojúhelníček, který vznikne rozpůlením zmíněného základního čtverečku. Důležité jsou řešitelské strategie žáků z hlediska obsahu náročnějších útvarů. Např. obsah posledního čtverce mohou počítat sčítáním malých trojúhelníčků ($4 \cdot 0,5 = 2$) nebo např. metodou rámování ($4 - 2 = 2$).

Dobře se gradují úlohy s obsahy trojúhelníků.

Úloha:

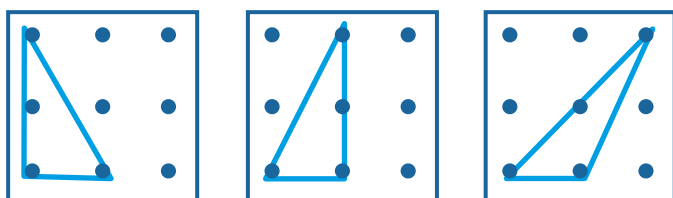
Urči obsah trojúhelníků.



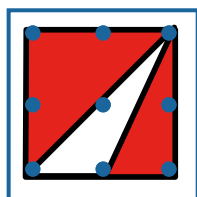
Zde pravděpodobně nebudou mít žáci potíže, 1. a 3. trojúhelník jsou polovinou čtverce 2×2 ; 2. trojúhelník zjistí např. rozdělením trojúhelníku na dva trojúhelníky podle výšky, vystřížením a složením do obdélníku 1×2 . Vždy záleží na řešitelské strategii, kterou mají žáci vybudovanou.

Úloha:

Urči obsah trojúhelníků.



U další série je situace podobná. Zde jsou obsahy prvních dvou trojúhelníků lehčeji zjistitelné. Obtížnější je zjistit obsah posledního (tupoúhlého) trojúhelníku. Zde opět přichází na řadu strategie. Žáci se postupně učí strategii **rámování**:



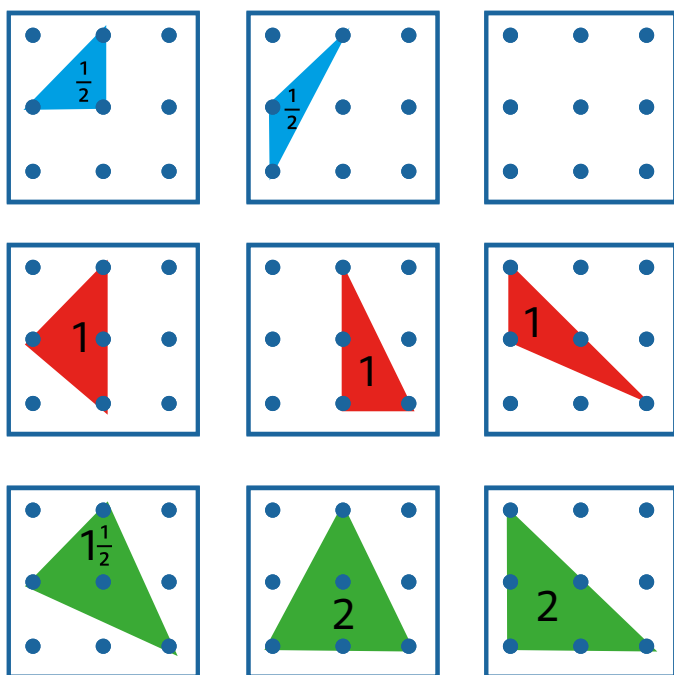
Žáci trojúhelník orámují a od celkového rámu (obsah 4) odčítají obsahy červených částí ($4 - 2 - 1 = 1$). Pozn.: Později žáci (většinou až) na 2. stupni objeví **Cavalieriho princip**. Ten říká, že trojúhelníky se stejnou základnou a třetím vrcholem, který je libovolně posouván v konstantní výšce, mají stejné obsahy. Pokud si žák takový objev zvnitřní, obě výše uvedené série úloh již pro něj gradaci nepředstavují.

Úloha:

Urči obsah trojúhelníků, které je možné na geoboardu sestavit.

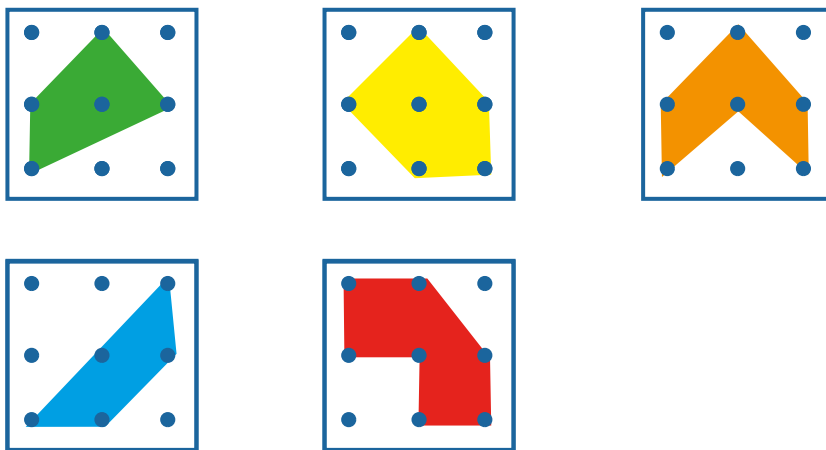
Jak bylo psáno, záleží, jaké strategie mají žáci vybudované. Přesto se za gradační parametr dá pokládat i obsah celočíselný a „neceločíselný“. Např. na obrázku se objevuje trojúhelník s obsahem 1,5 čtverečku.

Řešení:



Úloha:

Urči obsah následujících obrazců.



Pokud opustíme trojúhelníky a čtverce, žáci mohou zkoumat „obsahy víceúhelníků“. Gradace bude podobná jako u trojúhelníků (složitost útvaru, „celočíslnost“ obsahu).

Náročnější výzvy pro žáky mohou být takové, že žáci k danému obsahu sestrojují odpovídající útvar. Gradace se nabízí stejná, pravděpodobně budou složitější obsahy s necelým číslem. Hodně bude záležet na tom, jaké úlohy již mají žáci vyřešené.

Úloha:

Vytvoř na geoboardu obrazce s níže zadaným obsahem.
U každého hledej 2 řešení. Obrazce poté přerýsuj do šablony.

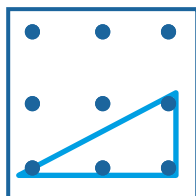
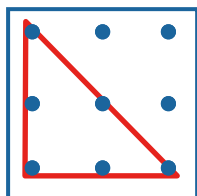
- a) 0,5
- b) 1
- c) 1,5
- d) 2

Chirurgie obrazců

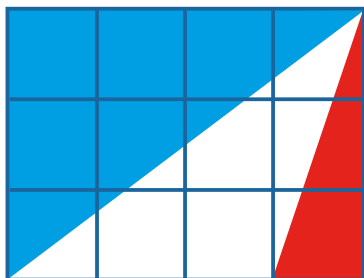
Úlohy s chirurgií jsou důležité pro další rozvoj žáků. Učí se skládat rovinné útvary a tím vytvářejí jiné rovinné útvary. Nebo jeden útvar rozdělují na vícero rovinných útvarů.

Úloha:

Přerýsuj dvakrát na čtverečkovaný papír a vystříhni.
Dva ze čtyř trojúhelníků dej k sobě a vytvoř nový trojúhelník
nebo čtyřúhelník. Zakresli na čtverečkovaný papír.



Žáci se učí skládat dva rovinné útvary dohromady a tím vytvářet jiné rovinné útvary. Jde o disciplínu, kterou v budoucnu mnohokrát využijí. Např. při počítání obsahu trojúhelníku skrze metodu rámování využívají toho, že od celku (rámu) odečítají jeho části. Např. na obrázku je obsah bílého trojúhelníku roven 4,5 (obsah rámu – obsah modré části – obsah červené části).

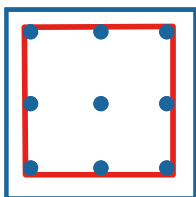


V naší úloze žáci zjišťují, že skládat k sobě lze trojúhelníky se stejnou délkou strany.

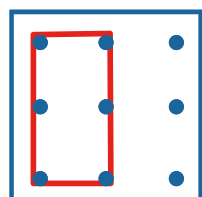
Úloha:

Každý obrazec rozděl na 2 shodné obrazce.

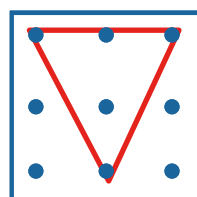
A



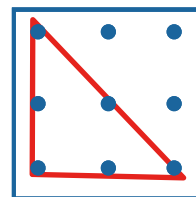
B



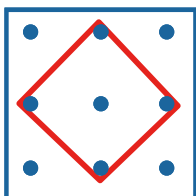
C



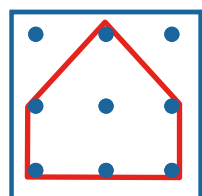
D



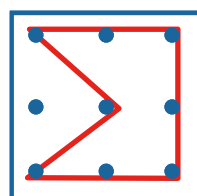
E



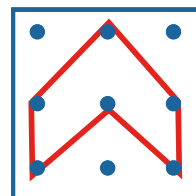
F



G

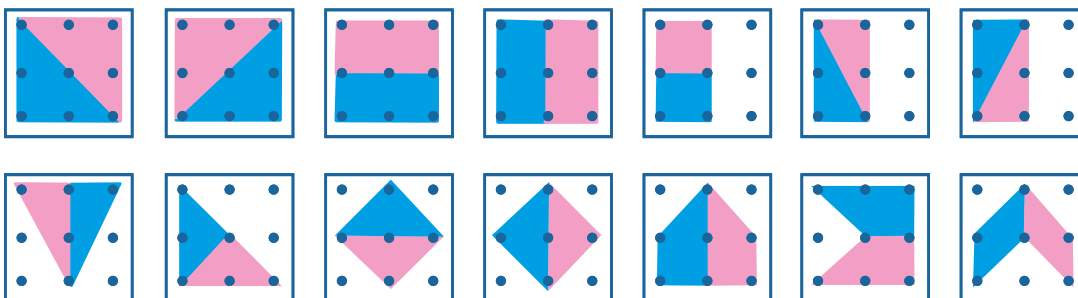


H



Podobné úlohy mimo chirurgie cílí na shodnost útvarů. S žáky se diskutuje, jak poznají shodné útvary. Jedno z tvrzení, se kterým žáci často přijdou, je: „Pokud útvary vystříhneme a položíme je na sebe a ony splynou, pak jsou shodné.“

Řešení:



Úloha:

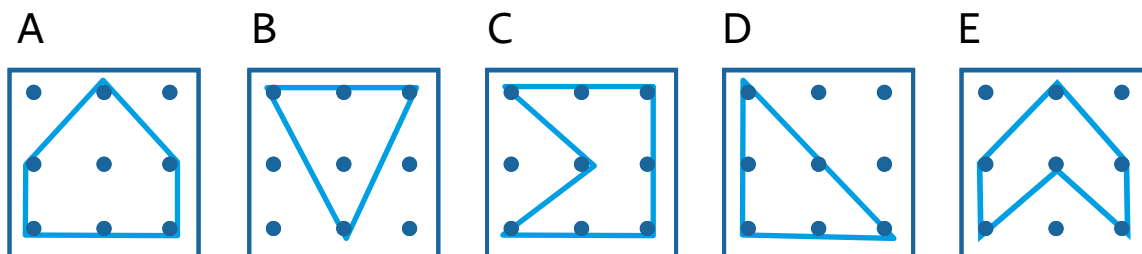
Vytvoř obrazec, který nelze rozdělit na dva stejné obrazce.

Z hlediska gradace jde o náročnější úlohu než najít rozdělení útvaru na dva shodné obrazce. Žáci na 2. stupni pojmenují, že rozdělit jdou osově souměrné útvary.

Náročnější výzvou je rozdělení útvaru a skládání obdélníku.

Úloha:

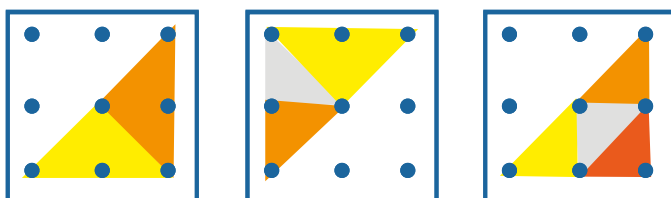
Pět útvarů přerýsuj z geoboardu do šablony.
Každý útvar rozděl jednou čarou na alespoň dva díly tak,
aby z nich bylo možné složit obdélník.



Úloha:

Sestav na geoboardu a) 2, b) 3, c) 4 trojúhelníky tak,
aby vznikl trojúhelník.

Řešení:

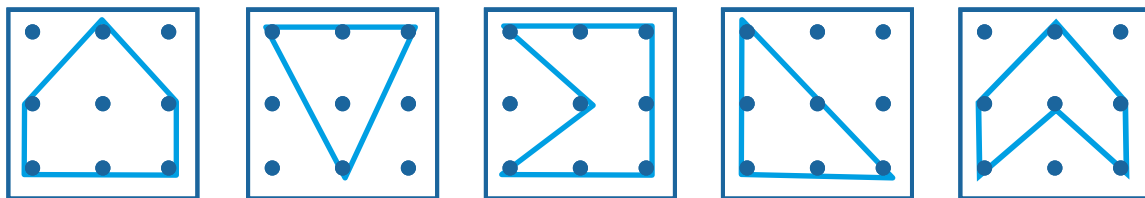


Zaměřit se lze i na obvody rovinných útvarů.

Obvod

Úloha:

Přerýsuj obrazce do centimetrové mříže.
Porovnej obvody obrazců nejdříve odhadem
a pak ověř co nejpresnějším měřením v milimetrech.



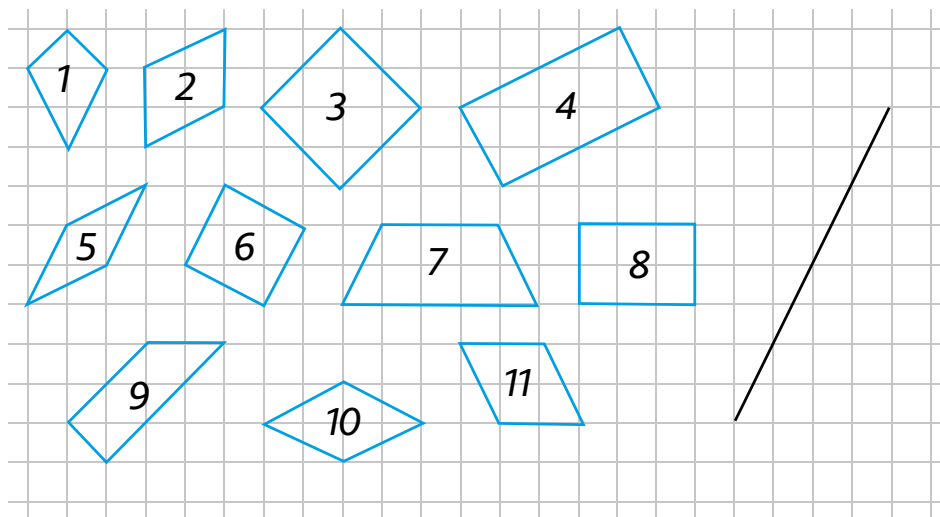
Úlohu lze gradovat zadáním. Pokud žáci odhadují a poté odhady kontrolují měřením, jedná se o relativně myšlenkově nenáročnou práci. Do popředí se spíše dostává přesnost měření. Pokud ale žáky vyzveme, aby porovnávali obvody útvarů bez měření, náročnost pak stoupá.

Žáky vedeme k tomu, aby i bez měření měli nástroje na to, jak útvary z hlediska obvodu porovnat. Např. první a čtvrtý obrázek mají stejný obvod, protože oba jsou složeny z úseček stejné délky (čtyři úsečky 1 cm, dvě úsečky coby úhlopříčka čtverce 1×1).

Pokud opustíme prostředí Geoboard a začneme používat neomezenou mříž, lze vytvářet ještě pestřejší galerii útvarů, jako např. v další úloze:

Úloha:

Na drakiádě soutěžily děti v různých disciplínách.
Jednou z nich byl originální čtyřúhelníkový drak.
Všichni draci byli olemováni modrou páskou.
Porovnejte obvody jednotlivých útvarů s délkou černé úsečky.



Navazující aktivity:

- SOVA s vybranými obrázky se stejným obsahem
- Vysílač–přijímač/Telefon – přepošli svůj obrazec někomu jinému

Vysílač–přijímač/Telefon

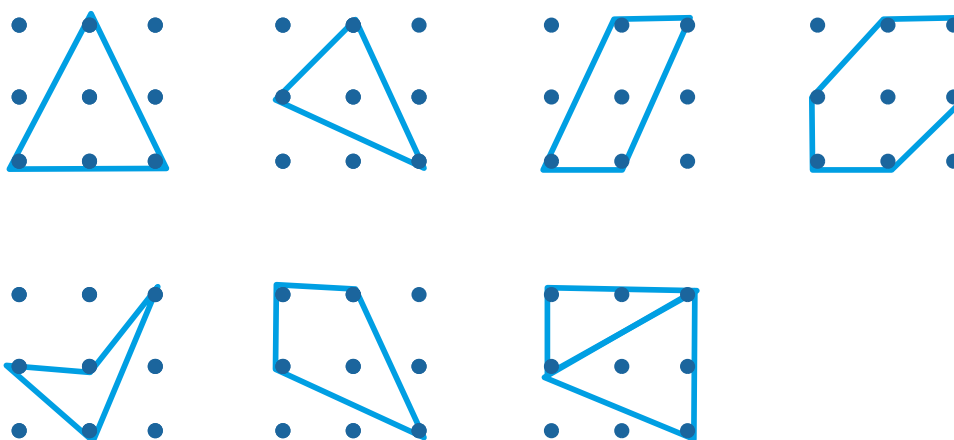
(Vysílač je jednosměrný – tj. nepřipouští otázky. Telefon obousměrný – tj. připouští otázky.)

Úloha:

Žáci pracují ve dvojicích (v online učitel/žáci). Každý má geoboard a 3 různobarevné gumičky. Žák A vymodeluje na svém geoboardu nějaký obrazec, tak aby ho žák B neviděl.

Potom slovně instruuje žáka B, aby vymodeloval stejný obrazec. Když je žák B hotov, oba žáci si obrazce porovnají. Pokud se neshodují, diskutují, co mohlo být příčinou nepochopení.

Modifikací může být skládání obrazce podle projekce. Žák A vidí na projekci obrazec, složí jej na svém geoboardu a slovně instruuje žáka B, který na projekci nevidí. Ten skládá na svém geoboardu, nakonec si obrazce porovnají a diskutují.



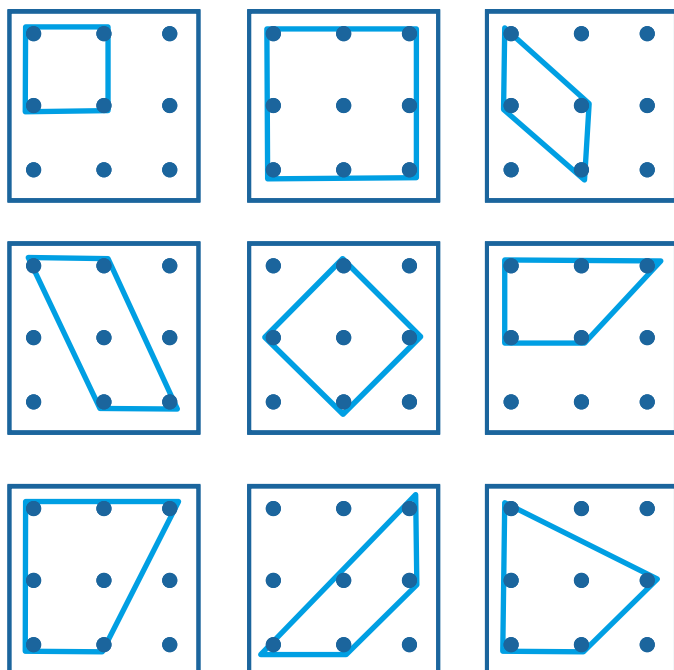
Sova

Úlohy, kde žáci pomocí otázek ano/ne hledají z galerie objektů jeden, jsou dobré k pojmenování různých věcí – především vlastností útvarů. Mimo jiné se tím i rozvíjí komunikační schopnosti žáků. Gradovat lze úlohy především počtem objektů, i když o gradaci v pravém slova smyslu zde spíše nemluvíme.

Žáky spíše směřujeme k objevu, že vhodnou otázkou dokážeme počet objektů vždy snížit na polovinu. Níže jsou dvě galerie ke hře Sova.

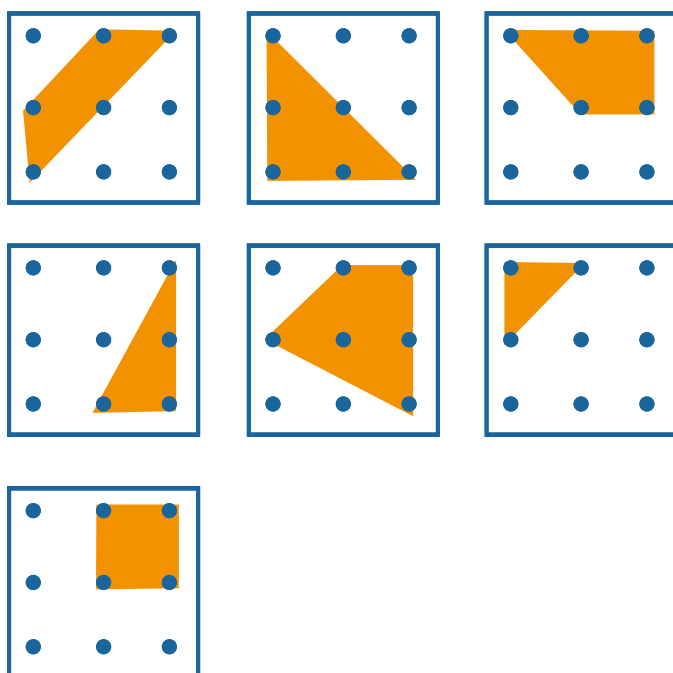
Úloha:

Uhodni, na který obrazec sova myslí.
Ptát se můžeš jen tak, aby sova mohla odpovědět ano/ne.



Úloha:

Uhodni, na který obrazec sova myslí.
Ptát se můžeš jen tak, aby sova mohla odpovědět ano/ne.



Kombinacemi výše uvedených typů úloh lze úlohy učinit ještě složitější.

Úloha:

Vytvoř na geoboardu:

- a) trojúhelník s největším možným obsahem,
- b) čtyřúhelník s největším možným obsahem, který není čtverec,
- c) čtyřúhelník, jehož jedna úhlopříčka není uvnitř obrazce,
- d) čtyřúhelník, který má dvě stejně dlouhé na sebe kolmé úhlopříčky a není to čtverec,
- e) obrazec, jehož aspoň jedna strana je částí některé úhlopříčky.

Úloha:

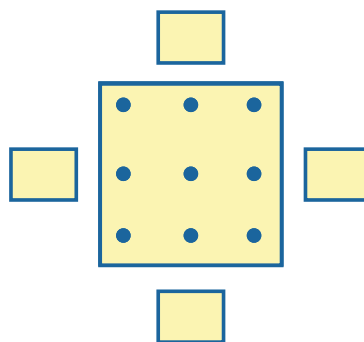
Čtyři děti seděly kolem lavice a zapsaly si šipkovým zápisem trojúhelník ABC , který si vytvořily. Jak je možné, že mají každý jiný zápis? Navrhni, jak děti mohly u stolu sedět.

Anička: $A \uparrow \leftarrow \leftarrow B \downarrow \downarrow \rightarrow C \downarrow \rightarrow A$

Bertík: $A \downarrow \downarrow \leftarrow B \rightarrow \rightarrow \uparrow C \uparrow \leftarrow A$

Cilka: $A \uparrow \uparrow \rightarrow B \downarrow \leftarrow \leftarrow C \downarrow \rightarrow A$

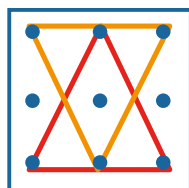
Daniel: $A \rightarrow \rightarrow \downarrow B \uparrow \uparrow \leftarrow C \leftarrow \downarrow A$



Nový typ úloh lze získat používáním více gumiček. To např. umožňuje získávat nové útvary, které by za pomoci jedné gumičky sestavit na geoboardu nešlo.

Úloha:

Dvěma gumičkami vymodeluj trojúhelníky jako na obrázku. Urči, o jaké trojúhelníky se jedná, a pojmenuj útvar, který je jejich společnou částí (jejich průnikem).



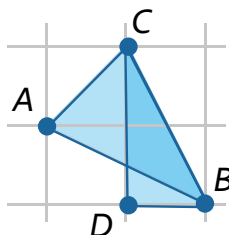
Průnik obou útvarů je kosočtverec. Ten se na geoboardu nepodaří sestavit, pokud vrcholy musí být v kólicích geoboardu. Použití více gumiček tak přináší nové možnosti, jak tvořit další úlohy. Zaměřovat se lze např. na obsahy útvarů.

Úloha:

Pomocí dvou gumiček sestroj dva útvary, jejichž obsah je:

- a) 0,5 čtverečku,
- b) 1 čtvereček,
- c) 1,5 čtverečku,
- d) 2 čtverečky,
- e) 0,75 čtverečku.

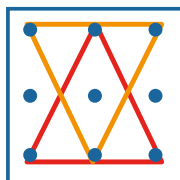
Gradačně není jednoduché úlohy seřadit. Hodně záleží na tom, jaké útvary žáci již vytvořili, nakreslili, poznali. Často budou tyto úlohy řešit metodou pokusů. Přesto je velmi pravděpodobné, že nejobtížnější bude úloha e). Její řešení může být např. takové:



Gradovanou sérii s použitím dvou gumiček uvedeme ještě jednu.

Úloha:

Na geoboardu jsou dva shodné trojúhelníky, žlutý a červený. Jejich společná část má tvar kosočtverce.



- a) Vytvoř na geoboardu dva shodné trojúhelníky tak, aby jejich společná část měla tvar čtverce.
- b) Vytvoř na geoboardu dva shodné trojúhelníky tak, aby jejich společná část měla tvar šestiúhelníku.
- c) Vytvoř na geoboardu dva shodné trojúhelníky tak, aby jejich společná část měla tvar pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku.
- d) Vytvoř na geoboardu dva shodné trojúhelníky tak, aby jejich společná část měla tvar čtyřúhelníku s jedním pravým vnitřním úhlem.

MŘÍŽ

V prostředí Mříž se vyskytují různé typy úloh. Ty jsou detailně popsány v celém textu spolu s ilustracemi konkrétních úloh. Gradační parametry jsou však u většiny typů úloh stejné. Abychom je tedy neopakovali u každého typu, uvedeme jejich přehled zde. Některé specifické gradační parametry uvádíme u některých typů úloh, u kterých se vyskytují.

Gradační parametry

Délka a náročnost šipkového zápisu

Obecně platí, že čím delší je šipkový zápis bodů a čím více šipek různých směrů se v něm vyskytuje, tím náročnější úloha to pro žáky je.

Počet vrcholů mnohoúhelníku

Podobně jako u předchozího parametru i zde platí, že čím více vrcholů daný mnohoúhelník má, tím náročnější je práce s ním (ať už se jedná o šipkový zápis útvaru, o určení obvodu, obsahu atd.).

Vzdálenost vrcholů mnohoúhelníku

Stejně tak je pro žáky náročnější pracovat s mnohoúhelníkem, jehož vrcholy jsou daleko od sebe.

Poloha mnohoúhelníku

Poloha mnohoúhelníku v mříži také ovlivňuje náročnost úlohy. Jednodušší je práce s útvary, jejichž strany leží v lince mříže. Pokud jsou naproti tomu všechny strany mnohoúhelníku šikmé a neleží v lince mříže, může to komplikovat určení obvodu, obsahu nebo sestrojování daného útvaru.

1.–2. ročník

Žáci v 1. a 2. ročníku řeší úlohy na geoboardu, který je přípravou ke vstupu na čtvercovou mříž. Pokud bychom chtěli připravovat mříž i jinými způsoby, nabízí se pracovat s úlohami na orientaci v ploše, jako je například tato úloha.

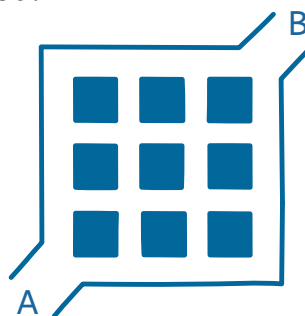
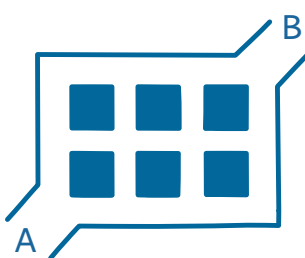
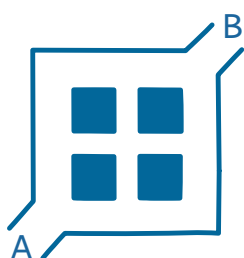
Úloha:

V místě A (viz obrázek) vběhla do bludiště vyděšená myší rodina. Všechny myši šťastně proběhly bludištěm do místa B (hladový kocour prská v místě A). Z rozhovoru udýchaných myší se dozvídáme:

a) Každá myš běžela po chodbičkách nejkratší cestou, tedy jen doprava a nahoru.

b) Žádné dvě myši neběžely stejnou cestou.

Kolik nejvíce členů mohla mít myší rodina?



V úloze žáci určují počet myší dle počtu všech možných nejkratších cest, které existují mezi body A a B. Zatím však žáky nezatěžujeme zápisem pomocí šipek ani mřížovými body. Počet všech možných cest mohou žáci zjistit prostým zakreslením do obrázku nebo projitím obrázku pomocí figurky.

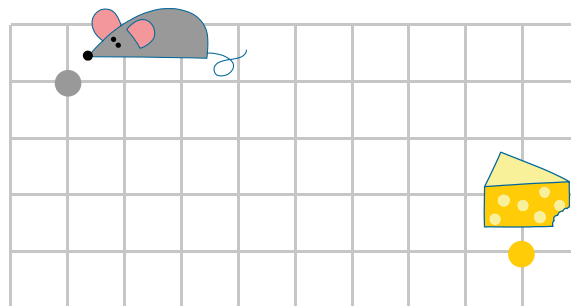
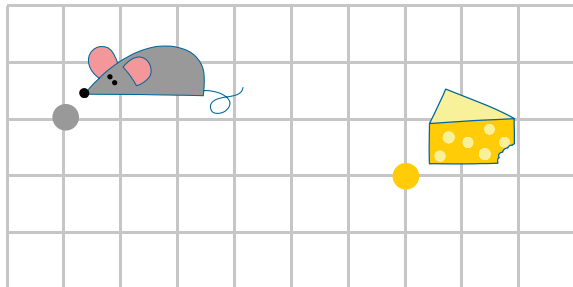
Další přípravnou aktivitou může být hledání pokladu. Z dvojice žáků jde jeden za dveře a druhý ukryje předmět ve třídě. Úkolem žáka, který předmět schoval, je popsat cestu k pokladu svému spolužákovi. Ze zkušeností víme, že když měli žáci s touto hrou více zkušeností, objevilo se ve třídě něco na způsob souřadnicové instrukce. Žák popsal cestu dvojicí čísel, přičemž první číslo určovalo počet kroků rovně od dveří, druhé číslo určovalo počet kroků vpravo nebo vlevo k předmětu.

Jiný učitel realizoval podobnou aktivitu s motivací automatu, který loví hračky. Na zemi vytvořil velkou mříž a na mřížové body umístili žáci různé předměty. Hrál dvojice žáků. Jeden žák popisoval cestu druhému spolužákovi, který měl za úkol pohybovat se po linkách mříže a vytáhnout podle popisu daný předmět (jako jeřáb automatu).

Dalším možným typem úloh mohou být obrázky na mříži. Například úloha, ve které je úkolem žáků najít cestu myši k sýru. Umístění myši a sýru v mříži je již znázorněno mřížovým bodem. Namísto s abstraktním bodem však žáci pracují s objekty reálného světa (myš a sýr).

Úloha:

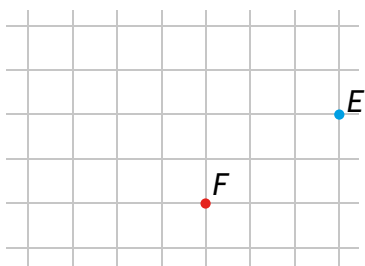
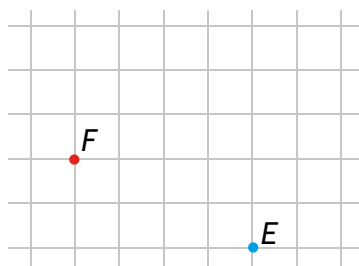
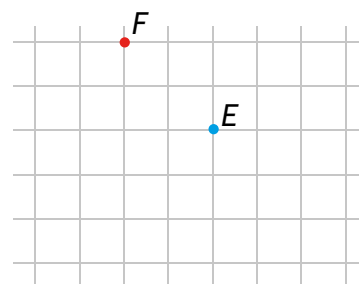
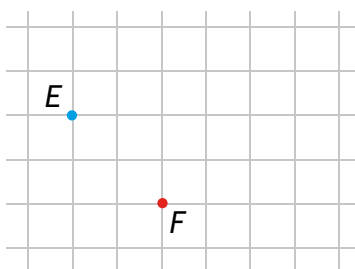
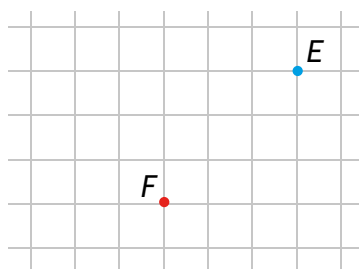
Najdi myšce cestu k sýru. Myš se může pohybovat jen po linkách mříže. Hledej více cest.



Po těchto přípravných úlohách můžeme jít s žáky na mříž a podobné aktivity s popisem cest realizovat zde. Vysílačem je žák, který popisuje cestu druhému žákovi – přijímači. Vysílač si může na svou mříž zakreslit různé body nebo využít předkreslené úlohy níže. Přijímač má prázdnou mříž nebo mříž s vyznačeným počátečním bodem a podle pokynů vysílače hledá další body.

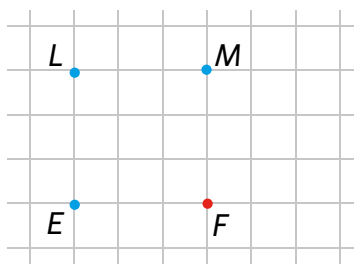
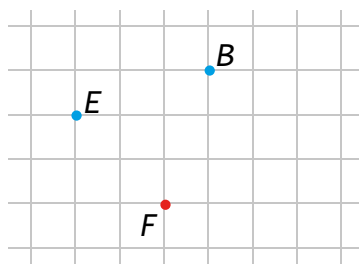
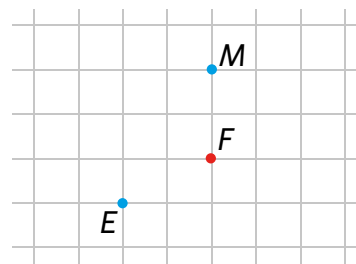
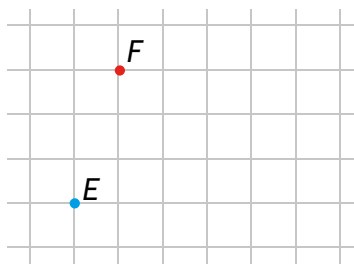
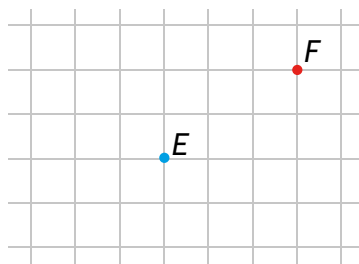
Úloha:

Najdi cestu podle pokynů vysílače.



Úloha:

Najdi cestu podle pokynů vysílače.



3.–5. ročník

Cestování v mříži

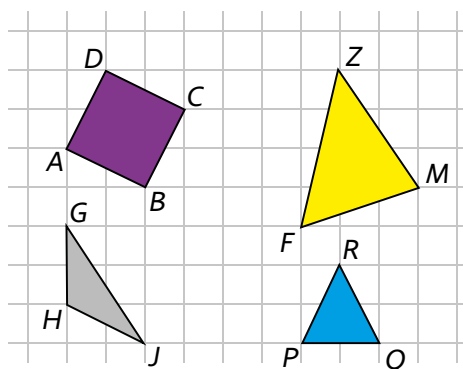
Žáci se v následujících úlohách seznamují se způsobem, kterým se budou ve čtvercové síti (mříži) pohybovat. Význam šipek je žákům intuitivně srozumitelný a zpravidla ho rychle pochopí a přijmou.

Při pohybu v mříži využíváme tzv. krátké cesty. Krátká cesta je cesta, k níž neexistuje kratší. Učitel může pokládat tyto otázky a výzvy, aby postupně žáky navedl k těmto krátkým cestám: „hledejte jakékoli cesty“, „čím se liší“ (délkou), „kolik měří“, „která je nejkratší“, „pojďme chodit tou nejkratší cestou“ – od jisté chvíle budeme pracovat jen s krátkými cestami, čímž si připravujeme půdu pro **kartézskou soustavu souřadnic**.

Ovlivňovat **obtížnost** těchto úloh lze především dvěma parametry. První je **délka a náročnost šipkového zápisu**, což lze ovlivnit především počtem a způsobem kombinace šipek různých směrů.

Druhým parametrem gradace je **pozice mřížového bodu**, který mají žáci najít. Přirozenější, a tedy i jednodušší, je pro žáky hledat koncový bod šipkového zápisu. V takovém případě totiž stačí projít celou cestu přesně ve směru šipek. Náročnější je, když žáci hledají bod, ve kterém cesta začíná. V takovém případě je efektivní strategií začít u známého koncového bodu a postupovat od něj v opačném směru, než udávají šipky v zápisu. Odhalit tuto strategii ale chvíli trvá a žáci k tomu musí mít dostatek času k experimentování.

Úloha:



Najdi v mříži bod, v němž cesta končí.

- a) $A \rightarrow \uparrow \uparrow$
- b) $A \downarrow \downarrow$
- c) $A \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \downarrow \leftarrow \leftarrow$
- d) $R \uparrow \uparrow \leftarrow \downarrow$
- e) $A \uparrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \rightarrow \rightarrow$
- f) $B \leftarrow \leftarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \uparrow \uparrow \uparrow \rightarrow$

Najdi v mříži bod, v němž cesta začíná.

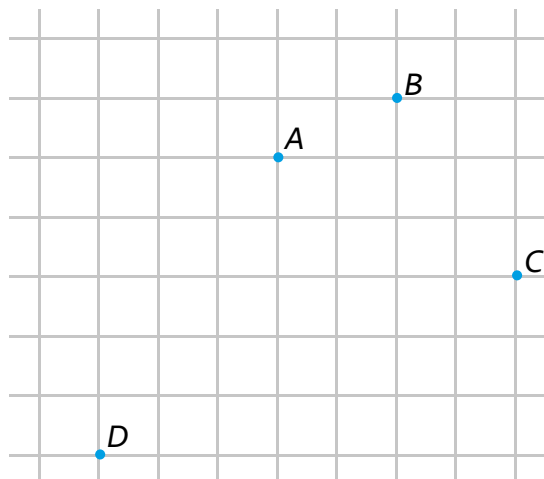
- a) $\uparrow \uparrow G$; b) $\downarrow \downarrow \leftarrow P$; c) $\rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow P$; d) $\uparrow \rightarrow \downarrow \downarrow R$.

Kromě dokončování neúplného šipkového zápisu žáci tvoří šipkový zápis dle umístění bodů v mříži. To je opět gradacně náročnější typ úlohy, než jsou úlohy předchozí. Parametrem, který ovlivňuje obtížnost jednotlivých podúloh a), b), c) je vzdálenost bodů. Učitel může nechat žáky hledat různě dlouhé cesty mezi body anebo je vyzvat k tomu, aby hledali cesty nejkratší. V takovém případě je možné pokusit se o evidenci všech těchto krátkých cest, což přispívá k rozvoji kombinatorického myšlení a hledání systematických strategií, jak najít všechny možnosti.

Úloha:

Zapiš cestu pomocí šipek od bodu A k bodu

- a) B
- b) C
- c) D.

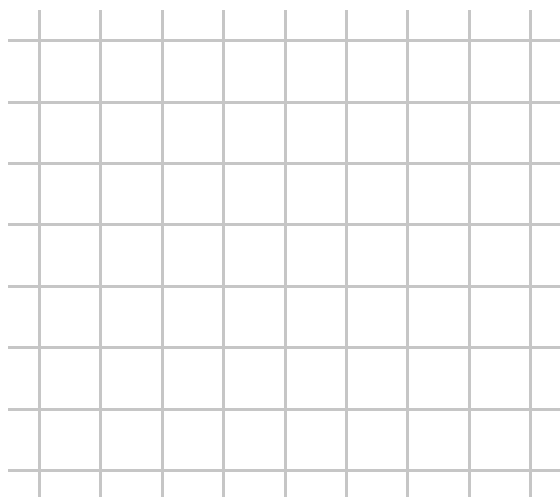


Rýsování mnohoúhelníků

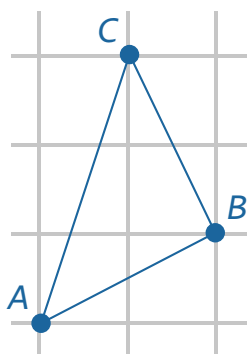
Šipkový zápis je procesuální jazyk, kterým lze v mříži efektivně popsat jakýkoli mřížový mnohoúhelník. Tento způsob záznamu je srozumitelný i mladším žákům a intuitivně mu rozumí. Úkolem žáků v následujících úlohách je dle šipkového zápisu v mříži sestavit daný mnohoúhelník.

Úloha:

Sestroj v mříži obrazec: $A \rightarrow \rightarrow \rightarrow B \uparrow \uparrow \leftarrow C \leftarrow \downarrow \downarrow \downarrow A$.
Jaký útvar vznikne?



Řešení:



Úloha:

Ve čtvercové mříži sestroj trojúhelníky ABC , DEF , GHJ , kde

$A \rightarrow \rightarrow B \uparrow \uparrow C \leftarrow \leftarrow \downarrow \downarrow A$,

$D \rightarrow \rightarrow E \uparrow \uparrow \leftarrow \leftarrow \downarrow \downarrow D$,

$G \rightarrow \rightarrow H \uparrow \uparrow \leftarrow \leftarrow J \downarrow \downarrow G$.

Úloha:

Ve čtvercové mříži sestroj čtyřúhelníky $MNOP$, $KLMN$, $RSTU$, kde

$M \rightarrow \rightarrow \rightarrow N \uparrow \uparrow O \leftarrow \leftarrow \leftarrow P \downarrow \downarrow M$,

$K \rightarrow \rightarrow L \rightarrow \uparrow M \leftarrow \leftarrow N \leftarrow \downarrow K$,

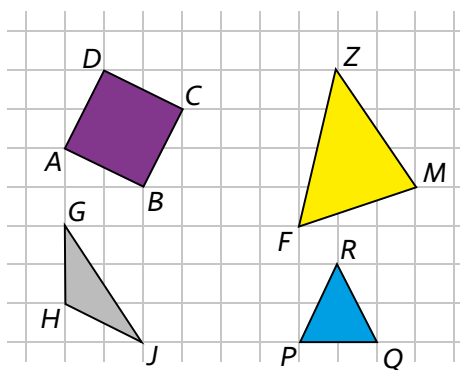
$R \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow S \uparrow \uparrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow T \leftarrow \leftarrow \leftarrow U \leftarrow \downarrow \downarrow R$.

Šipkový zápis mnohoúhelníků

Práci se šipkovým zápisem můžeme otočit. V předešlých úlohách žáci dle šipkového zápisu tvořili různé mnohoúhelníky. Lze pracovat ale i opačně – úkolem žáků může být sestrojené mřížové mnohoúhelníky popsat šipkovým zápisem. V následujících úlohách je úkolem doplnit neúplný šipkový zápis.

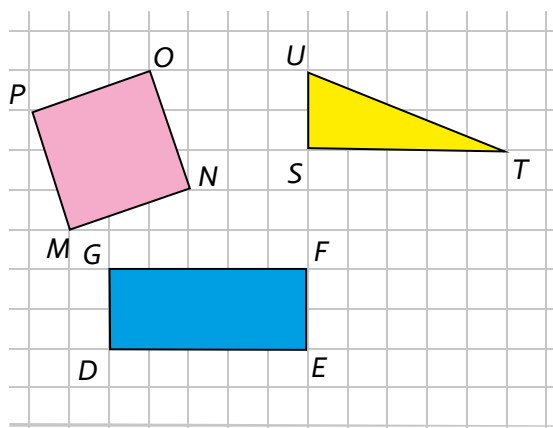
Úloha:

Do čtvercové mříže narýsuj pomocí pravítka trojúhelníky FMZ a GHJ .
Doplň chybějící šipky do zápisu těchto trojúhelníků.



$F \rightarrow \rightarrow \rightarrow \uparrow M \uparrow \uparrow \uparrow \leftarrow \leftarrow Z$ F
 G H $J \uparrow \uparrow \uparrow \leftarrow \leftarrow G$

Úloha:



Zapiš pomocí šipek polohu bodů každého útvaru.

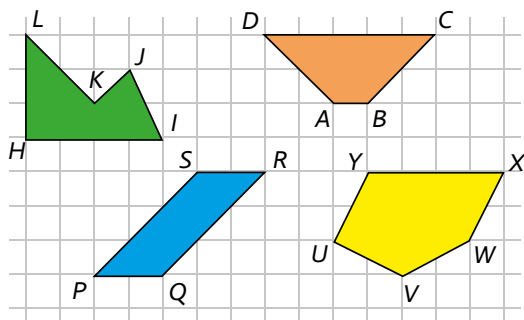
Najdi v mříži bod, v němž cesta končí:

$M \rightarrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow$
 $S \downarrow \downarrow \downarrow$
 $N \downarrow \downarrow \leftarrow \leftarrow \downarrow \downarrow$
 $U \leftarrow \leftarrow \leftarrow \downarrow \leftarrow \uparrow \rightarrow$
 $P \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \rightarrow \rightarrow \downarrow \downarrow \leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \rightarrow \rightarrow \downarrow$
 $G \uparrow \uparrow \leftarrow \leftarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \rightarrow \rightarrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \leftarrow$

Najdi v mříži bod, v němž cesta začíná:

$\rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow T$
 $\rightarrow \rightarrow \rightarrow \uparrow N$
 $\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \leftarrow \leftarrow D$
 $\rightarrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \rightarrow N$
 $\leftarrow \leftarrow \leftarrow \downarrow \leftarrow \leftarrow \downarrow \rightarrow G$
 $\uparrow \leftarrow \downarrow \rightarrow \rightarrow \downarrow \downarrow \leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow M$

Úloha:



Doplň chybějící šipky do zápisu těchto útvarů:

$B \rightarrow \uparrow \uparrow C$ D $A \rightarrow B$
 $I \uparrow \uparrow \leftarrow J \downarrow \leftarrow K$ $L \downarrow \downarrow \downarrow H$ I
 S $P \rightarrow \rightarrow Q \rightarrow \uparrow \rightarrow \uparrow \rightarrow R$ S
 $X \leftarrow \leftarrow \leftarrow Y$ $U \rightarrow \rightarrow \downarrow V$ $W \rightarrow \uparrow \uparrow X$

Najdi v mříži bod, v němž cesta končí:

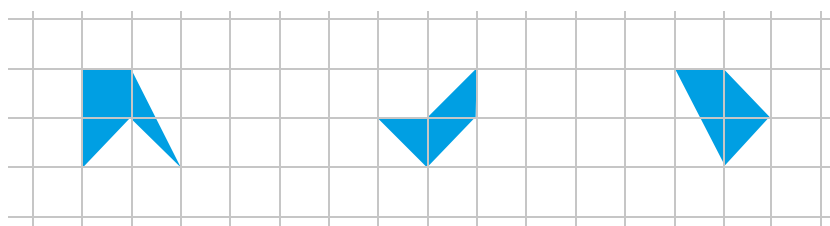
$Y \rightarrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \rightarrow$
 $K \rightarrow \rightarrow \downarrow \rightarrow \downarrow$
 $R \rightarrow \uparrow \rightarrow \uparrow$
 $V \uparrow \uparrow \uparrow \leftarrow \downarrow \downarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow$
 $S \leftarrow \uparrow \uparrow \uparrow \leftarrow \leftarrow \downarrow \rightarrow$
 $B \rightarrow \downarrow \leftarrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \leftarrow \downarrow \downarrow \leftarrow \leftarrow \downarrow \leftarrow \uparrow \uparrow$

Najdi v mříži bod, v němž cesta začíná:

$\rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow X$
 $\rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \downarrow \downarrow \downarrow I$
 $\downarrow \downarrow \downarrow \rightarrow \rightarrow \downarrow \rightarrow \rightarrow Q$
 $\uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow A$
 $\downarrow \downarrow \downarrow \leftarrow \uparrow \leftarrow \leftarrow \downarrow \leftarrow \uparrow \leftarrow U$
 $\leftarrow \leftarrow \downarrow \downarrow \leftarrow \downarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \downarrow \rightarrow \rightarrow \uparrow \rightarrow B$

Úloha:

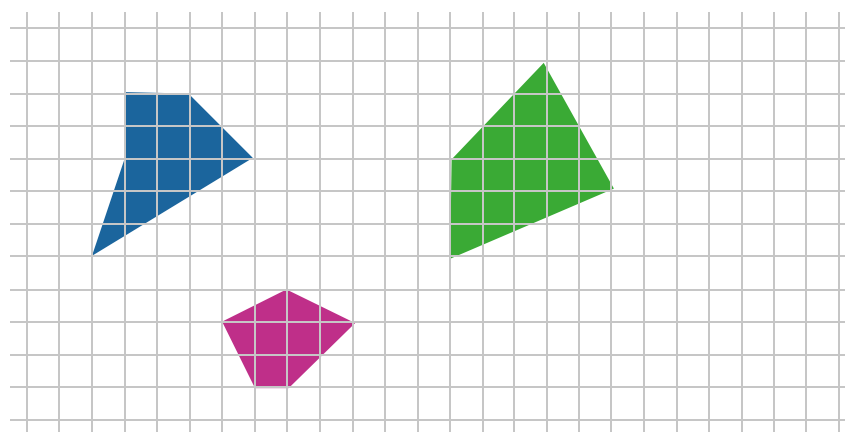
Na obrázku jsou tři mřížové mnohoúhelníky a dva šipkové zápisy dvou z nich. Přiřaď šipkový zápis k mnohoúhelníku tak, že pojmenuješ vrcholy podle šipkového zápisu. Vytvoř chybějící šipkový zápis k jednomu z mnohoúhelníků.



$G \rightarrow \uparrow H \leftarrow \uparrow I \leftarrow J \downarrow \downarrow \rightarrow G$
 $K \rightarrow \uparrow L \rightarrow \downarrow M \leftarrow \uparrow \uparrow N \leftarrow O \downarrow \downarrow K$

Úloha:

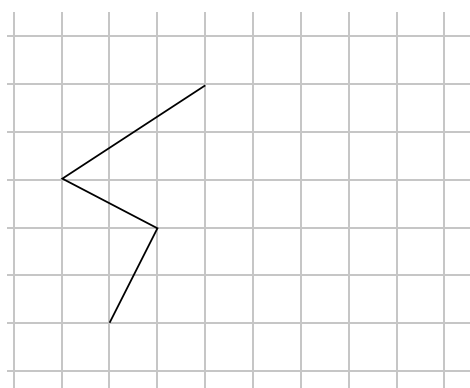
Na obrázku jsou tři mřížové mnohoúhelníky a dva šipkové zápisy dvou z nich. Přiřaď šipkový zápis k mnohoúhelníku tak, že pojmenuješ vrcholy podle šipkového zápisu. Vytvoř chybějící šipkový zápis k jednomu z mnohoúhelníků.



$J \rightarrow K \rightarrow \rightarrow \uparrow \uparrow L \leftarrow \uparrow \leftarrow M \leftarrow \downarrow \leftarrow N \downarrow \downarrow \rightarrow J$
 $O \rightarrow \rightarrow \rightarrow \uparrow P \rightarrow \uparrow \rightarrow Q \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \leftarrow R \leftarrow \downarrow \leftarrow \downarrow \leftarrow S \downarrow \downarrow \downarrow O$

Úlohy můžeme obohatit o vlastní žákovskou tvorbu. V následující úloze si může žák výsledný mnohoúhelník dokreslit dle svých představ.

Úloha:



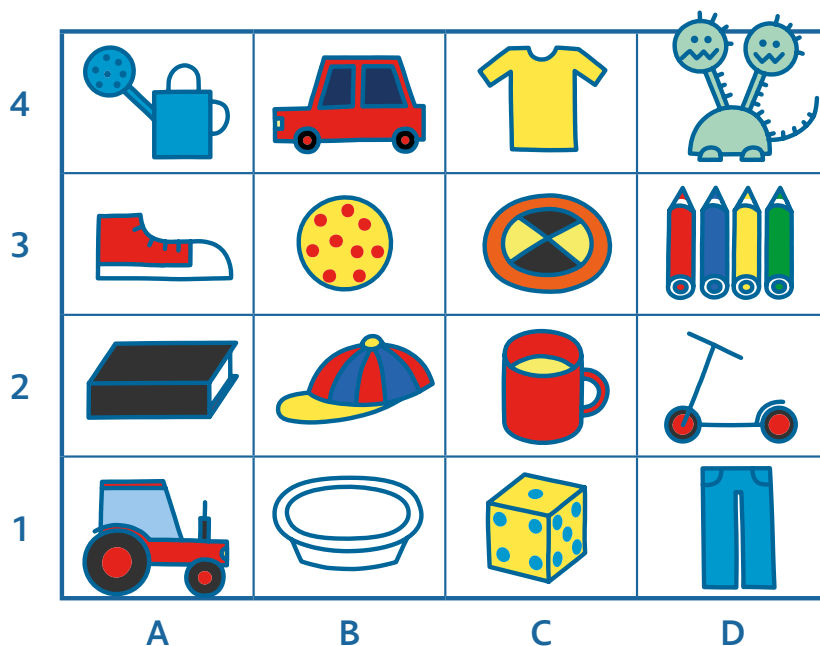
Dotvoř podle fantazie uzavřený útvar a zapiš ho šipkovým zápisem.

Souřadnicový zápis

Dříve než se objeví jazyk souřadnic, je vhodné zařadit aktivity připravující tento jazyk. Tím mohou být různé hry (lodě, šachy, Kimova hra, ...), kde se se souřadnicemi pracuje. Cílem následující **Kimovy hry** je především **rozvíjení krátkodobé paměti**. Žák se dívá na obrázek např. 30 sekund, pak se obrázek zakryje a žák zapisuje objekty, které si zapamatoval. Hru lze obohatit právě o souřadnice. Učitel se může ptát: „Jaký objekt je na poli C2?“ apod. Žáci takovou hru mohou hrát ve dvojici.

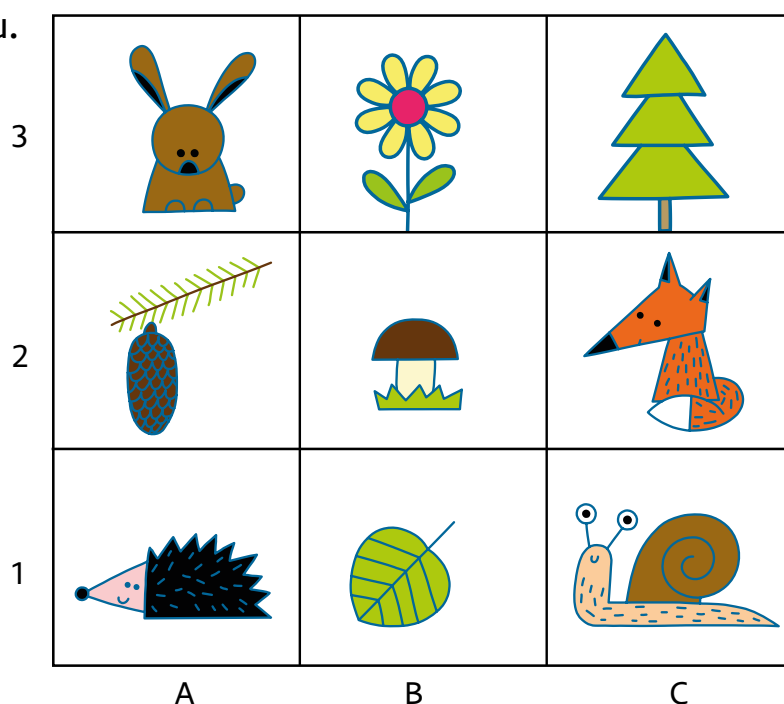
Úloha:

Zahraj si Kimovu hru.



Úloha:

Zahraj si Kimovu hru.



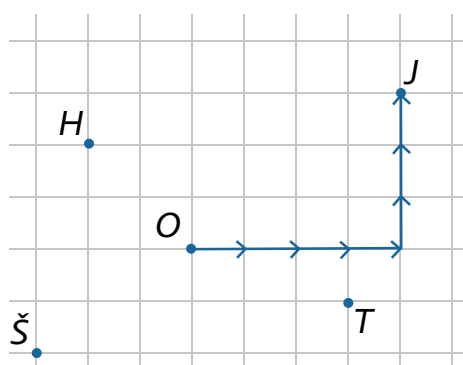
Předtím než ve třídě zavedeme klasický zápis bodu pomocí dvojice souřadnic, dohodneme se na tom, že si **zvolíme jeden bod, od kterého budeme popisovat všechny ostatní body.**

Druhou dohodou je, že **sjednotíme způsob řazení šipek v jejich zápisu.** Nejprve budeme zapisovat šipky ve vodorovném směru, potom šipky ve svislém směru.

Tyto dohody jsou v matematice běžně užívanou konvencí.

Úloha:

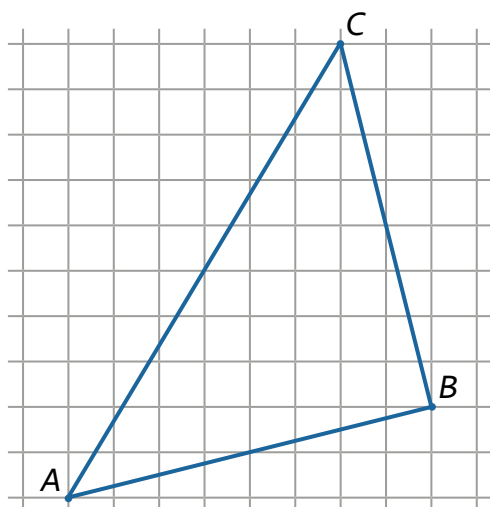
Zahrada má studnu v bodě **O**. Zahradník chce postupně zalít jabloně, hrušně, švestky a třešně. Může ale chodit pouze po vyznačených pěšinkách (po mříži). Na obrázku je vidět cesta k jabloním, ta by šla popsat: $O \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \uparrow \uparrow \uparrow J$. Zapište další cesty od studně k ostatním stromům.



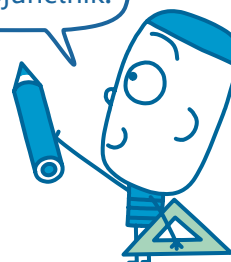
Bod **O** budeme nazývat počátek (počáteční bod), protože při každé cestě budeme začínat v tomto bodě. Nejprve půjdeme vždy ve vodorovném směru, poté ve směru svislém.

Jazyk číselných souřadnic by se v ideálním případě měl objevit z důvodu potřeby žáků. Tuto potřebu můžeme vyvolat například tím, že budou žáci pracovat s větším počtem šipek a delšími zápisy, které budou chtít sami zkracovat. Takovou vhodnou úlohou může být třeba šipkový zápis následujícího trojúhelníku:

Úloha:



Já jsem si v mříži narýsoval trojúhelník.

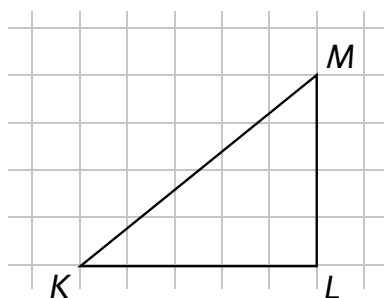


A takto jsem ho popsal:
 $A \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \uparrow \uparrow B$,
 $A \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow C$.

Žáci tedy hledají efektivnější způsoby, jak situaci zaznamenat, a mohou sami přijít s tím, že větší počet šipek zapíší číslem. Pokud s tím nepřijdou žáci, otevře toto téma učitel například tímto textem:

Úloha:

Jednodušší zápis šipkového zápisu:



Místo zápisu

$K \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow L$, $K \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow M$,

používá zápis

$K(5 \rightarrow, 0)L$, $K(5 \rightarrow, 4 \uparrow)M$.

Vidíme, že se stále ještě nejedná o klasický souřadnicový zápis, protože v něm stále ještě figurují šipky. Vyskytují se v něm však už také čísla, která slouží k tomu, abychom nemuseli vypisovat všechny šipky po jedné.

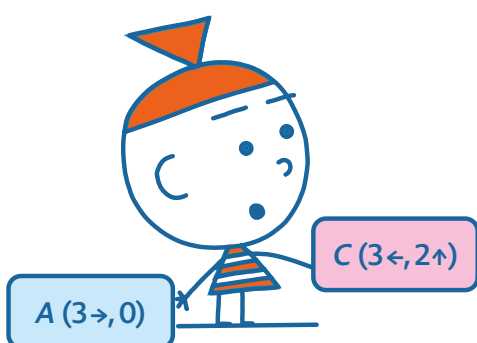
Nyní jsme již krůček od zavedení **souřadnic** tak, jak je běžně známe. Domluvíme se, že kladné znaménko značí směr vpravo, respektive nahoru. Záporné znaménko značí směr vlevo, respektive dolů.

Všechny dohody, které jsme u souřadnicového zápisu uvedli, nejsou něčím, co by mohli žáci ve třídě sami objevit. To, že nejdříve zapisujeme vodorovnou souřadnici a jako druhou svislou souřadnici, není věcí žádné matematické nebo logické zákonitosti. Je to pouze věcí mezinárodní dohody matematiků, kterou budeme respektovat i my. Tato a jiná pravidla musí žákům nutně představit učitel, protože jinak hrozí, že by se žáci mohli ve třídě dohodnout tak, že to nebude v souladu s obecně platnou matematickou normou. Učitel však může zvolit takový způsob, který bude žákům bližší – pravidlo mohou žákům představit učebnicové postavičky dětí:

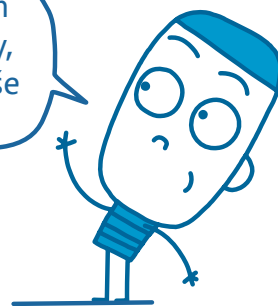
Úloha:

Kira zjednodušila dlouhé šipkové zápisy použitím čísel.

Vyznač do mřížky počátek $(0, 0)$ a body $A(3 \rightarrow, 0)$, $B(2 \rightarrow, 1 \uparrow)$, $C(3 \leftarrow, 2 \uparrow)$, $D(2 \leftarrow, 4 \downarrow)$, $E(3 \rightarrow, 2 \downarrow)$, $F(4 \leftarrow, 1 \downarrow)$.



V učebnici matematiky jsem viděl hodně podobné zápisy, ale bez šipek. Bod A se zapíše takto: $A(3, 0)$.

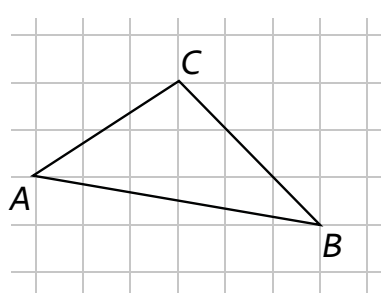
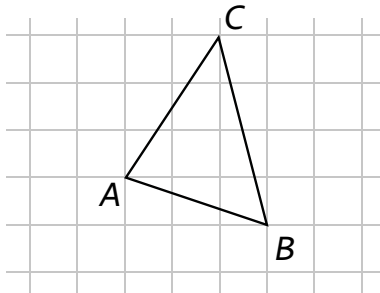
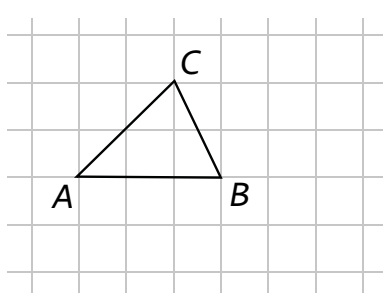


Elmar: Když je šipka doprava nebo nahoru, napsalo by se znaménko plus, ale matematici ho nepíší. Když je šipka doleva nebo dolů, dám tam znaménko minus. Tedy bod C se zapíše takto: $C(-3, 2)$.

Popsali jsme způsob geneze souřadnicového zápisu bodů na 1. stupni. Žáci nejprve používají sémantický jazyk šipek, který je silně procesuální. Postupem času vnášíme do šipkového zápisu dohody, které mají za cíl přiblížit souřadnicový zápis běžně užívané matematické konvenci. V 5. ročníku dospějí žáci k standardnímu souřadnicovému zápisu pomocí dvojice čísel. Tím dospěli k abstraktnímu konceptuálnímu způsobu, jak popsat polohu bodu v mříži.

Úloha:

Bod A je počátek. Zapiš trojúhelník ABC šipkovým zápisem.
Umíš zapsat pozici trojúhelníků i jinak?



Konstrukce pravého úhlu

Pravoúhlá čtvercová mříž umožňuje žákům díky svým vlastnostem provádět některé geometrické konstrukce jednodušším způsobem, než je tomu na bílém papíru. Jednou z takových konstrukcí je sestrojování kolmic a pravého úhlu, k čemuž v mříži nepotřebujeme ani úhloměr, ani pravítko s ryskou. Úkolem žáků může být například k dané mřížové úsečce sestrojit čtverec, což je úloha, ve které žáci konstrukci kolmic využívají. Ke každé úsečce lze sestrojit dva shodné čtverce.

Úloha:

Narýsuj čtverec $ABCD$, když je dána strana AB .
Vrcholy C, D popiš souřadnicemi.

a) $A (1\leftarrow, 1\downarrow), B (1\rightarrow, 1\downarrow)$

b) $A (0, 2\downarrow), B (2\rightarrow, 0)$

c) $A (1\rightarrow, 2\uparrow), B (1\leftarrow, 1\uparrow)$

d) $A (3\leftarrow, 1\downarrow), B (1\rightarrow, 3\downarrow)$

Další možností je zadat žákům střed čtverce a jeden z jeho vrcholů nebo jeho úhlopříčku, jak ukazují následující úlohy. Způsobů, jak takovou úlohu řešit, je mnoho a žáci možná nebudou konstrukci pravého úhlu přímo používat. Nicméně nejpozději při kontrole, zda je vytvořený čtyřúhelník skutečně čtverec, vlastnosti kolmosti v mříži využijí.

Úloha:

Známe střed O čtverce $ABCD$ (bod O je počátek) a vrchol A .
Narýsuj čtverec $ABCD$ a vrcholy B, C, D popiš souřadnicemi.

- | | |
|-----------------------------------|---------------------------------|
| a) $A(1\rightarrow, 1\downarrow)$ | b) $A(2\leftarrow, 0)$ |
| c) $A(2\leftarrow, 1\uparrow)$ | d) $A(3\rightarrow, 2\uparrow)$ |

Úloha:

Známe střed $S(3\rightarrow, 3\uparrow)$ čtverce $ABCD$ a vrchol A .
Narýsuj čtverec $ABCD$ a vrcholy B, C, D popiš souřadnicemi.

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| a) $A(4\rightarrow, 4\uparrow)$ | b) $A(5\rightarrow, 3\uparrow)$ |
| c) $A(1\rightarrow, 2\uparrow)$ | d) $A(6\rightarrow, 5\uparrow)$ |

Úloha:

Narýsuj čtverec $OKLM$, když je dána jeho uhlopříčka OL
(bod O je počátek), a vrcholy K, M popiš souřadnicemi.

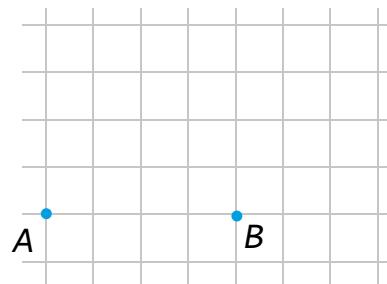
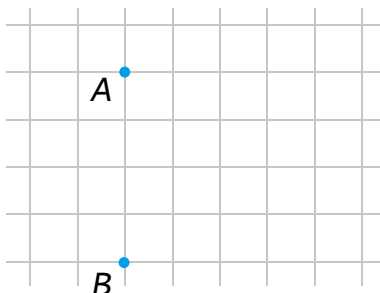
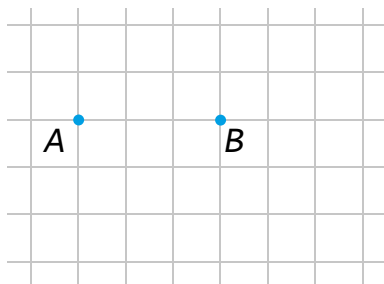
- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| a) $L(0, 2\uparrow)$ | b) $L(1\rightarrow, 3\uparrow)$ |
| c) $L(2\rightarrow, 4\uparrow)$ | d) $L(3\rightarrow, 5\uparrow)$ |

Střed úsečky, osa úsečky

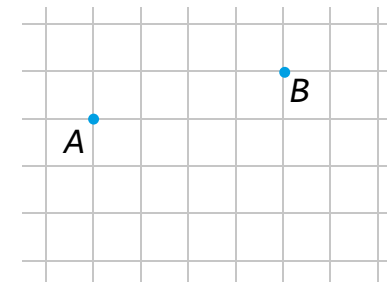
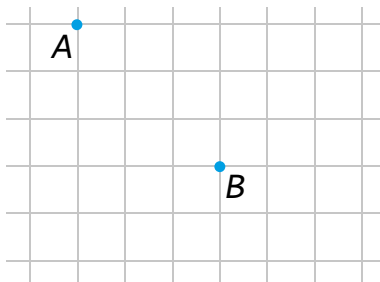
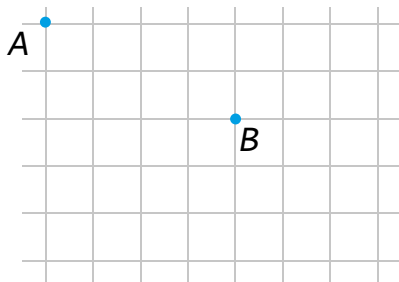
Hledání středu, respektive osy úsečky, je další z geometrických konstrukcí, ke které v mříži nepotřebujeme pravítko. Obtížnost úloh lze ovlivnit tím, zda úsečku zadáme dvěma krajními body v mříži nebo pouze šipkovým zápisem krajních bodů. Různí žáci mohou také vnímat různě obtížně polohu úsečky v mříži. Obecně bude pro žáky snadné najít střed úseček, které leží přesně vodorovně nebo svisle v lince mříže. Náročnější úsečky budou ty, které leží v mříži šikmo, nebo úsečky dlouhé nebo úsečky, které neprocházejí žádným mřížovým bodem kromě krajních bodů.

Úloha:

Najdi v mříži střed úsečky AB .



Najdi v mříži střed úsečky.



Následující úloha se od předchozích dvou liší tím, že krajní body úsečky jsou zadané pouze souřadnicemi, a ne grafickou polohou v mříži. Pro žáky to může být komplikující parametr. Na druhou stranu to může žákům odhalit, jak lze souřadnici středu úsečky najít čistě početně bez konstrukce v mříži. V tomto případě, kdy je jeden krajní bod úsečky počátek, stačí souřadnice druhého krajního bodu B vydělit dvěma.

Pozn. Souřadnice středu zjistíme tak, že uděláme aritmetický průměr odpovídajících si souřadnic krajních bodů úsečky.

Úloha:

Je dán bod $A(0, 0)$. Najdi střed úsečky AB a urči jeho souřadnice, když bod B má souřadnice:

a) $(6, 0)$

b) $(4, 4)$

c) $(-4, -10)$

d) $(8, -2)$

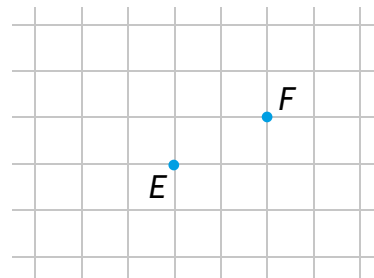
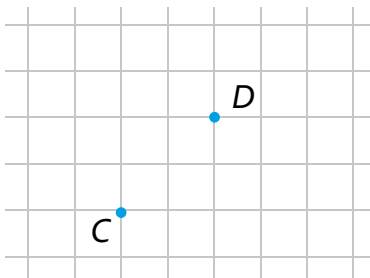
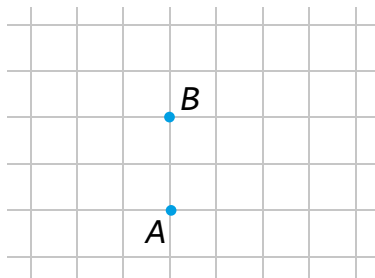
e) $(-6, -10)$

f) $(5, -2)$

Na úlohy o hledání středu úsečky navazují úlohy, kde žáci hledají osu úsečky, která právě středem úsečky prochází. Žáci zde využijí také své zkušenosti s konstrukcí kolmic, protože každá osa úsečky svírá s danou úsečkou pravý úhel. Tyto přípravné úlohy jsou velmi důležité, protože dávají žákům prostor k tomu, aby sami experimentovali a poznávali vlastnosti geometrických objektů.

Úloha:

Vytvoř úsečky AB , CD a EF . Ke každé úsečce najdi bod, který je stejně daleko od obou krajních bodů. Najdi další takové body.



Osa úsečky je řešením také následující úlohy o konstrukci kosočtverce. Hledané body leží právě na ose úhlopříčky AC :

Úloha:

Narýsuj kosočtverec $ABCD$, když je dána úhlopříčka AC . Vrcholy B , D popiš souřadnicemi.

a) $A(0, 2\downarrow)$, $C(0, 2\uparrow)$

b) $A(1\leftarrow, 1\uparrow)$, $C(2\rightarrow, 2\downarrow)$

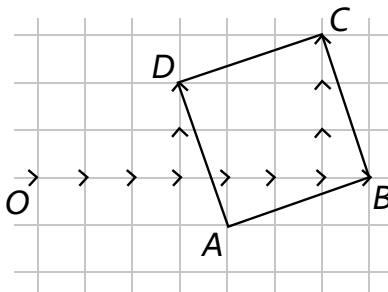
c) $A(2\leftarrow, 1\uparrow)$, $C(2\rightarrow, 1\downarrow)$

Tyto úlohy mají nekonečně mnoho řešení. Vrcholy B a D se posouvají po úhlopříčce, která je kolmá k úhlopříčce AC (respektive leží na ose úsečky AC). Každá dvojice bodů B a D je osově souměrná podle úhlopříčky AC .

V této komplexní úloze žáci využívají své poznatky o čtverci, kolmosti a půlení mřížové úsečky:

Úloha:

Přerýsuj obrázek do své mřížky a dokresli do něj body $E(2 \rightarrow, 5 \uparrow)$, $F(10 \rightarrow, 1 \uparrow)$. Oba tyto body popiš i šipkovým zápisem. Sestroj a popiš oběma zápisy body G , H a J tak, aby G byl středem úsečky CF , H byl vrcholem čtverce $FCAH$ a J vrcholem čtverce $ACEJ$.



Další komplexní aplikační úlohou je hledání bodu, který je stejně daleko od dané trojice bodů – jinými slovy hledáme střed kružnice opsané trojúhelníku, který má vrcholy v daných třech bodech. To však žákům neprozrazujeme. Potenciál úlohy tkví v tom, že si žáci uvědomí, že úlohu lze rozložit na dvě jednodušší. Nejprve si vyberu domov dvou rodin a určím místo, které je od obou míst stejně vzdálené – tedy vytvořím osu úsečky, kde leží všechna taková místa. Pak si vyberu jinou dvojici rodin a provedu to samé. Hledané místo se nachází v průsečíku obou os úseček. Pro kontrolu bude dobré ještě sestavit osu úsečky třetí dvojice míst, která opět bude procházet nalezeným místem. Pokud by žáci sami nepřišli na to, jak úlohu řešit, může jim učitel nabídnout sám, aby nejprve hledali ideální místo pro jednu dvojici rodin.

Úloha:

Rodiny Kolářovi (K), Lounští (L) a Mladí (M) si chtějí koupit společnou chatu. Dohodli se, že chatu budou mít všechny rodiny stejně daleko. Pomoz jim najít správné místo. Urči jeho souřadnice.

a) $K(0, 0)$, $L(4, 0)$, $M(2, 2)$

b) $K(0, 0)$, $L(1, 5)$, $M(6, 4)$

c) $K(0, 0)$, $L(0, 4)$, $M(3, 1)$

Úloha využívá předchozí série úloh. Učitel může diagnostikovat, zda jsou žáci schopni získané zkušenosti využít a pracují s novým pojmem osa úsečky. Jinou strategií, kterou žáci nejspíše použijí, je práce s mříží. K tomu jim pomohou úlohy, kdy žáci pracují se stejně dlouhými úsečkami v mříži (např. úhlopříčky dvou k sobě jinak natočených obdélníků 3×1).

Míra v mříži

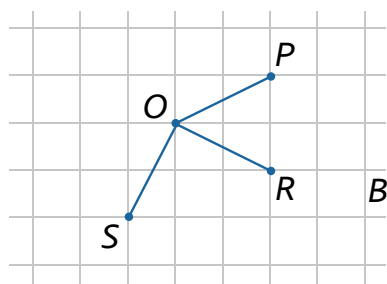
Geometrické veličiny můžeme měřit a číselně tak kvantifikovat jejich velikost. Můžeme měřit délku, obsah a objem. V našem textu se přidržíme pouze délky a obsahu, protože se pohybujeme ve 2D geometrii. Míra nám také umožní propojit geometrii s aritmetikou. Přitom budeme používat jednotkovou úsečku (která odpovídá jednomu kroku v mříži) a jednotkový čtvereček (který odpovídá obsahu jednoho základního čtverečku v mříži). Můžeme také samozřejmě pracovat přímo s metrickou soustavou a jednotkami jako milimetr a centimetr (a s jejich plošnými ekvivalenty), ale není to nutné. Přidáním konkrétní jednotky můžeme vždy každou úlohu navázat na konkrétní rozměry.

Délka

Délkou úsečky rozumíme vzdálenost jejích krajních bodů. Délku mřížové úsečky, která leží vodorovně nebo svisle v lince mříže, můžeme snadno určit tím, že spočítáme, kolik kroků dělí právě ony krajní body. Náročnější situace je u šikmých úseček. Jejich délku lze přibližně zjistit měřením. Druhou možností je určit ji početně, což je však nástroj vhodný spíše pro 2. stupeň (Pythagorova věta). Například tak můžeme spočítat, že přepona jednotkového čtverce má délku $2 = 1,414213562373095...$ V některých úlohách se však můžeme číselnému vyjádření zcela vyhnout, jako například zde:

Úloha:

- Která ze tří úseček OP , OR , OS je nejdelší?
- Sestroj další úsečku OT stejně dlouhou jako OR .
- Kolik takových úseček dokážeš sestrojit?

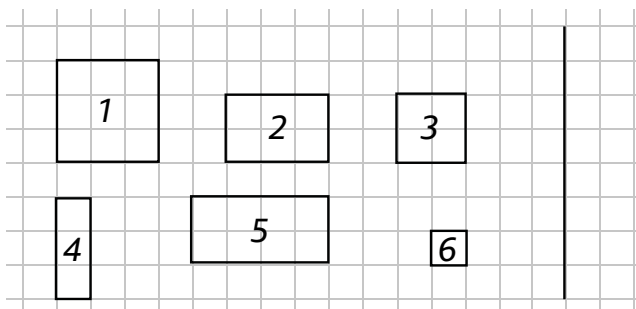


$O \rightarrow \rightarrow \uparrow P$
 $O \rightarrow \rightarrow \downarrow R$
 $O \leftarrow \downarrow \downarrow S$

K vyřešení úlohy si stačí uvědomit, že všechny úsečky v úloze jsou shodné, pouze se nacházejí na jiném místě a v jiné poloze. Ve chvíli, kdy odhalí žáci tento silný argumentační nástroj mříže, mohou bez pravítka i bez počítání úspěšně řešit následující úlohy s obvodem. Připomeňme, že obvodem mnohoúhelníku rozumíme součet délek jeho stran.

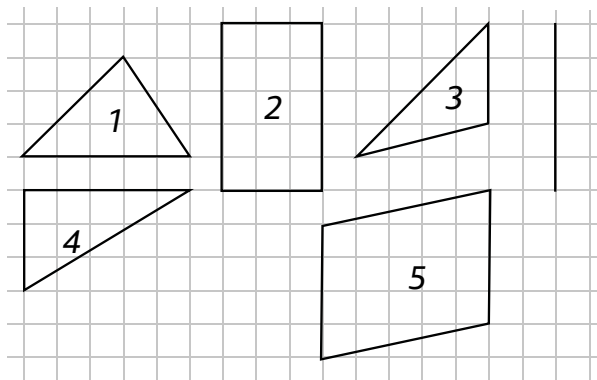
Úloha:

Najdi útvary, které mají stejný obvod, jako je délka černé úsečky.



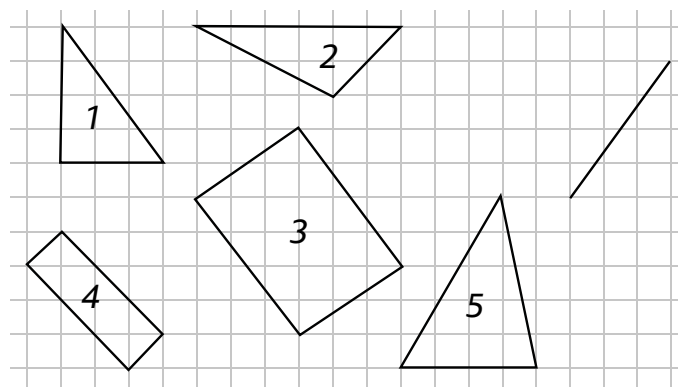
Úloha:

Najdi útvary, které mají alespoň jednu stranu stejně dlouhou jako daná úsečka. Stranu obarvi pastelkou.



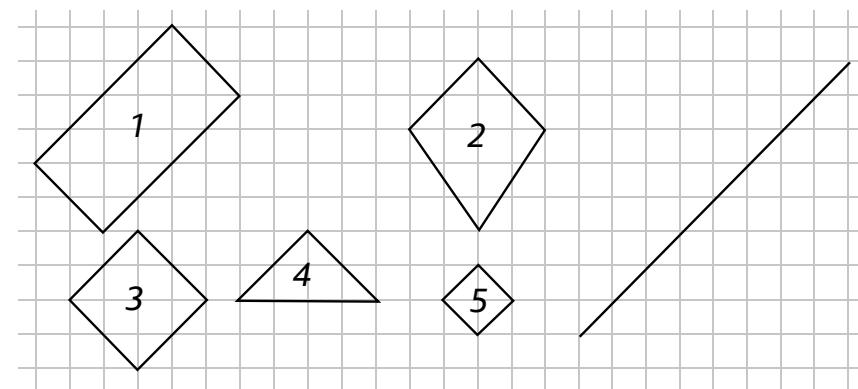
Úloha:

Najdi útvary, které mají alespoň jednu stranu stejně dlouhou jako daná úsečka. Stranu obarvi pastelkou.

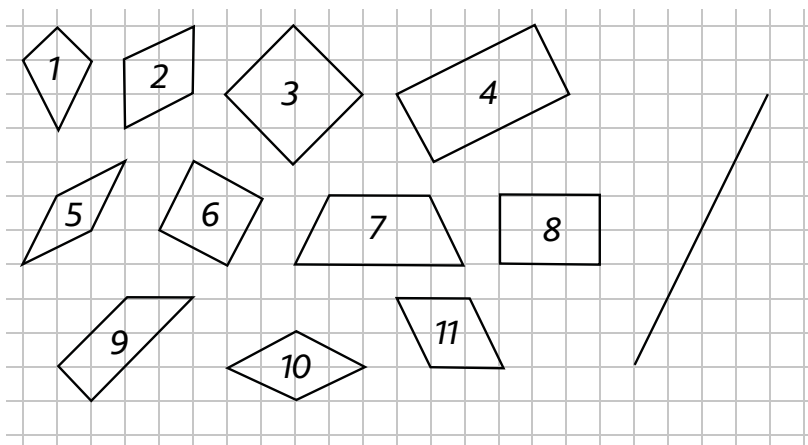


Úloha:

Najdi útvary, které mají stejný obvod útvaru jako daná úsečka.



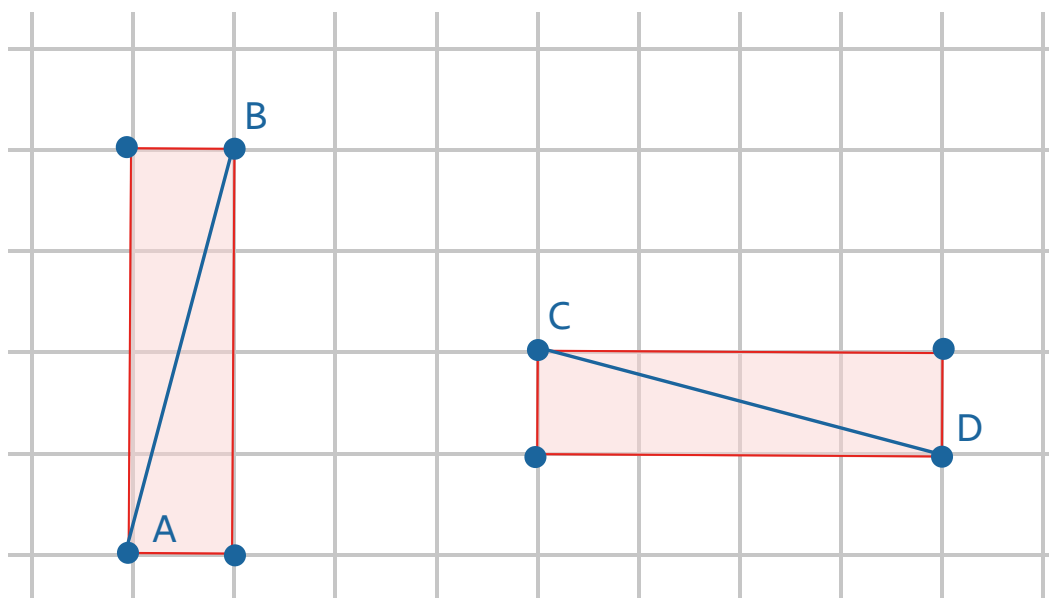
Najdi útvary, které mají stejný obvod, jako je délka černé úsečky.



Všimněme si, že v této sérii úloh zaměřené na porovnávání obvodu a délky mřížové úsečky se vyskytují tyto **gradační parametry**:

- **poloha mřížové úsečky** (ležící v lince mříže nebo šikmo) **a její sklon**,
- **počet a typ mnohoúhelníků**, se kterými musí žák úsečku porovnat.

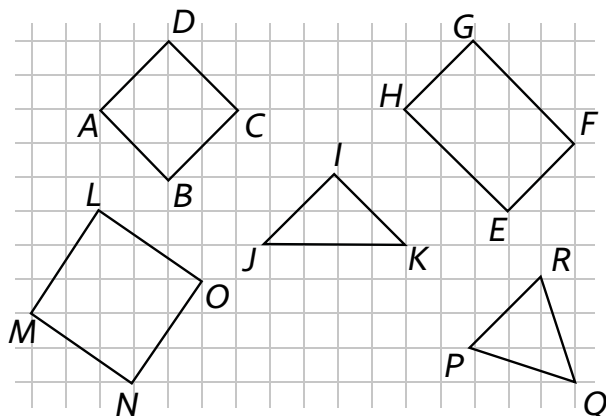
Dvě úsečky považujeme za shodné, pakliže mají stejnou délku. Na pozici v prostoru přitom nezáleží. Následující úlohy cílí právě na hledání shodných úseček, respektive shodných stran mnohoúhelníků. Žáci se přitom většinou argumentačně opírají o skutečnost, že shodné úsečky lze zarámovat do stejně velkých obdélníků – jsou to úhlopříčky shodných obdélníků. Například na obrázku je úsečka AB a CD úhlopříčkou obdélníku 3×1 , proto jsou shodné:



Úloha:

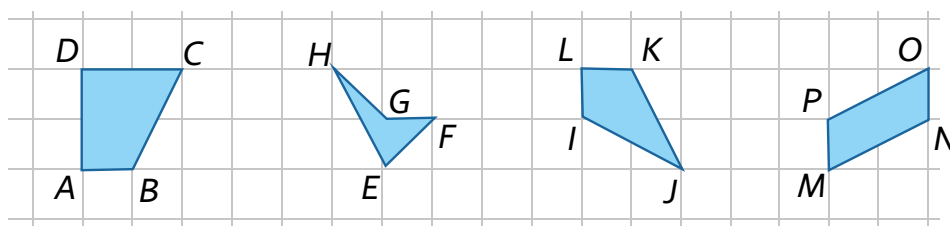
Na obrázku je pět geometrických tvarů. Každý z nich má alespoň jednu dvojici stejně dlouhých (shodných) stran.

Najdi je a zdůvodni.



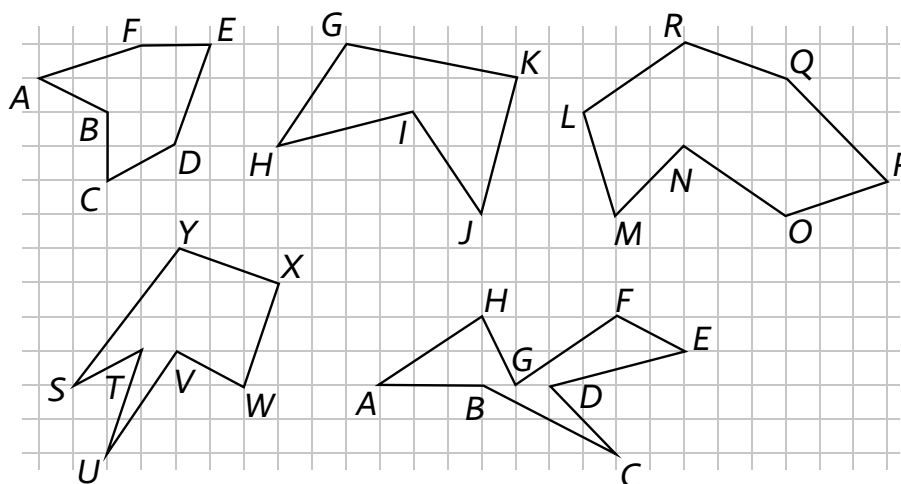
Úloha:

Na obrázku jsou čtyři čtyřúhelníky. Každý z nich má aspoň jednu dvojici stejně dlouhých (shodných) stran. Najdi je a zdůvodni.



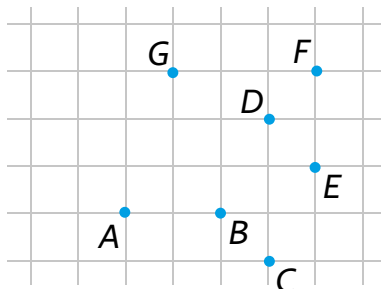
Úloha:

Na obrázku je pět mnohoúhelníků. Každý z nich má alespoň jednu dvojici stejně dlouhých (shodných) stran. Najdi je a zdůvodni.



Úloha:

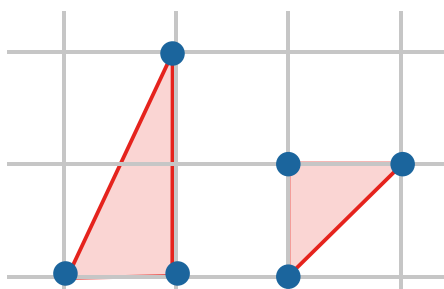
Na mříži je vyznačeno 7 bodů. Trojúhelník ABG je rovnoramenný, protože jeho strany AG a BG jsou stejně dlouhé. Najdi další rovnoramenné trojúhelníky s vrcholy ve vyznačených bodech. Zdůvodni.



Obsah

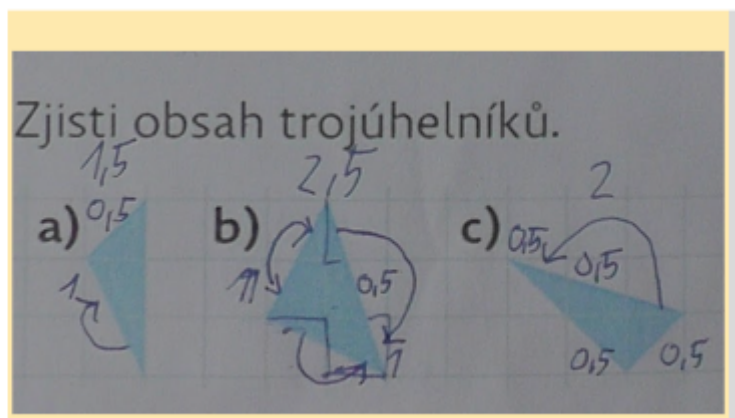
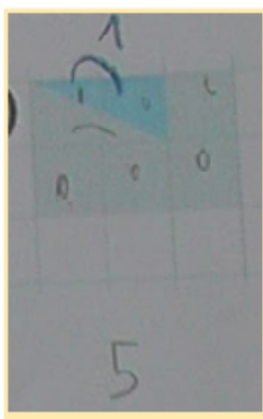
Obsah je geometrická charakteristika plochy útvaru. K vyjádření obsahu útvaru v mříži můžeme využít jednotkové čtverečky mříže. Čtverečky přitom můžeme počítat i na části (například poloviny).

Podívejme se na konkrétní příklady. Velikost plochy prvního trojúhelníku je stejná jako velikost plochy jednotkového čtverečku. Proto má tento trojúhelník obsah 1. Velikost plochy druhého trojúhelníku je polovinou velikosti plochy jednotkového čtverečku. Proto má tento trojúhelník obsah jedna polovina.



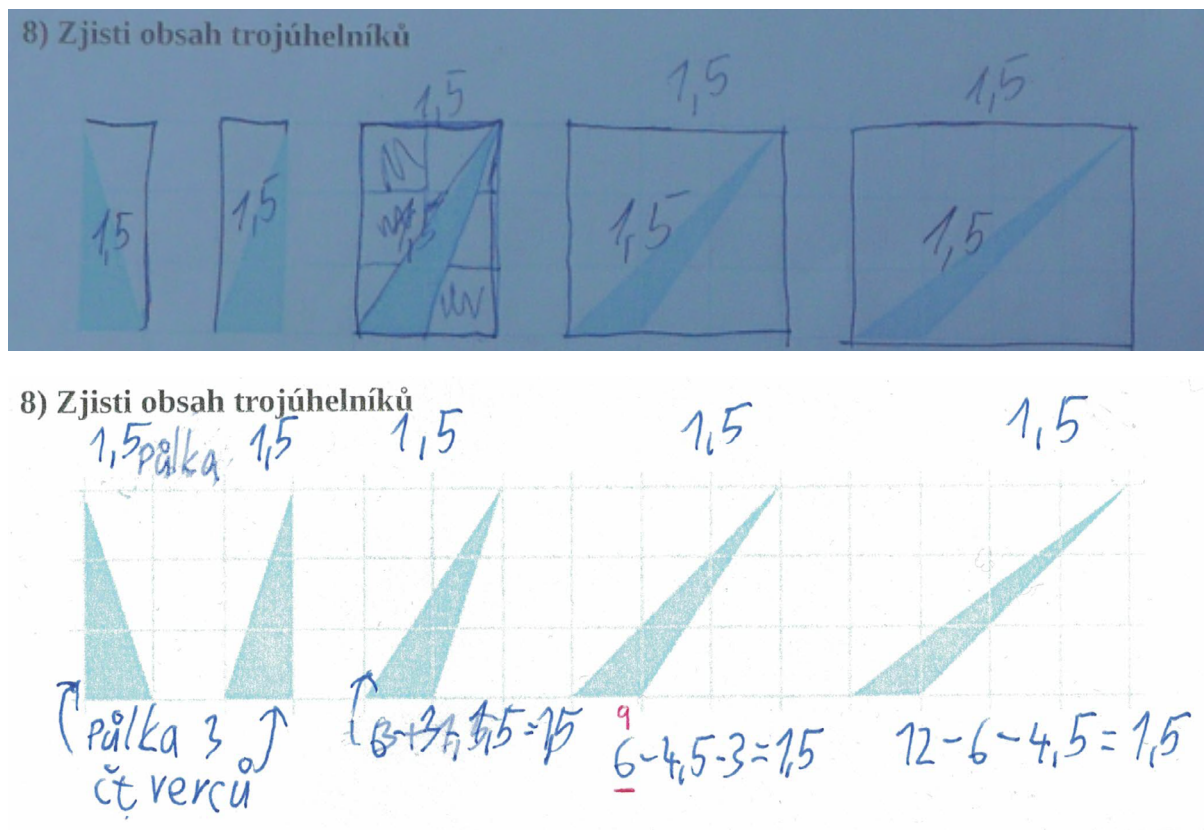
Aby žáci dokázali určovat obsahy náročnějších útvarů (např. obsahy tupouhlých trojúhelníků), postupně „vylepšují“ své řešitelské strategie. Na to se zaměříme v další části textu.

Ze zkušeností učitelů víme, že mezi žáky (i na 2. stupni) silně převažuje strategie počítání obsahu po jednotlivých čtverečkách. Necelé části čtverečků pak žáci vhodně spojují dohromady, aby vznikaly čtverečky celé, jako vidíme na následujících řešeních:

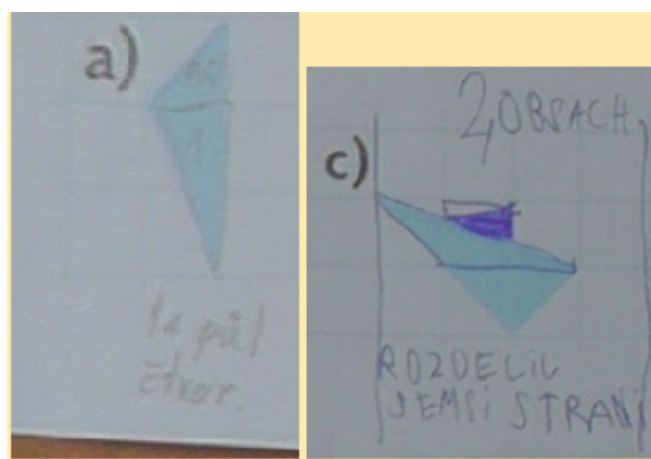


Nabízí se otázka, jak žáky posunout k efektivnějším a sofistikovanějším strategiím, zejména ke strategii **rámování** nebo **rozřezávání**.

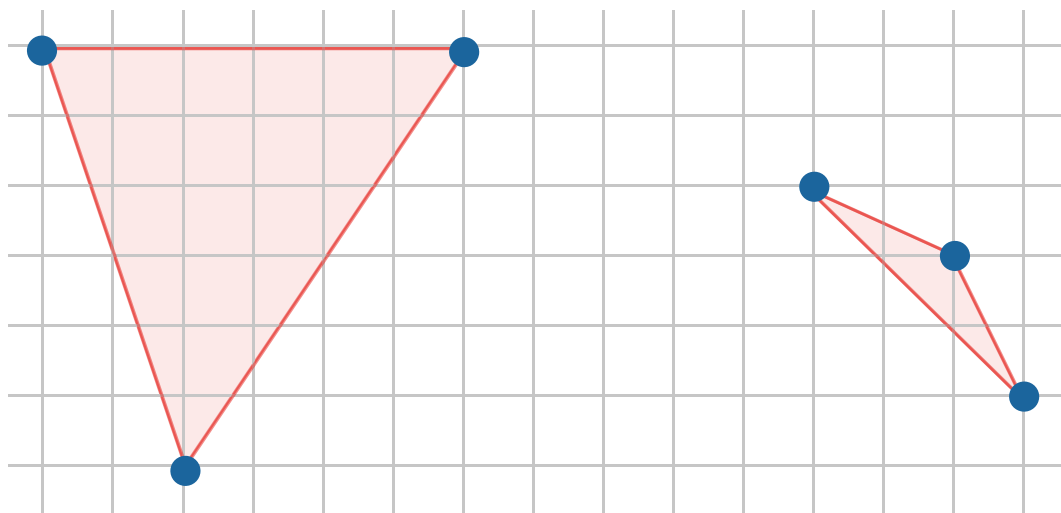
Užití strategie rámování můžeme vidět v následujícím žakovském řešení. V první úloze si žák dokreslil rám, od kterého zřejmě v hlavě odečetl bílé části, které nepotřeboval. V druhé úloze už vidíme, že si žák psal výpočty. Ty dokládají, že nejprve určil obsah celého rámu, od kterého odečetl obsah těch částí, které nepotřeboval:



Zde můžeme vidět efektivně použitou strategii rozřezávání, kdy si žáci daný trojúhelník rozdělili na dva trojúhelníky jednodušší:



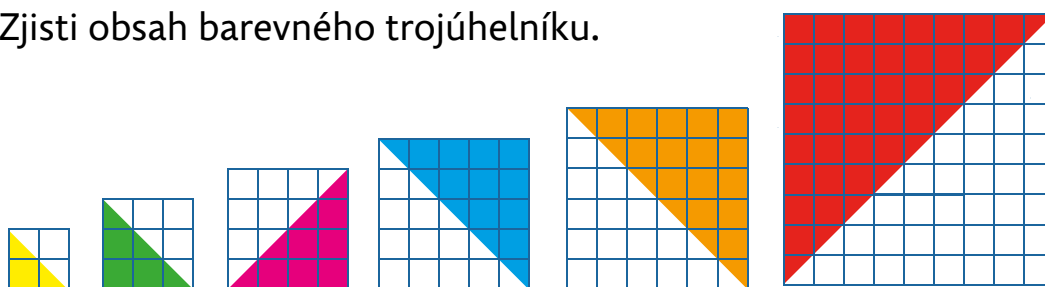
Někdy se stane, že s těmito strategiemi přijde někdo z žáků přirozeně. Většinou je ale nutné jejich objev připravit vhodnými úlohami. Žáci by v nich měli postupně zjišťovat, že počítání obsahu po jednotlivých čtverečkách je u některých útvarů náročné a nepraktické. Může se objevit numerická chyba při počítání velkého množství čtverečků nebo může být velmi obtížné určit, o jaké části celého čtverečku se jedná. Ilustrace k oběma případům jsou zde:



Dovednost, která je pro užití strategie rámování a rozřezávání důležitá, je umět určit polovinu obsahu čtverce nebo obdélníku, tedy obsah pravoúhlého trojúhelníku. K tomu vedou žáky následující úlohy. Tato úloha by měla v žácích vyvolat potřebu hledat efektivnější a rychlejší způsob určení obsahu především u větších trojúhelníků. Obsah barevného trojúhelníku lze jednoduše zjistit tak, že obsah čtverce vydělíme dvěma. Počítání čtverečků po jednom by zabralo více času.

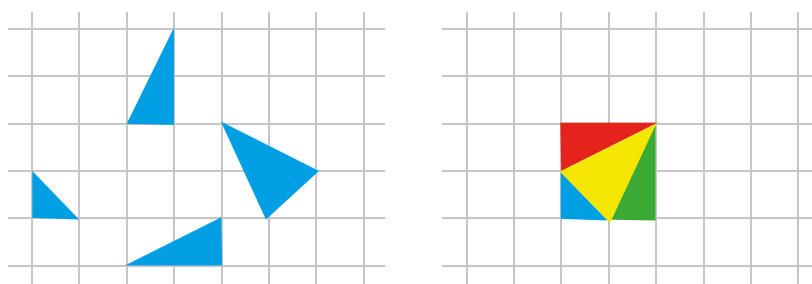
Úloha:

Zjisti obsah barevného trojúhelníku.



Úloha:

Urči, kolik čtverečků obsahují všechny barevné trojúhelníky na obrázcích.

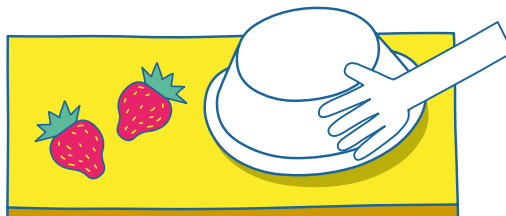


V obou případech je úkolem žáků určit obsah čtyř trojúhelníků. V úloze vlevo se trojúhelníky objevují odděleně, zatímco v úloze vpravo všechny společně vytvářejí čtverec. Žáci by tedy mohli nejprve určit obsah červeného, modrého a zeleného trojúhelníku, protože je to jednodušší. Pro zjištění obsahu žlutého trojúhelníku pak stačí od obsahu celého čtverce odečíst jednotlivé obsahy tří trojúhelníků. Tento postup nazýváme strategií **rámování** – pro zjištění obsahu daného útvaru si nejprve vytvoříme jeho pravoúhelníkový rám (zde čtverec 2×2), od kterého odečteme vše, co nepatří k danému útvaru (zde odčítáme obsah červeného, modrého a zeleného trojúhelníku).

Strategie rámování, kterou jsme v předchozí úloze popsali, využívá myšlenku **komplementu (doplňku)**. Například doplňkem žlutého trojúhelníku do čtverce 2×2 jsou červený, modrý a zelený trojúhelník, protože společně se žlutým trojúhelníkem tvoří právě čtverec 2×2 . Dodejme, že s myšlenkou komplementu se žáci setkávají již od 1. ročníku v aritmetických úlohách, například zde (doplňkem dvou jahod, které vidíme, do celkového počtu šesti jahod jsou čtyři jahody, které nevidíme):

Úloha:

Na stole je celkem 6 jahod.
Kolik jich je pod miskou?



Co lze dělat v případě, pokud žáci zatím na tuto myšlenku nepřišli? Nabízíme sérii gradovaných úloh, která by je k tomuto objevu měla přivést.

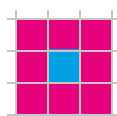
Úloha:

Zjisti obsah růžového a modrého útvaru.

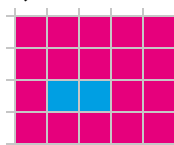
a)



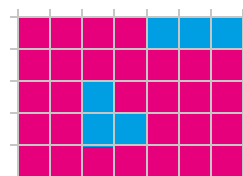
b)



c)



d)

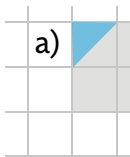


Učitel na těchto úlohách diagnostikuje, jak žák úlohu řeší. Pokud počítá jednotlivé růžové a modré čtverečky a určuje jejich součet, myšlenky komplementu nepoužívá. Naopak žák, který myšlenku doplňku vnímá dobře a umí ji použít pro určení obsahu, v úloze d) řekne: „Obdélník má $5 \cdot 7 = 35$ čtverečků. Modrých vidím 6, takže růžové musí tvořit zbytek, tedy $35 - 6 = 29$.“

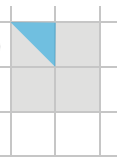
Úloha:

Zjisti obsah šedého a modrého útvaru.

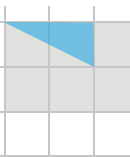
a)



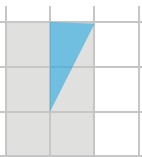
b)



c)



d)

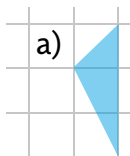


Pro zjištění obsahu trojúhelníků v následující úloze je vhodné použít strategii rámování.

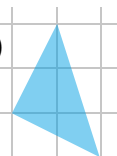
Úloha:

Zjisti obsah trojúhelníků.

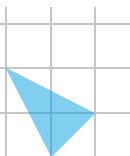
a)



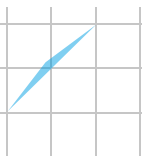
b)



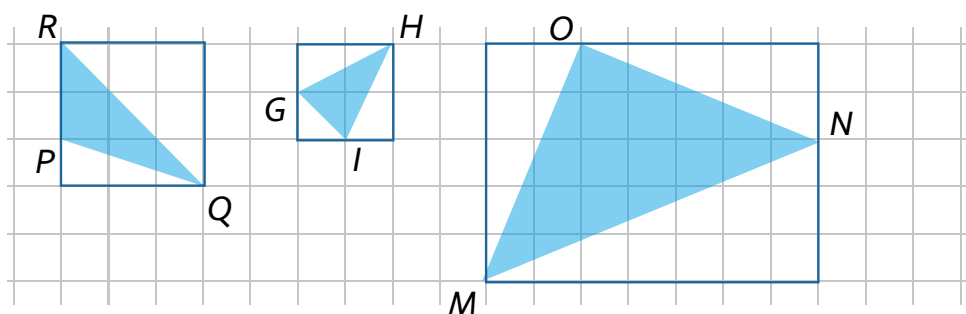
c)



d)



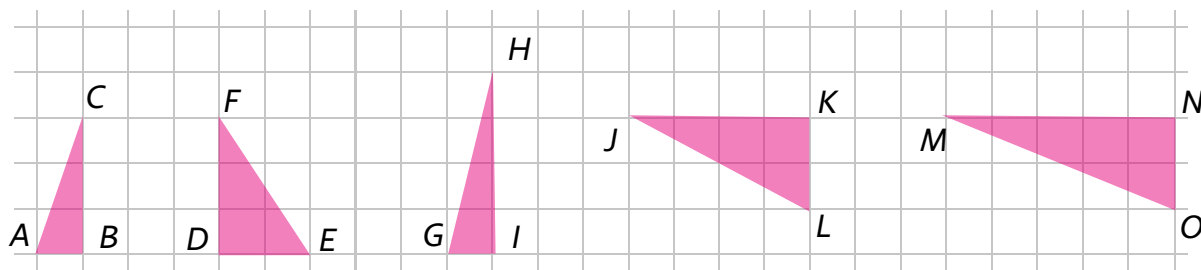
Úloha:



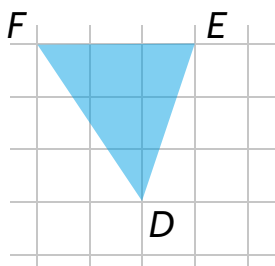
Strategie **rozřezávání** je proces, kdy žák rozdělí útvar, jehož obsah hledá, na jiné útvary, jejichž obsah už umí určit. Pro objev tohoto postupu je nutné, aby měli žáci zkušenost s procesem opačným – se spojováním dvou a více útvarů do jednoho. K tomu vyzývá následující úloha.

Úloha:

Přerýsuj a vystřihni trojúhelníky. Vybírej dvojice trojúhelníků, jejichž přiložením k sobě vytvoříš nové trojúhelníky. Urči jejich obsah.

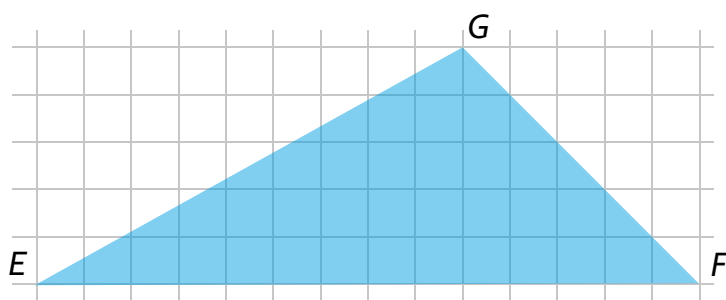


K užití strategie rozřezávání je pak vhodný například takovýto trojúhelník, který lze rozdělit na dva trojúhelníky pravoúhlé:



Úloha:

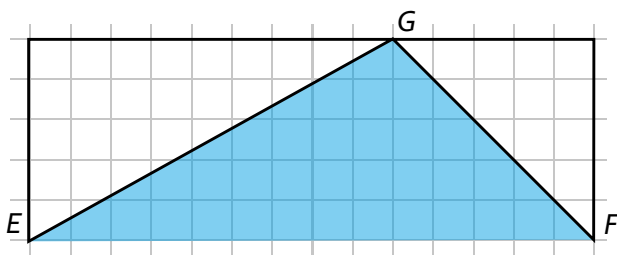
Jaký je obsah tohoto trojúhelníku?



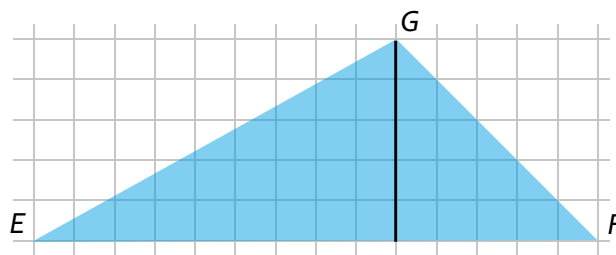
Strategie počítání jednotlivých čtverečků je pro určení obsahu následujícího trojúhelníku velmi nevýhodná. Poloviny čtverečků, které jsou ohraničeny stranou GF, lze po jednom sečíst snadno. Ale části čtverečků ohraničené stranou EG se už dohromady skládají obtížněji. Shrňme tedy, že na základě zkušeností z předchozích úloh by nyní mohli žáci pro zjištění obsahu trojúhelníku EFG použít jednu z dvou strategií:

- 1) **rámování** – zarámovat trojúhelník do obdélníku 5×14 a od obsahu tohoto obdélníku odečíst obsahy dvou pravoúhlých trojúhelníků, přičemž obsahy těchto trojúhelníků lze snadno zjistit jako polovinu obdélníku 9×5 a čtverce 5×5 ,
- 2) **rozřezávání** – rozdělit trojúhelník na dva pravoúhlé trojúhelníky 9×5 a 5×5 , jejichž obsah lze opět určit jako polovinu příslušného obdélníku, respektive čtverce.

rámování:



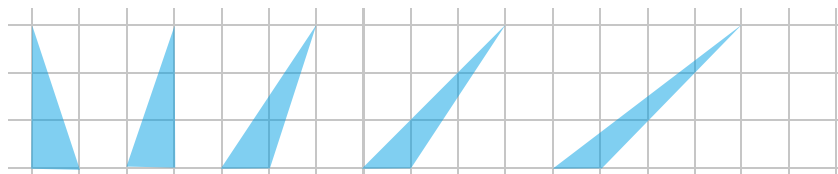
rozřezávání:



Strategie rámování je výhodná také při objevování tzv. **Cavalieriho principu**. Ten v jednoduchosti říká: „Pokud mají trojúhelníky stejnou základnu i výšku, jejich obsahy jsou stejné.“ K takovému objevu se obvykle dochází až na 2. stupni, ale zkušenosti s tímto vztahem mohou získávat i žáci 4. a 5. ročníků.

Úloha:

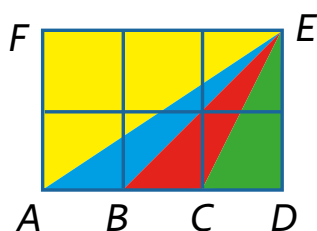
Zjisti obsah trojúhelníků.



Tato myšlenka pomáhá žákům k pozdějšímu objevování vzorce pro obsah trojúhelníku. Přes sérii úloh (zde je uvedena série 5 trojúhelníků se základnou 1, výškou 3 a obsahem 1,5) žáci zjišťují, že **obsah trojúhelníku závisí pouze na straně a její příslušné výšce**. Pokud s tím získají dostatek zkušeností, nebudou mít problém ani s pozdějším přechodem na čistý papír a počítání obsahu na něm.

Úloha:

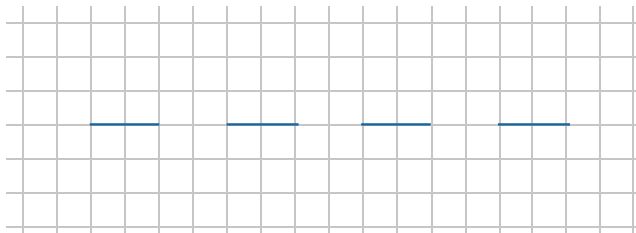
Kolik je na obrázku trojúhelníků?
Urči obsah každého z nich.



Další úloha umožňuje žákovi využít poznatky o obsahu a straně a výšce trojúhelníku z úloh předchozích. Všechny trojúhelníky mají zadanou stejně dlouhou úsečku délky 2 a obsah mají mít také 2. Vrcholy hledaných trojúhelníků leží na přímce, která je rovnoběžná se zadanými úsečkami a je od nich ve vzdálenosti 2 (takové přímky existují dvě). Kdekoli na těchto přímkách umístíme třetí vrchol, bude mít daný trojúhelník požadovaný obsah 2.

Úloha:

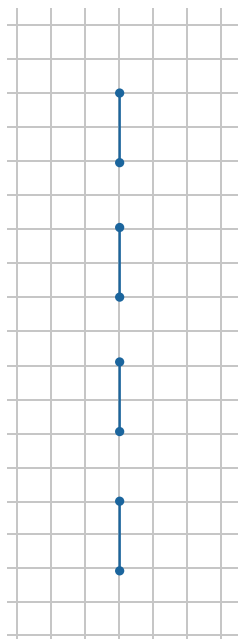
Daná úsečka je stranou trojúhelníku.
Hledej různé trojúhelníky s obsahem 2.



Obtížnost této úlohy lze **ovlivnit délkou zadané strany trojúhelníku, různou velikostí daného obsahu trojúhelníků anebo také polohou výchozí strany**, jak ukazují následující úlohy. Obecně bývá pro žáky snazší vodorovné umístění, pak svislé a nakonec šikmé.

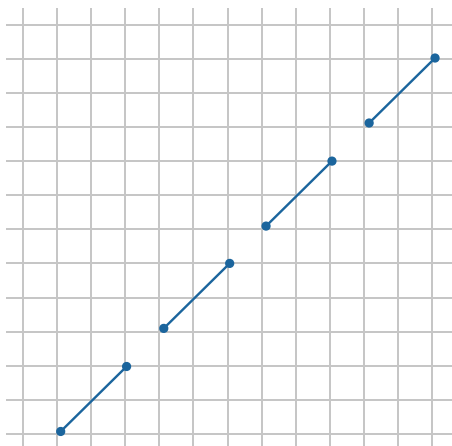
Úloha:

Daná úsečka je stranou trojúhelníku.
Hledej různé trojúhelníky s obsahem 2.



Úloha:

Daná úsečka je stranou trojúhelníku.
Hledej různé trojúhelníky s obsahem 2.



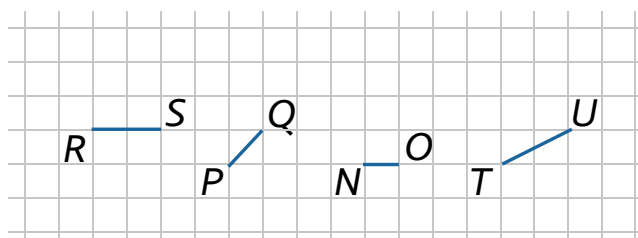
Vztah mezi obvodem a obsahem

Pokud mají žáci dobrou představu o obvodu a obsahu, mohou začít zkoumat nějaké souvislosti mezi těmito dvěma hodnotami. V následující úloze mohou objevit, že pokud seřadíme čtverce podle délky jejich strany od nejkratší po nejdelší, bude to stejné pořadí, jako když je seřadíme podle velikosti jejich obsahů od nejmenšího po největší. Vzhledem k tomu, že obsah čtverce je přesně určen délkou jeho strany a naopak, platí tento poznatek obecně u všech čtverců.

Úloha:

Každá úsečka na obrázku je stranou čtverce.

- Čtverec narýsuj.
- Zjisti obsah čtverců. Seřaď čtverce vzestupně podle velikosti jejich obsahů.
- Seřaď úsečky vzestupně podle jejich délky.



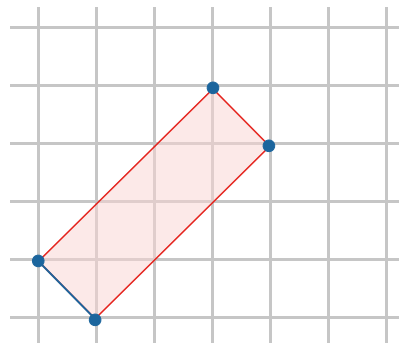
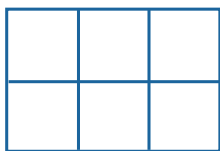
Vztah mezi obvodem a obsahem obdélníku je složitější, protože obsah zde není určen délkou jedné strany, ale délkou dvou sousedních stran.

Úloha:

Najdi mřížový obdélník s obsahem 6. Urči jeho obvod.

Řešení:

Řešením úlohy jsou tři mřížové obdélníky.

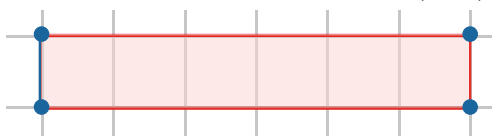


První dva obdélníky se ve třídě zřejmě objeví nejčastěji. Žáci mohou určit jejich obvod buď z vlastností mříže, nebo měřením. Zjistí, že obvody těchto obdélníků se liší. Žáci tak vlastně řeší úlohu, na součin kterých dvou čísel lze rozložit obsah 6. Aby byl obdélník mřížový, řešením jsou délky mřížových úseček, které lze v mříži vymodelovat.

Najdi mřížový obdélník s obsahem 6. Urči jeho obvod.

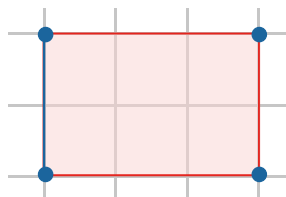
obsah: $6 = 1 \cdot 6$

obvod: $(1 + 6) \cdot 2 = 14$



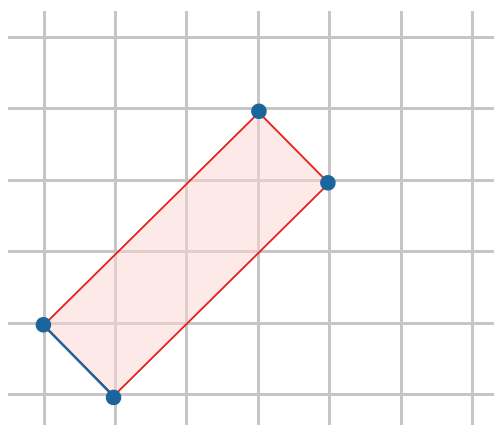
obsah: $6 = 2 \cdot 3$

obvod: $(2 + 3) \cdot 2 = 10$



obsah: $6 = \sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}$

obvod: $(\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) \cdot 2 = 8\sqrt{2} \approx 11,3$



Vidíme, že čím je obdélník „rozpláclejší“, tím je jeho obvod větší. Naopak čím víc se délky sousedních stran blíží sobě (a tedy čtverci), tím je obvod menší. Další náměty pro práci směrem k tomuto objevu přikládáme v další sérii úloh. Parametr gradace je velikost obsahu obdélníků.

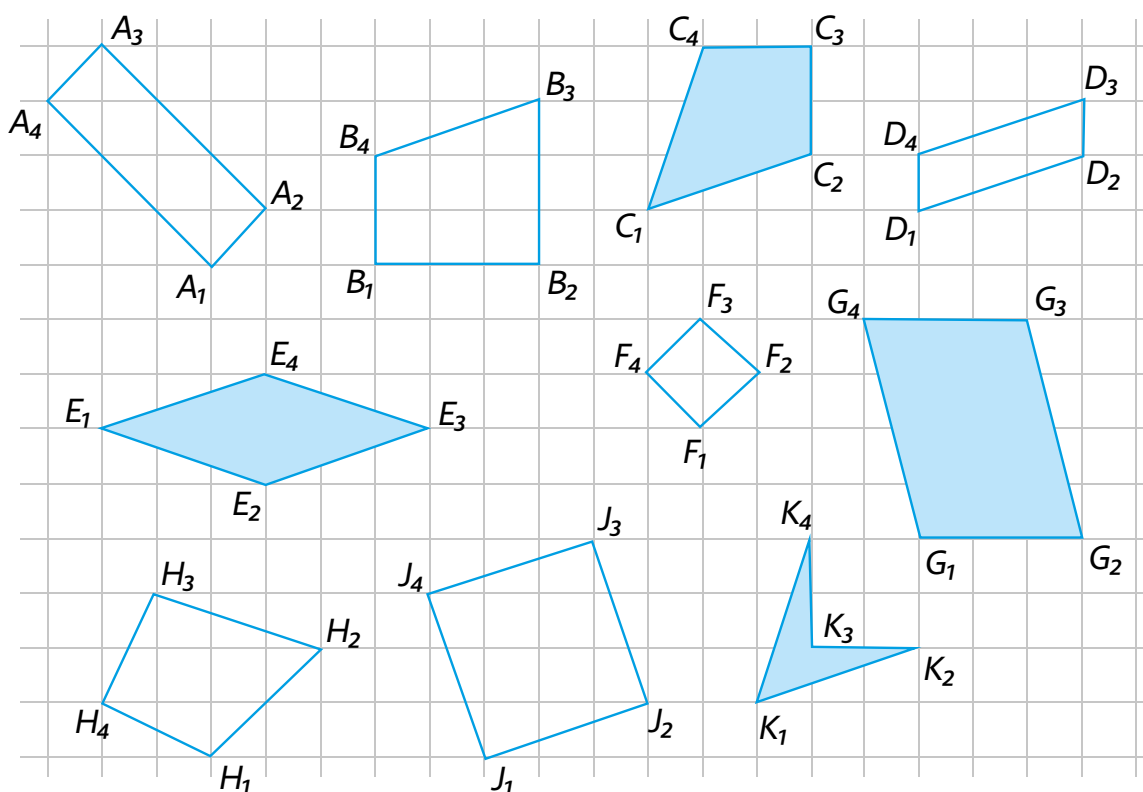
Úloha:

Jaký obvod může mít obdélník, jehož obsah je
a) 12, b) 24, c) 36, d) 72?

Následující úloha je aplikační – úkolem žáků je použít naučené strategie k určení obvodu a obsahu.

Úloha:

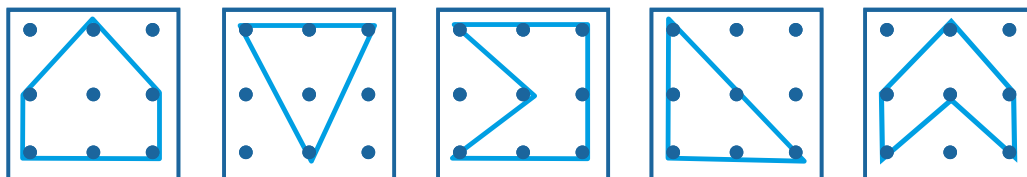
Ve čtvercové mříži jsou vyznačeny čtyřúhelníky, viz obrázek.
Urči jejich obvod a obsah.



Další dvě úlohy přinášejí další cíl – schopnost odhadnout velikost obvodu a obsahu na základě mnoha zkušeností s jejich určováním. Žáci si svůj odhad zaznamenají a pak ověří.

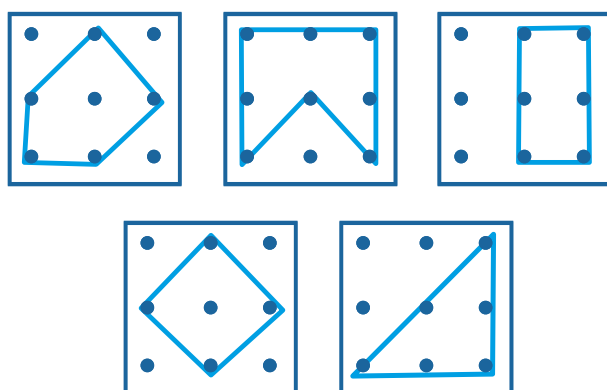
Úloha:

Přerýsuj obrazce do centimetrové mříže.
Porovnej obvody obrazců nejdříve odhadem
a pak ověř co nejpřesnějším měřením v milimetrech.
Následně porovnej obsahy obrazců odhadem a pak ověř výpočtem.



Úloha:

Přerýsuj obrazce do centimetrové mříže.
Porovnej obvody obrazců nejdříve odhadem
a pak ověř co nejpřesnějším měřením v milimetrech.
Následně porovnej obsahy obrazců odhadem a pak ověř výpočtem.



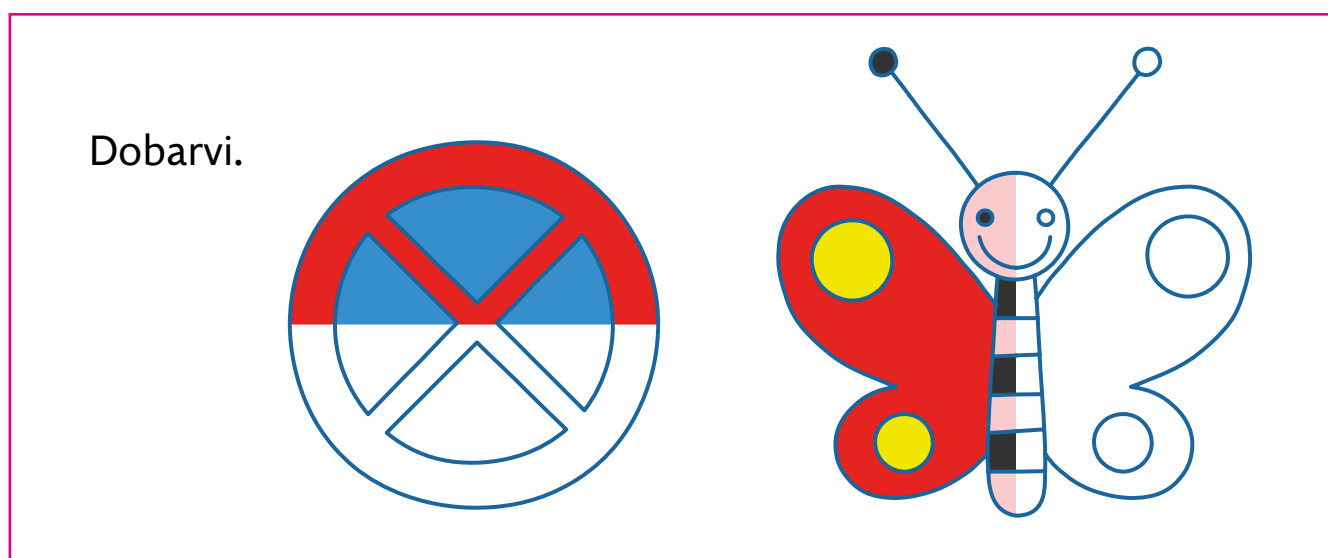
Osová souměrnost

Osová souměrnost je jednou z vlastností, kterou můžeme u rovinných i prostorových útvarů zkoumat. Důležité jsou však předešlé sémantické zkušenosti. V praxi se osvědčila práce se zrcátkem. Osu souměrnosti žáci často chápou jako polohu zrcadla na papíře, které útvar rozděluje na dvě stejné části. Ostatně opravdová práce se zrcátkem umožňuje velmi dobře řešit úlohy na osovou souměrnost.

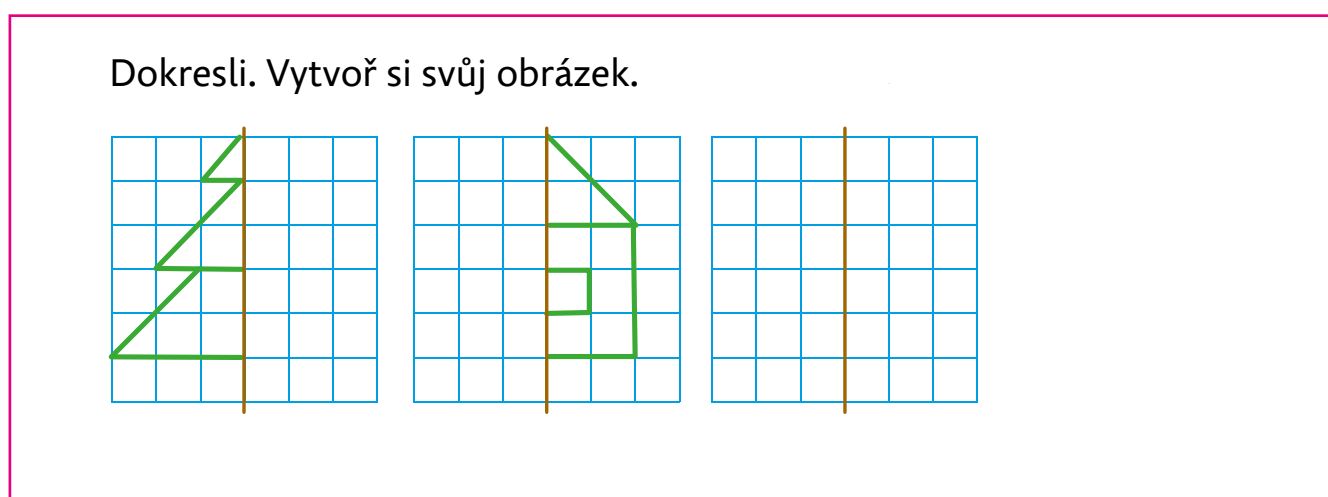
Gradačními parametry jsou zejména složitost geometrického tvaru, se kterým pracujeme, a také poloha osy souměrnosti. Pro mnoho žáků bývá nejjednodušší svislá osa, a pokud ji mají v jiné poloze, někteří si obrázek otočí tak, aby osa byla ve svislé poloze. Osy souměrnosti umístěné šikmo bývají obecně náročnější než osy umístěné svisle a vodorovně.

Úkolem žáků tak může být dokončit obrázek nebo útvar tak, aby byl osově souměrný.

Úloha:

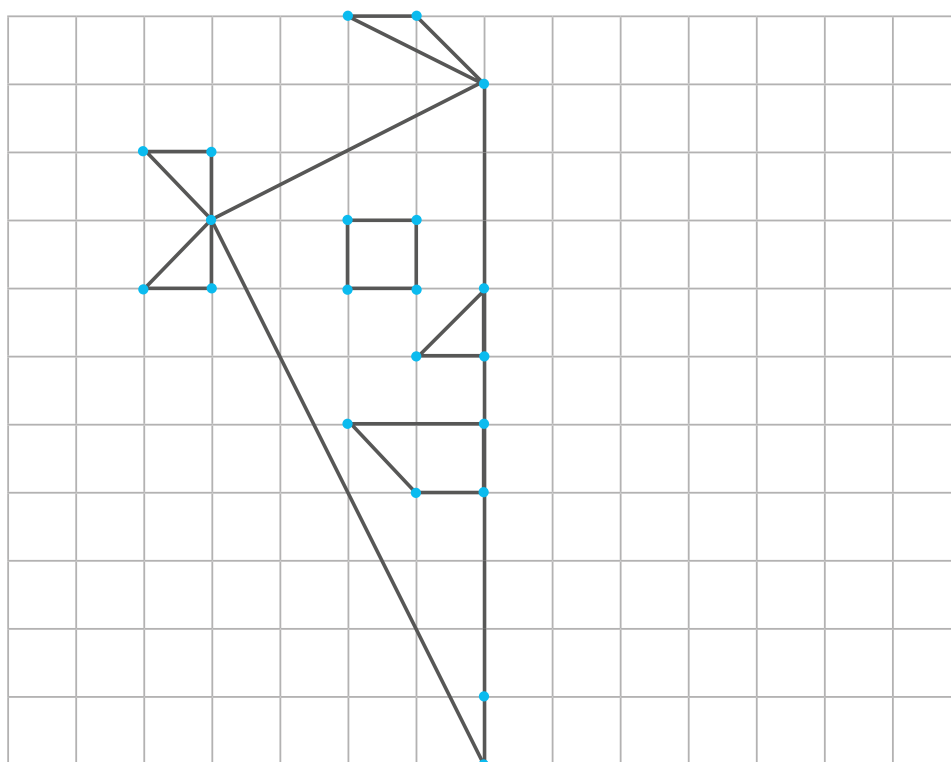


Úloha:



Úloha:

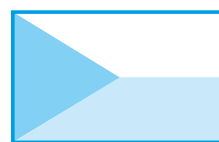
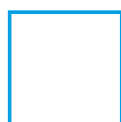
Dokresli druhou půlku obrázku tak, aby byly obě poloviny osově souměrné.



Nebo můžeme žákům zadat různé obrázky a geometrické tvary a nechat je osy souměrnosti hledat. Mohou tak přijít k důležitým závěrům, že někdy existuje os nekonečně mnoho a někdy nemá útvar osu souměrnosti žádnou. O takovém útvaru řekneme, že není osově souměrný.

Úloha:

Nakresli přímku, která rozdělí obrázek na dvě osově souměrné části.

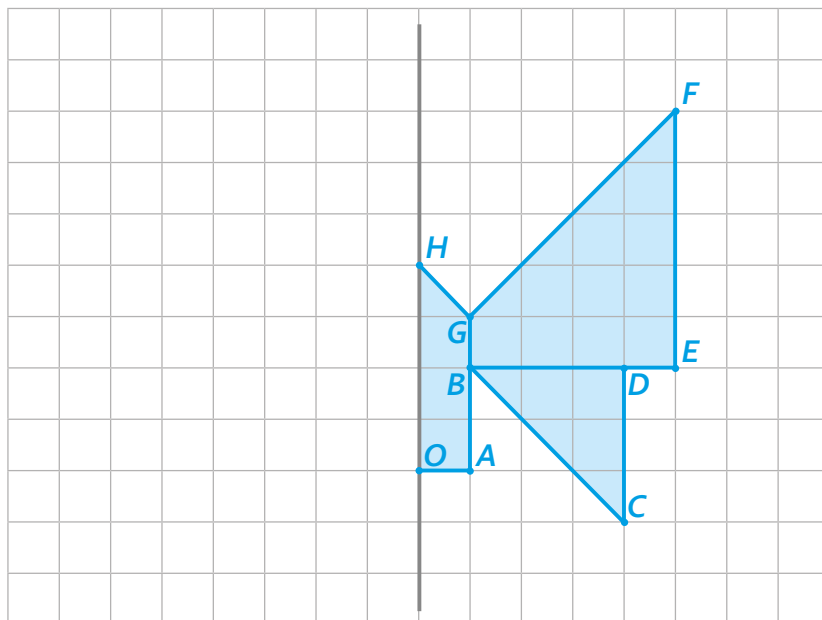


Osovou souměrnost můžeme velmi dobře propojit se souřadnicovým zápisem bodů v mříži, jak ukazují další úlohy.

Úloha:

Bod O na obrázku má souřadnice $(0, 0)$.

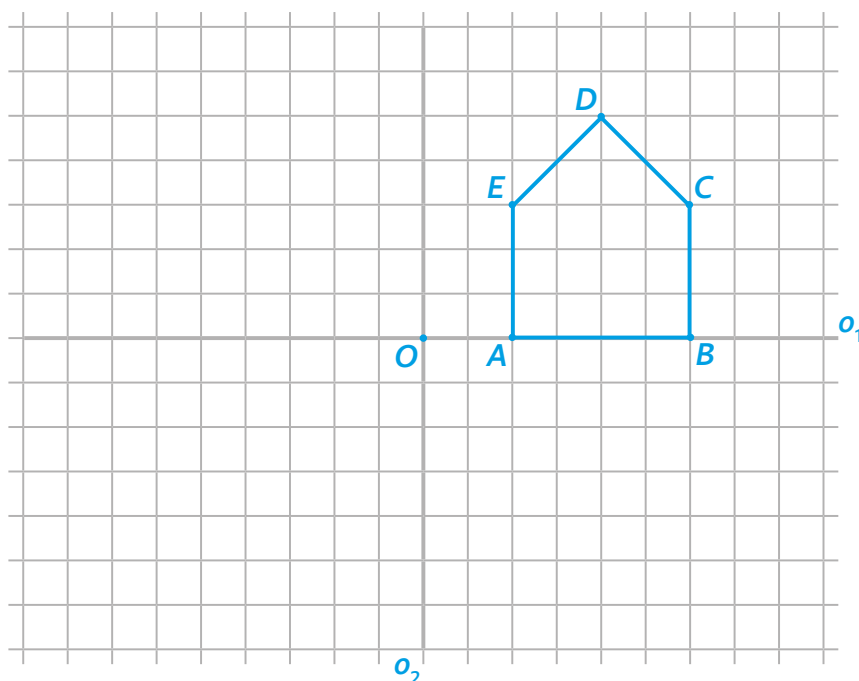
- Urči souřadnice bodů A, B, C, D, E, F, G a H .
- Dokresli druhou polovinu obrázku v osové souměrnosti podle vyznačené přímky (osy).
- Urči souřadnice bodů, které v osové souměrnosti odpovídají původně nakresleným bodům A, B, C, D, E, F, G a H .



Úloha:

Je dán počátek $O(0, 0)$.

- Urči souřadnice bodů A, B, C, D, E .
- Sestroj obrázek domku v osové souměrnosti podle vodorovné osy o_1 .
- Sestroj obrázek domku v osové souměrnosti podle svislé osy o_2 .
- Urči souřadnice všech nově vzniklých vrcholů domků.

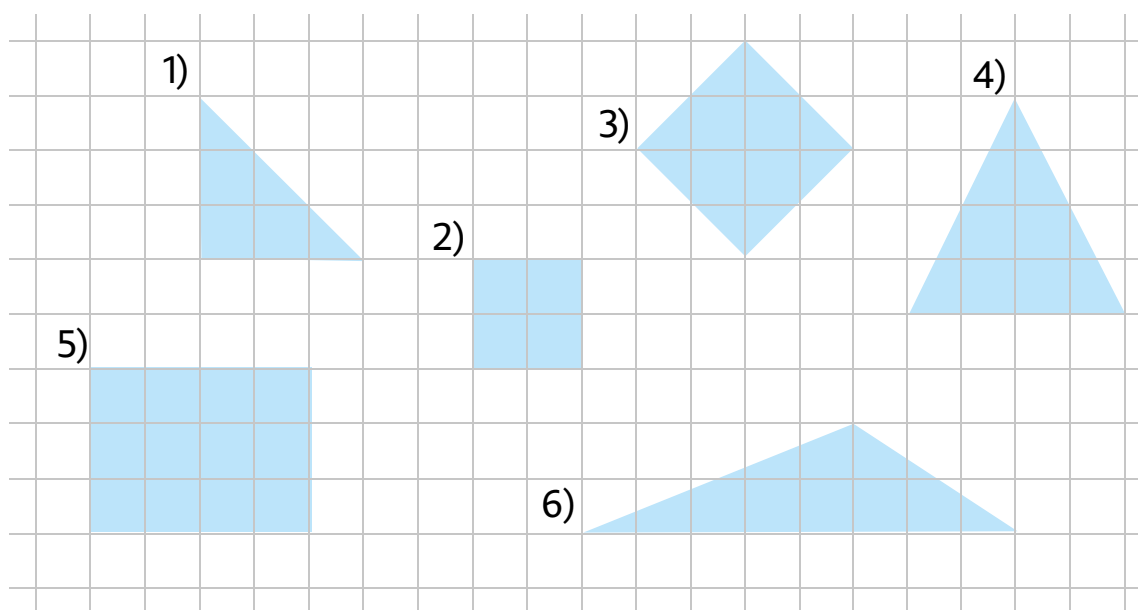


Další aplikační úlohy

Hra Sova může velmi dobře sloužit jako komplexní aplikační úloha, ve které žáci využijí znalosti objevených strategií a vlastností útvarů. Myšlený útvar tak mohou uhádnout prostřednictvím otázek zaměřených na obvod, obsah, kolmost, rovnoběžnost, souměrnost, počet vrcholů a stran, velikost vnitřních úhlů atd. Zásadním gradačním parametrem je zde počet útvarů v galerii, ze kterých vybíráme, a počet společných vlastností, které útvary mají. Čím více si jsou útvary podobné, tím obtížnější je rozlišit je pomocí otázek (například pokud by všechny útvary byly různé čtverce). Detailnější popis hry Sova je v materiálech k prostředí Krychlové stavby.

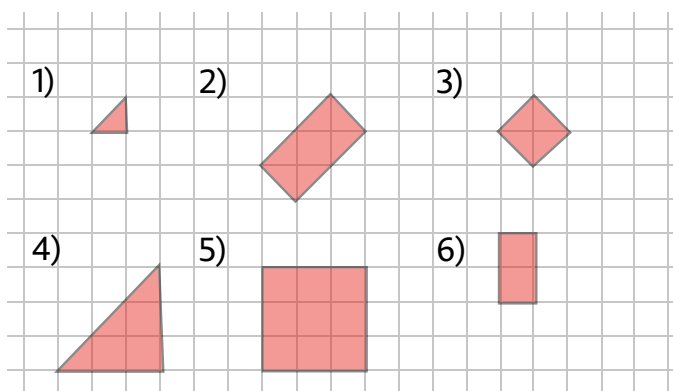
Úloha:

Sova. Dokážeš uhodnout myšlený útvar z obrázku na tři otázky?



Úloha:

Sova. Dokážeš uhodnout myšlený útvar z obrázku na tři otázky?

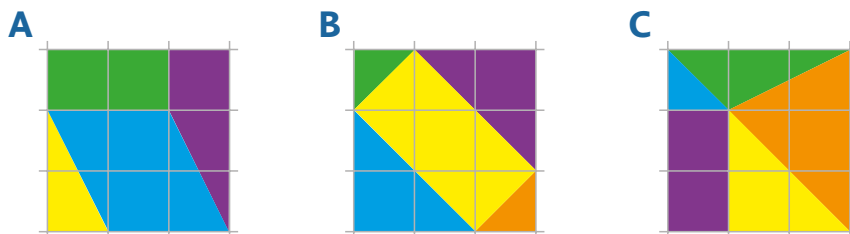


Další typ úloh, ve kterých žáci aplikují své poznatky, mohou být tyto **mozaiky**. Gradačními parametry jsou zde zejména počet útvarů v mozaice a jejich složitost. V úlohách žáci aplikují geometrickou terminologii.

Dalším možným rozšířením je klasifikace a třídění trojúhelníků a čtyřúhelníků dle jejich vlastností (trojúhelníky: pravoúhlé, rovnoramenné atd.; čtyřúhelníky: čtverce, obdélníky, rovnoběžníky atd.).

Úloha:

Vytvoř barevné mozaiky podle obrázku.



- Zjisti, kolik jednobarevných trojúhelníků a čtyřúhelníků je ve všech mozaikách.
- Které z těchto trojúhelníků jsou shodné?
- Zjisti, kolik dvoubarevných trojúhelníků a čtyřúhelníků je ve všech mozaikách.
- Zjisti obvod i obsah každého dvoubarevného čtyřúhelníku.

Úloha:

Vytvoř barevné mozaiky podle obrázku.



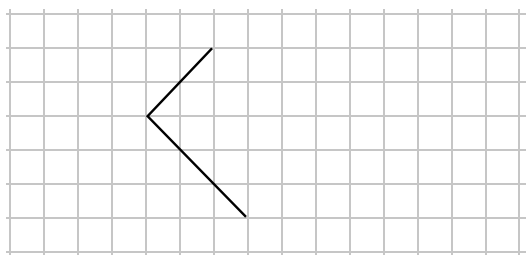
- Zjisti, kolik čtyřúhelníků je ve všech mozaikách.
- Kolik trojúhelníků je ve všech mozaikách?
- Kolik dvoubarevných čtyřúhelníků a pětiúhelníků je ve všech mozaikách?
- Zjisti obvod a obsah každého trojbarevného pětiúhelníku.

Tato úloha umožňuje žákovi, aby si vybral jednu z podmínek, podle kterých neúplný útvar dokončí. Zde se obecně velmi těžko určuje, která z podmínek je obtížnější, protože záleží na zkušenostech každého konkrétního žáka. Pro někoho může být obtížnější utvořit osově souměrný útvar, pro jiného zase útvar se zadaným obsahem nebo obvodem.

Úloha:

Dotvoř podle fantazie tak, aby

- a) bylo k zápisu použito 20 šipek
- b) byl výsledný útvar osově souměrný
- c) měl útvar obvod 140 mm
- d) měl útvar obsah $12,5 \square$.



KRYCHLOVÉ STAVBY

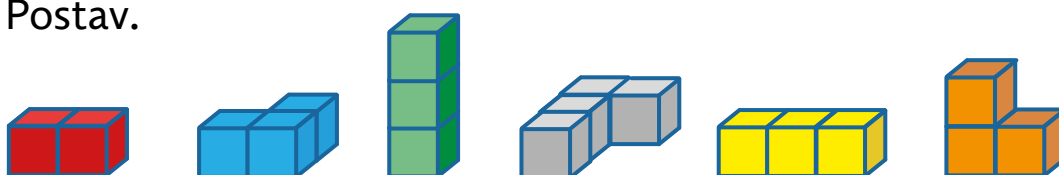
Krychlové stavby patří mezi matematická prostředí, která jsou silně závislá na manipulaci. Žáci staví stavby z krychlí, učí se je zaznamenávat plánem, zaznamenávat je různými pohledy nebo získávají zkušenosti s objemem či povrchem.

1. ročník

V prvních úlohách z prostředí Krychlové stavby žáci experimentují. Úlohy mají často formu hry, žáci staví stavby a poté si o nich společně povídají. Hra je často prvním krokem žáků při získávání nových poznatků. Zásadní je používání pomůcek (zde krychlí). Žáci je používají až do doby, kdy již nemají potřebu je používat.

Úloha:

Postav.



Úloha:

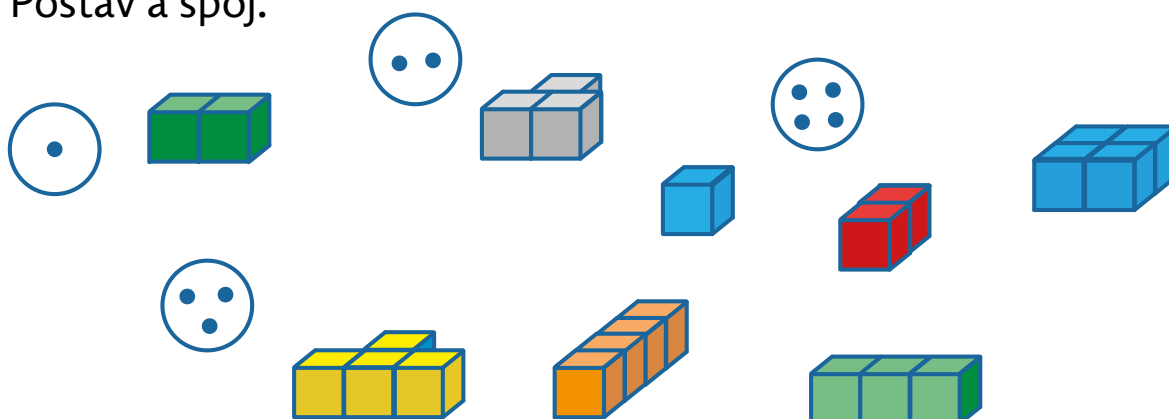
Postav.



Žáci se s krychlovými stavbami seznamují. Začínají používat s pomocí učitele i jazyk, který při práci budou potřebovat, např. krychle, krychlová stavba, podlaží apod.

Úloha:

Postav a spoj.



V úloze se objevuje nový prvek, **spojování staveb s reprezentantem počtu** (zde počet teček). Očekává se, že žáci budou spojovat počet teček se stavbou se stejným počtem krychlí. Ale žáci mohou najít i jiné kritérium. Např. řeknou, že počet teček znamená počet podlaží stavby. Úloha tedy mj. nabízí volbu kritéria pro spojování.

Úloha:

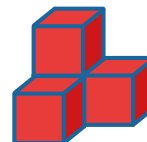
a) Postav stavbu, která má 2 krychle v 1. podlaží a 2 krychle ve 2. podlaží.

b) Postav stavbu, která má 3 krychle v 1. podlaží a 2 krychle ve 2. podlaží.

Zde se v úlohách objevuje **podmínka**. To jsou další možnosti, jak úlohy s krychlovými stavbami ztěžovat. Pokud žáci mají s úlohami potíže, učitel může zařadit úlohu jednodušší nebo s žáky úlohu rozdělit na jednotlivé kroky. Tím se žáci učí významnou strategii – rozdělit komplexní úlohu do více jednodušších úloh.

Úloha:

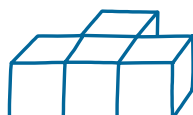
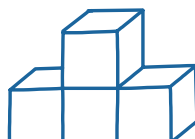
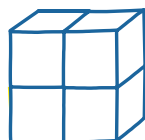
Spoj stejné stavby.



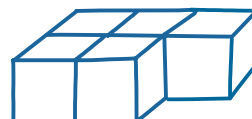
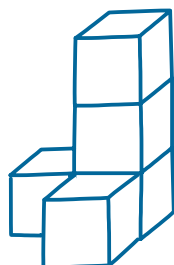
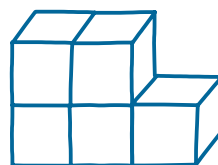
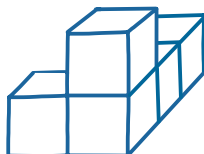
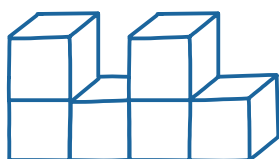
V úloze žáci řeší „**stejnosti**“ staveb. Pro některé žáky parametrem stejnosti může být barva. Spojování podle barev zde ale není vítáno, žáci získávají zkušenosti se stejností objektů (staveb). Proto se nabízí tvorba úloh, kdy všechny stavby budou barevně jednotné.

Úloha:

Spoj stejné stavby.

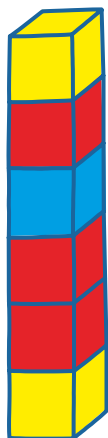


Spoj stejné stavby.



Otázka stejnosti není pro žáky jednoduchá. Někteří považují navzájem otočené (převrácené) stavby za stejné, jiní ne. Je to problém, který u žáků dlouho vyvolává diskuzi, jak v rovině, tak v prostoru. V prostoru je situace ještě „základnější“, protože stavby jsou pro žáky sémantické (skrze životní zkušenost). Proto např. 3. a 5. stavba na horním obrázku (vláček a věž ze tří krychlí) pro ně nejsou stejné. Taková situace v rovině, např. při určování shodných trojúhelníků, nehrozí.

Postav stavbu a doplň.



Ve věži jsou:

  krychle.

  krychle.

  krychle.

Ve věži je celkem  .

Úlohy s barevnými krychlemi nabízejí řadu myšlenek. Postupně se úlohy ztěžují různými gradačními parametry. Je důležité si uvědomit, že často obtíže žákům nepřináší pouze matematické myšlenky, ale do popředí se dostává práce s textem. Obě náročnosti je třeba odlišovat a zaměřovat se na ně odděleně. V této úloze žáci evidují počet barevných krychlí ve stavbě. Z hlediska českého jazyka není úloha zcela přesná. Ve větě „Ve věži jsou ____ modré krychle“ by mělo být správně „je ____ modrá krychle. Na to se může s žáky zavést diskuze, pokud to nějaký žák sám pojmenuje.

Úloha:

Postav stavbu a doplň.



 krychle je ve podlaží.

 krychle je v a v podlaží.

 krychle je v , a v podlaží.

Věž má celkem podlaží.

Oproti předchozí úloze žáci nevidují počty barevných krychlí, ale zapisují, v jakém podlaží se krychle vyskytují. Dá se očekávat, že to pro žáky může být o něco náročnější. Častým používáním pojmu podlaží se tyto těžkosti v budoucnu překonají.

Úloha:

Doplň.



Ve věži jsou .

Ve věži jsou .

Ve věži je .

Ve věži je celkem .

 je ve podlaží.

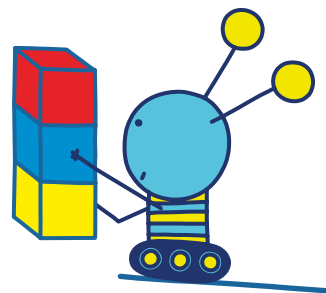
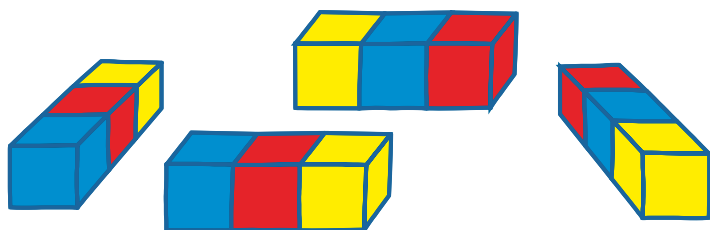
 je v podlaží a ve podlaží.

 je ve podlaží, v podlaží a v podlaží.

Úloha spojuje obě předchozí úlohy dohromady. Tím i přibývá množství textu. Jak již bylo psáno, učitel může jednotlivé kroky úlohy oddělit.

Úloha:

Jsou stejné?



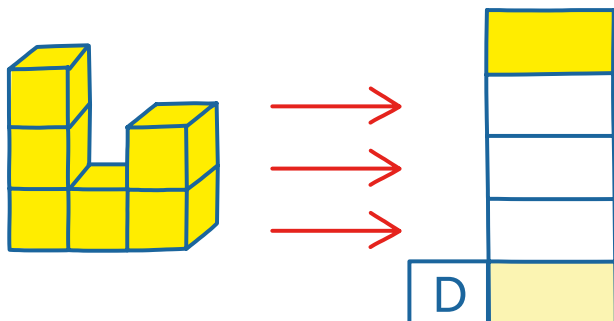
V úloze se znovu vyskytuje otázka stejnosti staveb. Již jsme popisovali, že záleží na úhlu pohledu. Důležité je diskutovat a své názory podložit argumentací. V budoucnu žáci svůj pohled na stejnost budou vyvíjet. Např. se shodnými útvary v rovině řeknou: „Útvary jsou stejné (shodné), pokud je po vystřihnutí můžeme celé dát na sebe tak, že se zcela překrývají.“

Práce s tabulkou

V úloze se objevuje nový prvek – práce s tabulkou. Žáci evidují počet jednotlivých barevných krychlí v každém podlaží. Písmeno D značí dohromady. Žáci tam doplňují počet všech krychlí stavby (součet počtu krychlí jednotlivých podlaží).

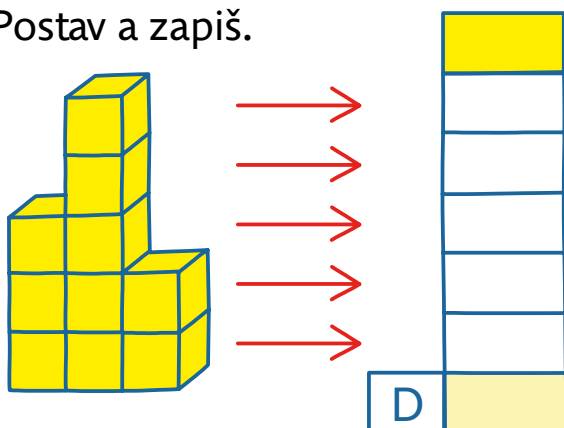
Úloha:

Postav stavbu a zapiš do tabulky.



Úloha:

Postav a zapiš.



Postav a zapiš.

The image shows a 3D structure of cubes on the left, composed of yellow and blue cubes. To its right are three red arrows pointing towards a 2D grid on the right. The grid is a 5x3 matrix. The top row has a yellow cell, a blue cell, and a white cell containing the letter 'D'. The second, third, and fourth rows are entirely white. The fifth row has a white cell containing the letter 'D', followed by two yellow cells.

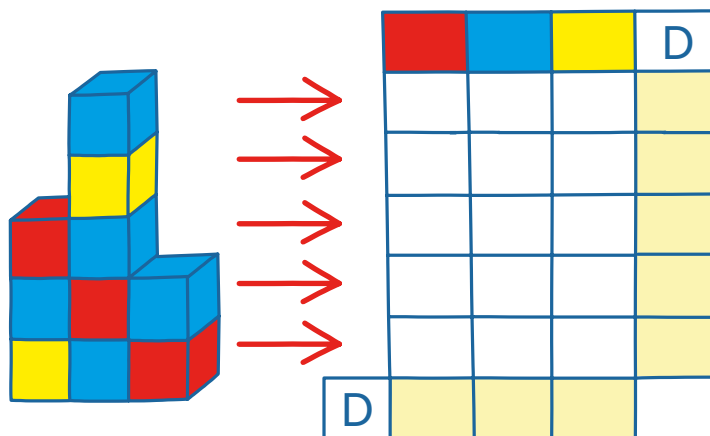
		D
D		

[illegible]

Postav a zapiš.

Úloha:

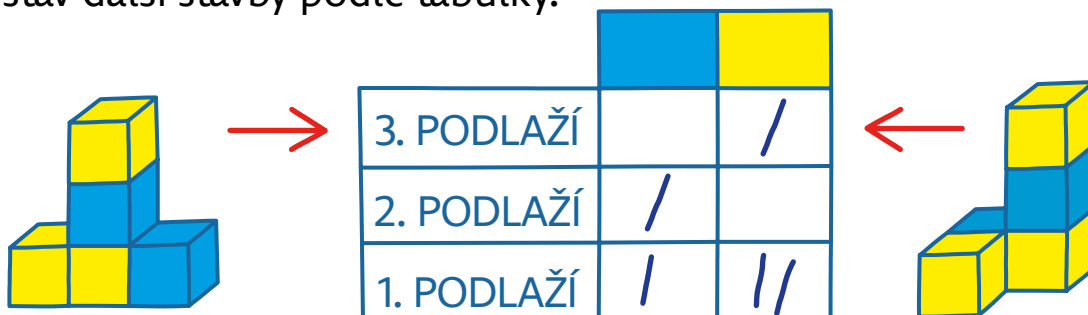
Postav stavbu a zapiš do tabulky.



Pro dospělé či starší žáky je jasné, že musí odpovídat součty jednotlivých počtů krychlí dle barev a součet krychlí ve všech podlažích. Např. v této úloze se objeví součty $3 + 5 + 2$ (řádek D) = $1 + 1 + 2 + 3 + 3$ (sloupec D) = $1 + 2 + 3$ (sloupec D). Pro žáky v 1. ročníku může jít o velký objev.

Úloha:

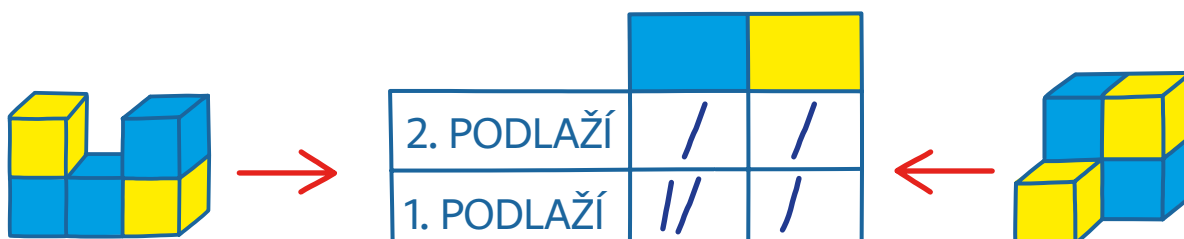
Postav další stavby podle tabulky.



Úloha žákům ukazuje, že evidence do tabulky nemusí vždy jednoznačně určit stavbu. Zde je hezky vidět, že jedna tabulka odpovídá dvěma různým stavbám. To může být také zvýšením náročnosti úloh – vzniká více řešení a žáci se dostávají do oblasti kombinatoriky. Dvě úlohy níže přináší stejnou myšlenku ještě ztíženou o použití „ukryté či neviditelné“ krychle. Toto popisujeme v další části.

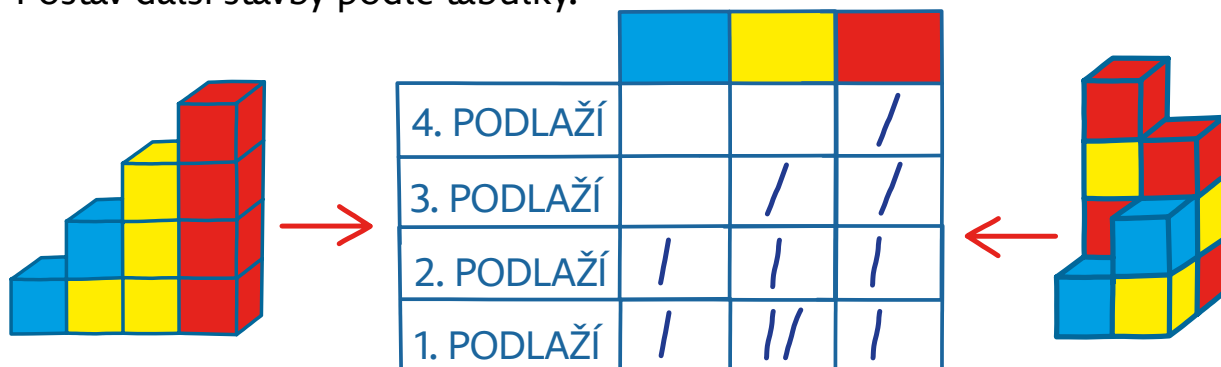
Úloha:

Postav. Jakou barvu mají ukryté krychle?



Úloha:

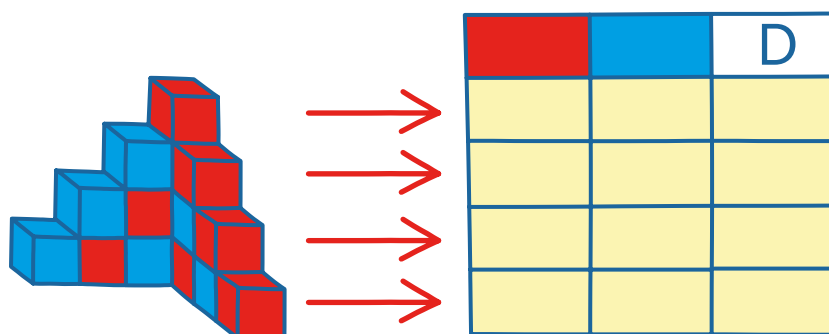
Postav další stavby podle tabulky.



Neviditelné krychle

Úloha:

Z osmi  a osmi  postav stavbu. Zapiš.

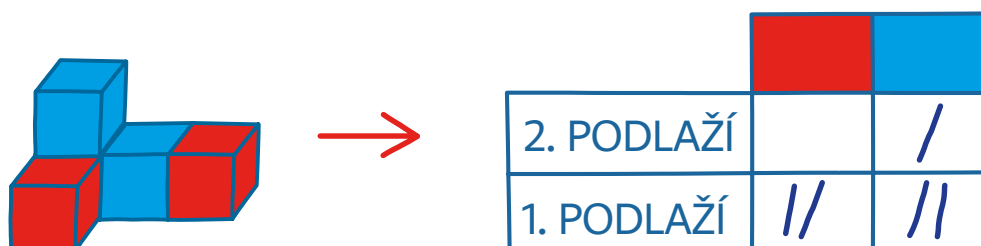


Náročnější úlohy lze vytvářet s použitím neviditelných krychlí. Konkrétně zde nejsou vidět tři krychle – dvě modré a jedna červená. Tím vzniká i více řešení (zde jsou konkrétně tři možná). Proto je vhodnější se zavedením neviditelné krychle začít postupně – s jednoduchými stavbami a v první úloze s jednou neviditelnou krychlí – viz následující úlohy.

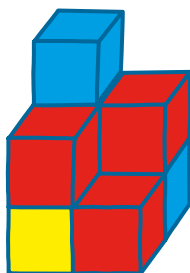
Úloha:

Postav. Jakou barvu mají ukryté krychle?

a)

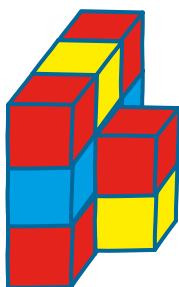


b)



	Red	Blue	Yellow
3. PODLAŽÍ		/	
2. PODLAŽÍ	//	/	
1. PODLAŽÍ	/	/	//

c)



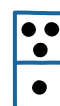
	Red	Blue	Yellow
3. PODLAŽÍ	//		/
2. PODLAŽÍ	/	//	/
1. PODLAŽÍ	//	/	/

Plán

Zaznamenávání staveb plánem je další věc, kterou se žáci učí. Ideální je, když vzniká skrz potřebu žáků. Tu lze posilovat úlohami, kdy jeden žák vidí stavbu a nějakým způsobem ji má zaznamenat ostatním spolužákům tak, aby ji byli schopni postavit. K tomu existuje velké množství aktivit. Pokud se přesto plán neobjeví, k žákům se dostane zavedením v úloze. Je doporučováno delší dobu zapisovat veškeré plány ve vodorovné poloze, aby si žáci fixovali plán s pohledem shora. Dobrymi úlohami k vyvolání potřeby plánu jsou i úlohy, které jsme popisovali výše. Jde o úlohy, kde k jedné tabulce lze postavit více staveb. To ukazuje, že je třeba hledat takový záznam, který stavbu určí jednoznačně.

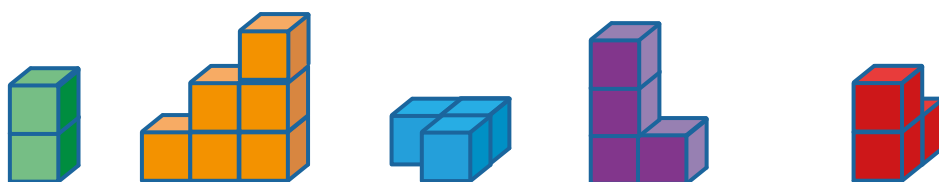
Úloha:

Postav svoje stavby ze 3 nebo 4 krychlí a znázorni je jako Kira.



Úloha:

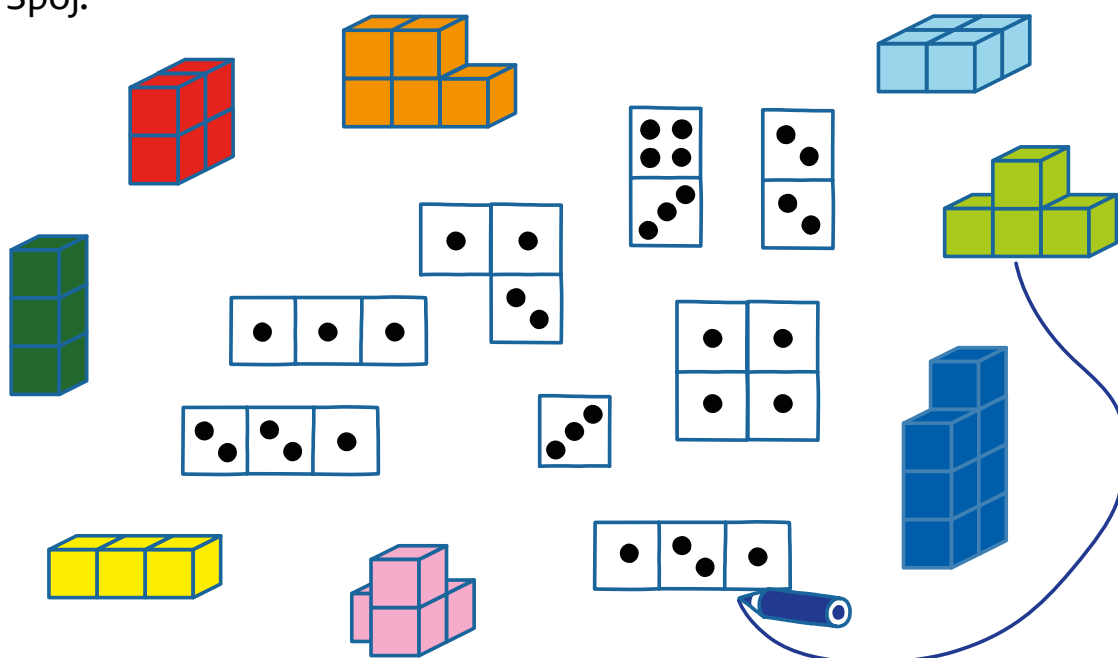
Postav stavby podle obrázku a zapiš plán.



Žáci vytváří plány k zadaným stavbám. **Gradovat úlohy lze složitostí staveb nebo počtem použitých krychlí.** Jednodušší pro žáky mohou být v začátcích úlohy, kdy jsou plány již vytvořeny a žáci pouze spojují stavbu s adekvátním plánem.

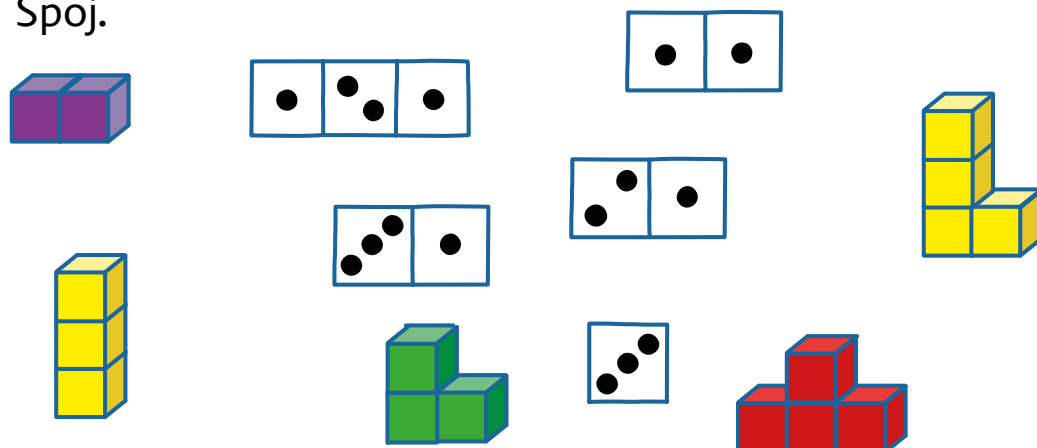
Úloha:

Spoj.



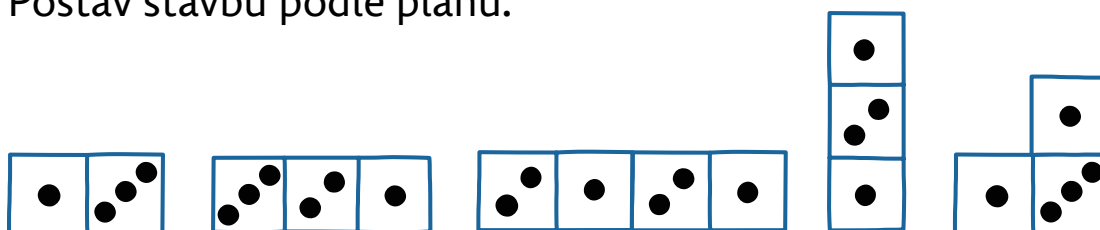
Úloha:

Spoj.



Úloha:

Postav stavbu podle plánu.

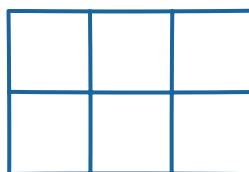


Důležitý je oboustranný proces, nejen tvorba plánu k zadané stavbě, ale i tvorba stavby k danému plánu.

Úloha:

Přečti tabulku a postav stavbu. Zakresli do mříže pozemek, na kterém stavba stojí.

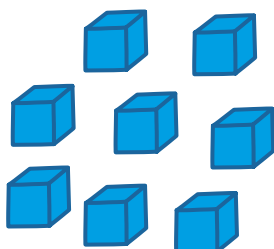
4. PODLAŽÍ	1
3. PODLAŽÍ	2
2. PODLAŽÍ	3
1. PODLAŽÍ	3



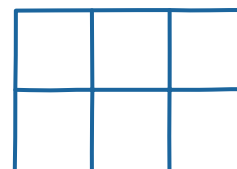
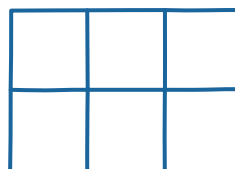
Úlohy lze zadat i pomocí tabulky. Čtení informací z tabulek je velice důležitou dovedností žáků, kterou je potřeba dlouhodobě rozvíjet. Úloha má více řešení, takže zasahuje i do oblasti kombinatoriky. **Počet řešení lze rovněž považovat za gradační parametr.**

Úloha:

Postav stavbu z 8 krychlí podle tabulky a zapiš plán.



3. PODLAŽÍ	2
2. PODLAŽÍ	3
1. PODLAŽÍ	

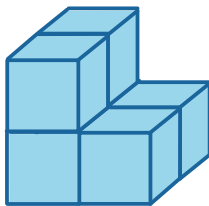


2. ročník

Slovo právě, přesnost jazyka

Postupně s žáky pracujeme i na zpřesňování jazyka, je to stěžejní úloha učitele. Ten sám se snaží přesný jazyk ve své výuce správně používat.

To si ukážeme na následující úloze:



Ema si postavila tuto stavbu
Má pravdu?

a říká: „V prvním podlaží mám tři krychle, ve druhém dvě.“

Žáci budou argumentovat, že jedna krychle je skrytá a jsou tam krychle 4. Některý žák namítne, že jsou tam čtyři, ale také tři.

Ve 3. ročníku nebo i později lze zadat žákům úlohu, kde se zadání bude lišit pouze v upřesnění slova právě:

Úloha:

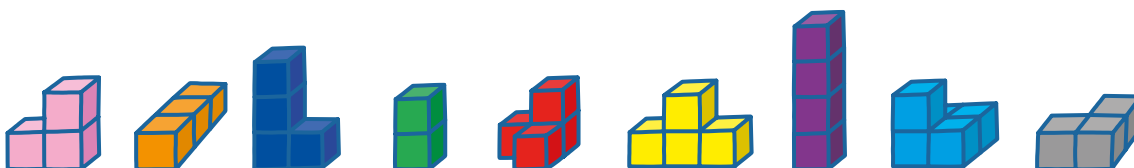
- a) Postav stavbu, která má v prvním podlaží 4 krychle.
 - b) Postav stavbu, která má v prvním podlaží právě 4 krychle.

Možná se objeví myšlenka uvedená výše (některý žák např. postaví stavbu z 5 krychlí), to je ideální příležitost k diskuzi. Pokud se neobjeví, učitel se může ptát: „Je mezi úlohami nějaký rozdíl?“ Není potřeba žáky k zpřesňování textu tlačit, ale dávat jim k tomu příležitosti, vést k potřebě jazyk zpřesňovat.

Úloha:

Které krychlové stavby mají právě dvě podlaží?

Zakroužkuj barvu a zapiš plán.



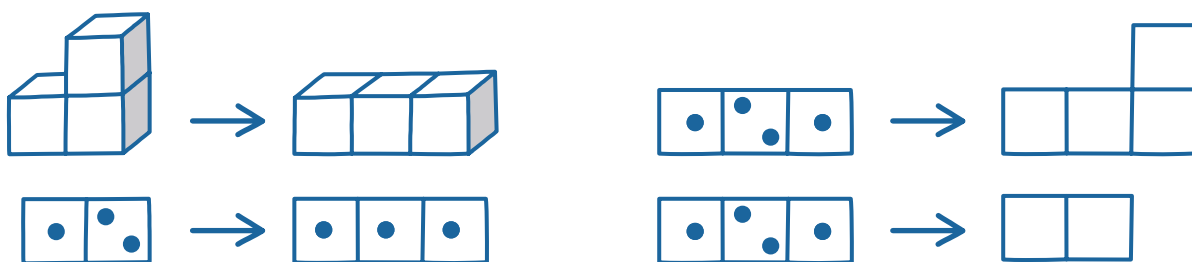
Konkrétní úloha s použitím slova právě je na obrázku výše. Je dost možné, že pokud se slovo právě v textu vynechá, nebude to mít na řešení žáků vliv. Jak již bylo psáno, je to spíše o tom zařazovat podobné myšlenky do výuky a vyvolávat tím žakovskou diskuzi.

Přestavby

Dalším typem úloh jsou přestavby staveb (přesuny krychlí). Pro hodně žáků bude nutná manipulace s krychlemi. Ti žáci, kteří ji nebudou potřebovat, mají dobře rozvinutou prostorovou představivost. Níže lze najít různé typy úloh s přesuny krychlí. Učitel může sledovat, jaký typ úloh činí žákům potíže, a tomu se více věnovat. **Gradačními parametry zde bude: složitost staveb, počet přesunů krychlí, použití různých jazyků a jejich kombinace (stavba – portrét, plán) nebo počet řešení.**

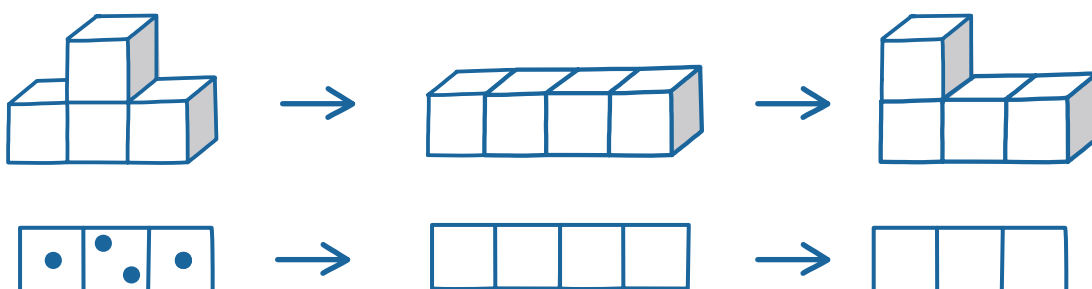
Úloha:

Postav stavbu, přesuň krychli, zapiš plán.



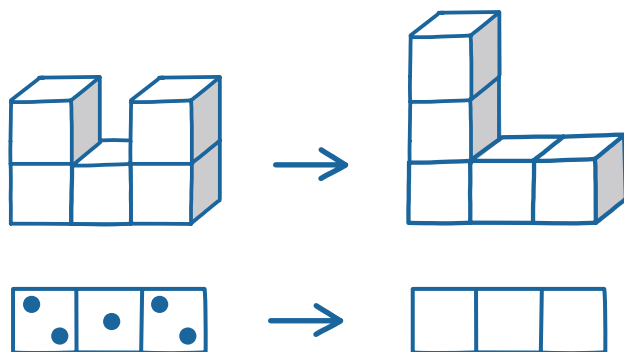
Úloha:

Postav stavbu, přesuň krychli, zapiš plán.



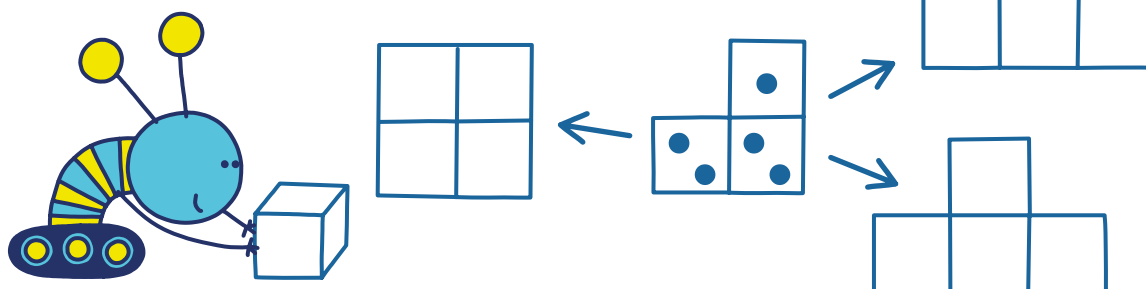
Úloha:

Postav stavbu, přesuň krychli, zapiš plán.



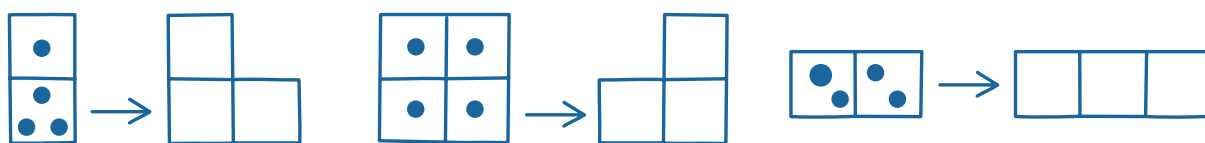
Úloha:

Postav, přesuň, zapiš plán.



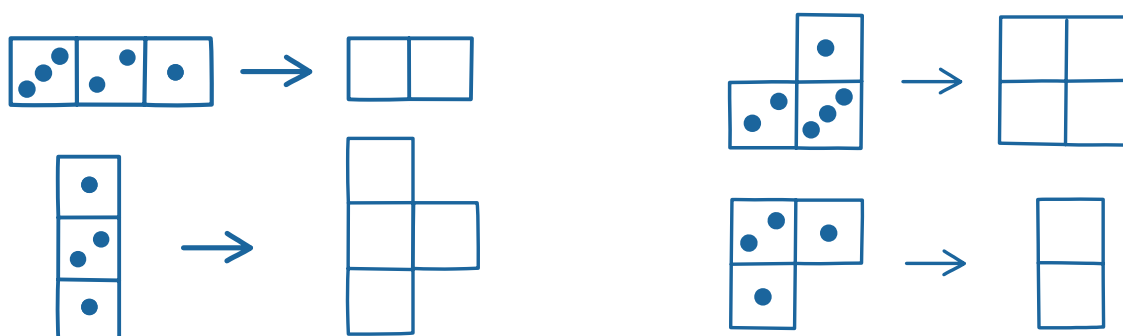
Úloha:

Postav, přesuň, zapiš plán.



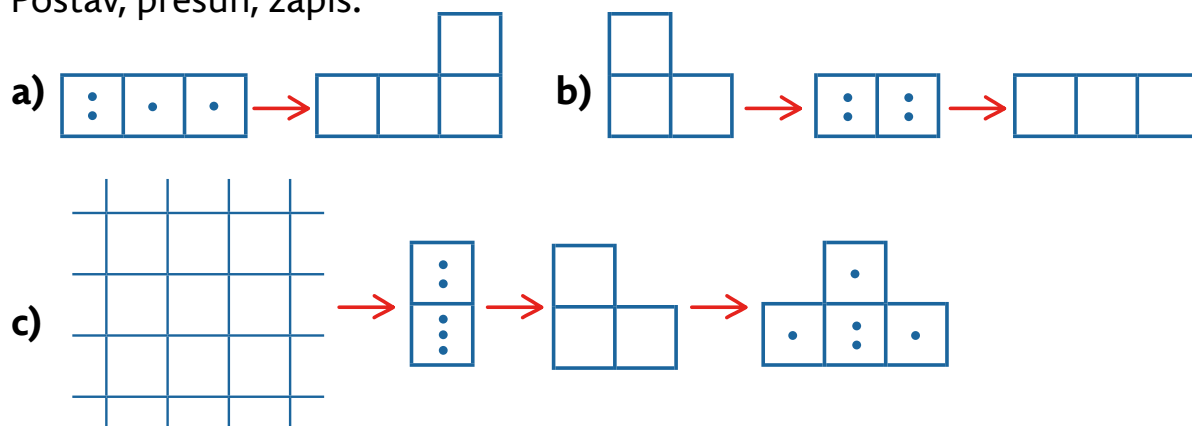
Úloha:

Postav, přesuň, zapiš plán.



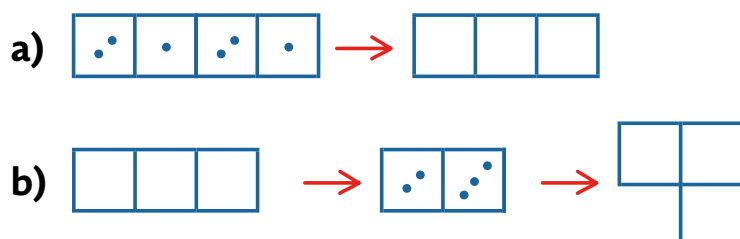
Úloha:

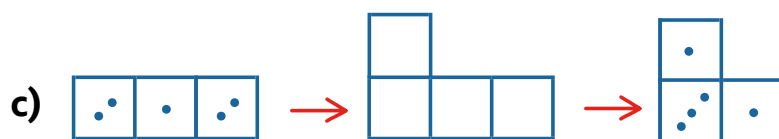
Postav, přesuň, zapiš.



Úloha:

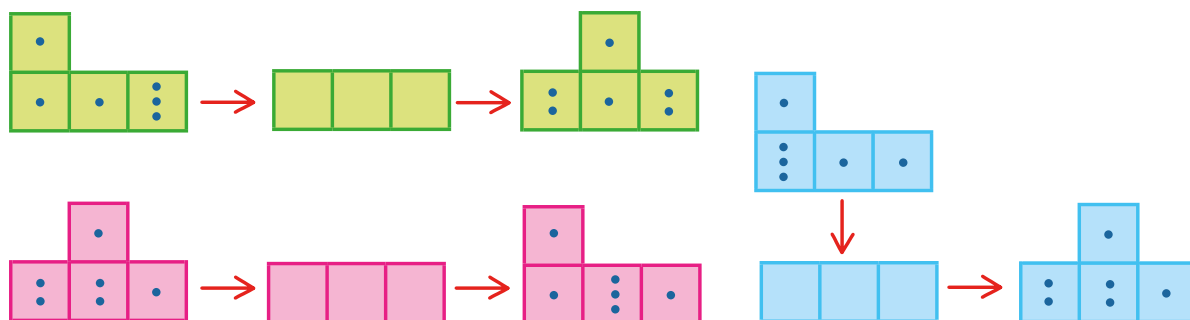
Postav, přesuň, zapiš.





Úloha:

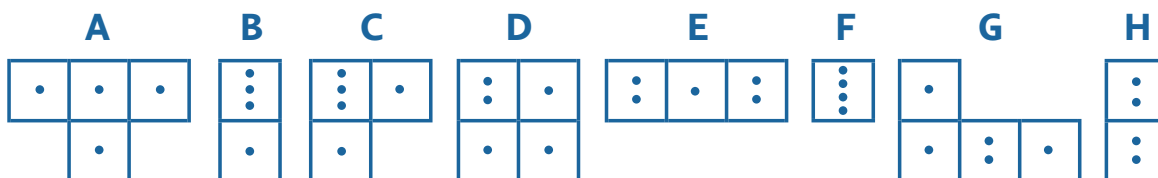
Postav stavbu, přesuň krychli, zapiš plán.



K rozvoji jazyka se jeví jako velmi vhodná aktivita **hra Sova**, případně její obměny. Žáci si tím zlepšují komunikační dovednosti, používají geometrické termíny nebo si všímají odlišností a stejností staveb.

Úloha:

Hra Sova.



Ariana hádá, jakou stavbu si myslí Elmar.

ARIANA: Má tvoje stavba právě jednu krychli ve druhém podlaží?

ELMAR: ANO.

ARIANA: Má v prvním podlaží méně než 4 krychle?

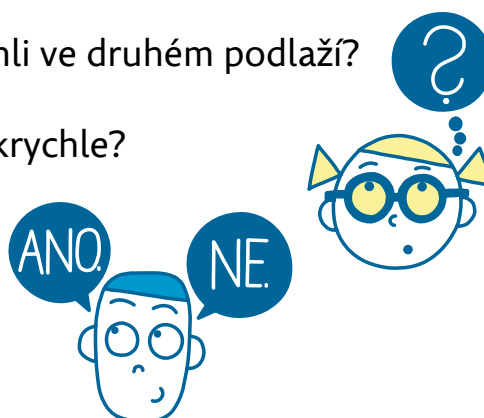
ELMAR: ANO.

ARIANA: Je postavena ze čtyř krychlí?

ELMAR: NE.

ARIANA: Tak si myslíš stavbu **C**.

Má Ariana pravdu?

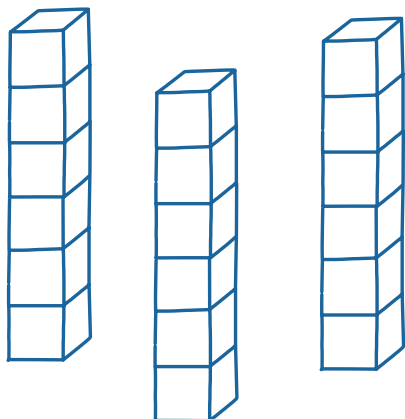


Podmínka

Dalším typem úloh je stavění krychlových staveb (v této úloze konkrétně věží) podle určité podmínky. Důležitou roli zde získává **čtenářská gramotnost a interpretace textu**.

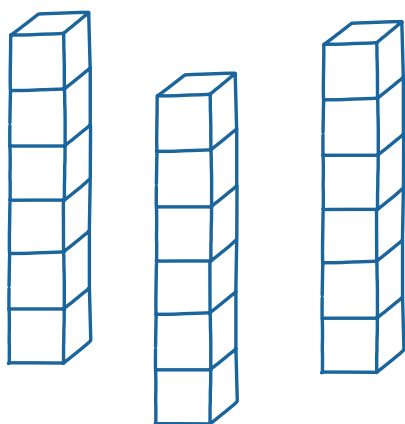
Úloha:

Postav stavbu z 6  a vybarvi.



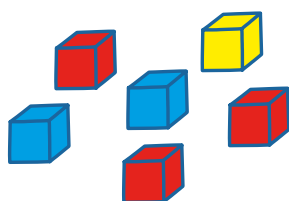
Úloha:

Postav stavbu. Použij 3  a 3 . Vybarvi náčrty. Můžeš hledat více řešení.

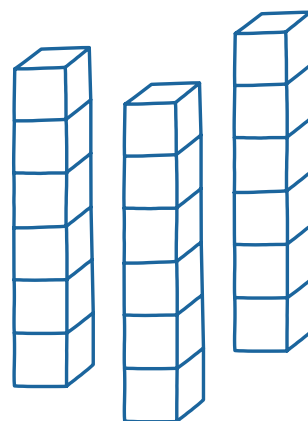


Úloha:

Postav věž.



V 1. podlaží je ,
Ve 2. podlaží je ,
Ve 3. podlaží je .
Vybarvi věž.



Úloha na obrázku nejspíše žákům nebude činit potíže – položí modrou krychli, na ni žlutou krychli a na ni zase modrou krychli. Učitel může sledovat, zda žák má potřebu věž skutečně stavět, někteří žáci možná budou vybarvovat bez použití manipulace. Takovým žákům lze zadat náročnější úlohy.

Úloha:

Postav věž, vybarvi nákres a doplň.



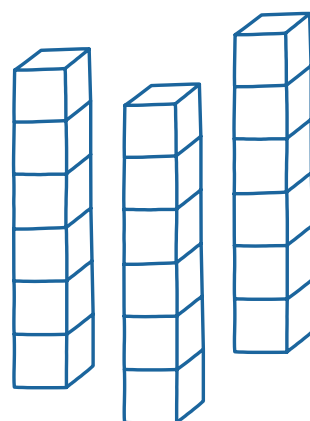
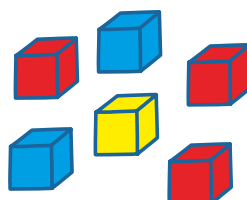
-  je ve 2. a 5. podlaží.
-  je ve 4. a 6. podlaží.
-  je v  a  podlaží.

Oproti předchozí úloze je tato náročnější. Při stavění věže mohou mít žáci potíže. To, že je modrá krychle v prvním podlaží, není napsáno, i když nám je to zřejmé. Podobně se dají úlohy gradovat, žáci pak častěji začínají vybarvováním před stavěním.

Úloha:

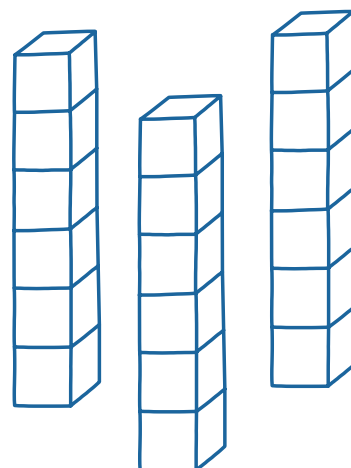
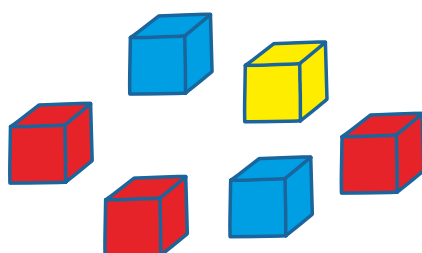
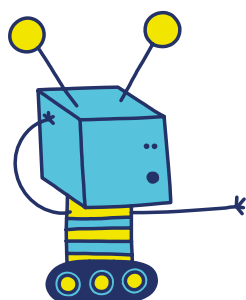
Postav a vybarvi věž.

-  Je v 1. a ve 2. podlaží.
-  Je **a)** ve 4. podlaží
- b)** v 5. podlaží
- c)** pod třemi .



Úloha:

Postav věž tak, že v 1., 3. a 5. podlaží jsou krychle stejné barvy a mezi dvěma modrými krychlemi jsou tři krychle. Zakresli.



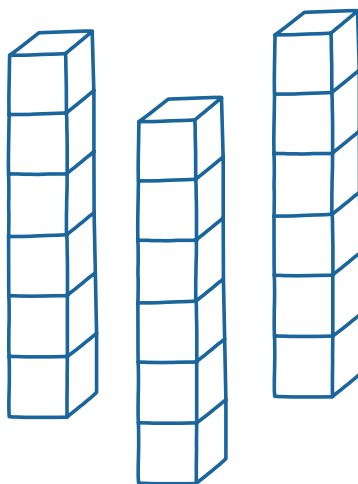
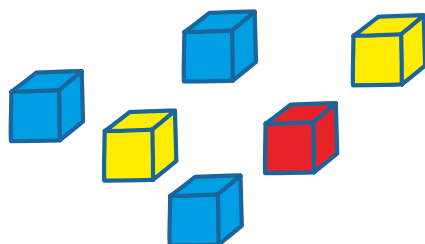
Lze zadat i úlohy, které mají více řešení. Pokud žáci všechna řešení najdou, opět to ukazuje jejich dobrý vhled do podobných úloh.

Úloha:

Vybarvi věž.

 je v 1. a 6. podlaží.

a  je mezi dvěma .



I v úlohách s podmínkami lze žáky vést k zpřesňování jazyka. Např. v této úloze není jasné, zda červená krychle je ve 4., nebo v 5. podlaží. Můžeme žáky vyzvat k tomu, aby zadání upravili tak, aby bylo jednoznačné:

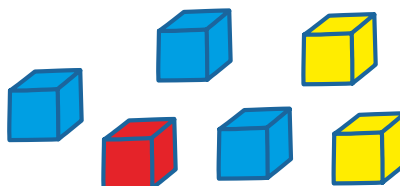
Úloha:

Postav věž.

 je v 1. a 2. podlaží.

Ve 3 podlaží je .

Červená krychle je pod žlutou krychlí.

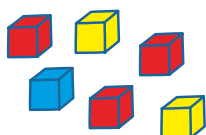


Náročnější úlohy mohou být s použitím **negace**. To se netýká pouze úloh s krychlovými stavbami, ale obecně použití negace ve slovních úlohách.

Úloha:

Postav věž, vybarvi náčrt.

Připrav si:



 je v 1., 2. a 5. podlaží.

 není ve 3. podlaží.

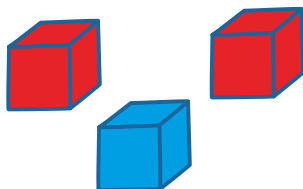
Kombinatorika

V prostředí Krychlové stavby se velice dobře budují kombinatorické myšlenky. Jedním z hlavních cílů je ten, že se žáci učí hledat systém k tomu, aby našli všechna řešení. Např. v následující úloze b) může znít: „Žlutou krychli umístím do 1. podlaží. Takové stavby postavím dvě. To samé lze udělat se zbývajících dvěma krychlemi, proto různých věží je 6.“

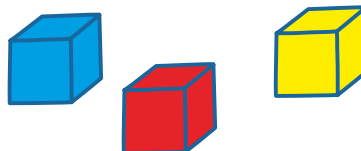
Úloha:

Kolik postavíš různých věží?

a)

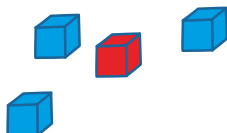


b)

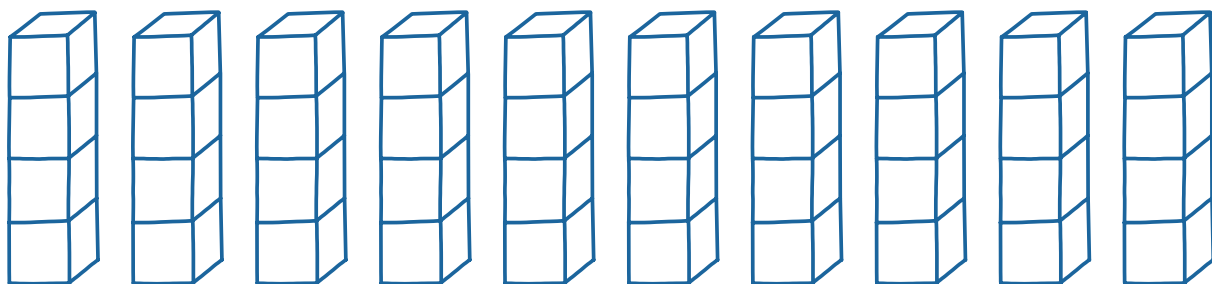


Úloha:

Připrav si:



Postav čtyřpodlažní věže. Kolik různých věží dokážeš postavit?
Svá řešení zaznamenej.



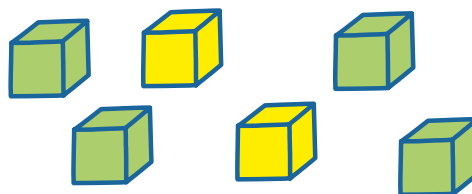
Náročnější úloha může být: Kolik lze postavit různých věží ze dvou červených a dvou modrých krychlí? Učitel se opět zaměří na řešitelské strategie. Taková může být např.: V potaz budeme brát pouze červené krychle. Buď ve věži jsou hned vedle sebe (3 možnosti), nebo ob jednu krychli (2 možnosti), nebo ob dvě krychle (1 možnost). Celkem je tedy 6 možností.

Diskuze ve třídě podporují různé řešitelské strategie, společným sdílením se žáci učí podobné úlohy nějakým způsobem uchopit – manipulace, grafické zpracování, hledání sofistikovanějších strategií (viz výše uvedená). To může učitel sledovat, a tím být připraven na to dávat další výzvy žákům, aby se mohli rozvíjet i v této oblasti.

Úloha:

Kolik různých věží jde postavit ze dvou žlutých a:

- a) jedné zelené krychle
- b) dvou zelených krychlí
- c) tří zelených krychlí
- d) čtyř zelených krychlí
- e) pěti zelených krychlí



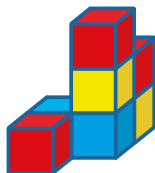
Taková výzva může dobře sloužit k individualizaci a diferenciaci ve třídě. Motivovaní žáci se snaží vyřešit co nejvíce a hledají systém, jak úlohu efektivně řešit. Nemotivovaní žáci mohou vyřešit např. úlohy a) a b).

Čtenářská gramotnost

V následujících úlohách se objevuje v úlohách s krychlovými stavbami náročný parametr – čtenářská gramotnost. Pokud žák úlohu nevyřeší, nemusí to být problém v oblasti matematiky, ale právě v oblasti porozumění úloze. Pokud žák úloze nerozumí, může mu pomoci situaci modelovat, položit nějakou jednodušší úlohu (zmírnit náročnost textu) nebo vhodnými otázkami žáka nasměrovat.

Úloha:

Postav stavbu a doplň tabulku.



				celkem
3. podlaží				
2. podlaží				
1. podlaží				
celkem				

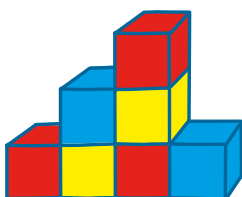
Rozhodni, co je pravda.

A	Žlutých krychlí ve stavbě je stejný počet jako modrých.	ANO	NE
B	Ve druhém a třetím podlaží jsou dohromady čtyři krychle.	ANO	NE
C	V prvním podlaží jsou dvě krychle stejné barvy.	ANO	NE
D	Modrých a žlutých krychlí je dohromady stejně jako červených.	ANO	NE
E	Ve druhém podlaží je dvakrát tolik krychlí než ve třetím podlaží.	ANO	NE
F	V každém podlaží je jedna červená krychle.	ANO	NE

V úloze se objevují dvě tabulky – jedna na evidenci, druhá na zodpovídání otázek. Pro žáka to může být náročné. Proto se obě tabulky mohou oddělit a nejprve vyplnit tabulku na evidenci, poté např. společně ve třídě řešit otázky.

Úloha:

Postav stavbu a doplň tabulku.



				CELKEM
3. PODLAŽÍ				
2. PODLAŽÍ				
1. PODLAŽÍ				
CELKEM				

Rozhodni, co je pravda.

A	Modrých krychlí je více než červených.	ANO	NE
B	Nejvíce krychlí se nachází v prvním podlaží.	ANO	NE
C	Červená krychle je v každém podlaží.	ANO	NE
D	Modrá krychle se dotýká stěnou vždy jen žluté krychle.	ANO	NE
E	V prvním podlaží je dvakrát více červených krychlí než ve třetím podlaží.	ANO	NE
F	Stavba je postavena z osmi krychlí.	ANO	NE

Úloha:

Postav trojpodlažní stavbu ze 6 krychlí tak, aby

a) v každém podlaží byl stejný počet krychlí,

b) v prvním podlaží bylo o jednu krychli více než ve druhém podlaží,

c) v prvním podlaží bylo dvakrát tolik krychlí, kolik ve druhém a třetím dohromady.

Tabulky zde nahradil jenom text. Pro více žáků bude nutná manipulace s krychlemi.

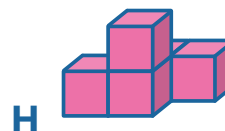
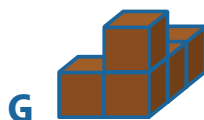
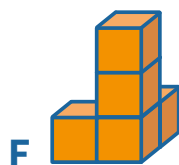
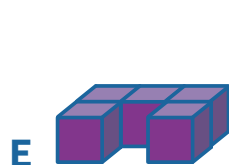
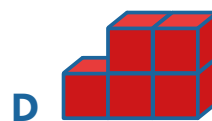
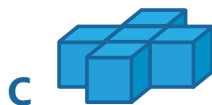
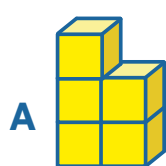
Přesouvání krychlí (proces)

Dalším typem úloh jsou úlohy s přesouváním krychlí. Na tento typ již žáci narazili v předchozích ročnících. Opět se žáci nejspíše ve třídě rozdělí – někteří budou potřebovat manipulovat s krychlemi, někteří budou řešit bez nutnosti manipulace.

V úlohách se propojuje koncept (obrázek) s procesem (přesun krychlí). Žáci s dobrým konceptuálním vnímáním často manipulaci nebudou potřebovat. Vidí vstupní a výslednou situaci a bez manipulace určí, jaká krychle se kam přesune. Podobné situace se objevují i v dalších prostředích – např. ve výstavištích, v origami apod. Není potřeba žádné reedukace. Žák, který manipulaci potřebuje, ji používá. Když získá dostatek zkušeností, možná ji v budoucnu nebude potřebovat.

Úloha:

Každá stavba je složena z 5 krychlí. O kterých stavbách Elmar s Arianou mluví?



ELMAR: Když přesunu kteroukoli krychli mé stavby, nikdy se mi nepodaří vytvořit jednopodlažní stavbu.

ELMAR mluví o stavbách:

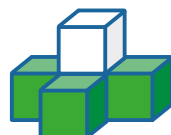
ARIANA: Když přesunu jednu krychli mé stavby, mohu vytvořit stavbu **A**.

ARIANA mluví o stavbách:

Úloha:

Vracíme se k úloze 60/1.

B



C

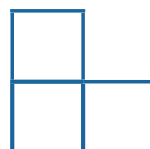
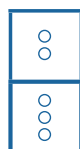
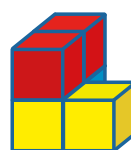
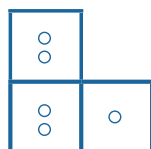
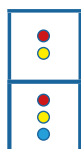


Najdi další takové dvojice staveb.

Úlohy s přesouváním krychlí lze gradovat např. větším počtem přesunů. Rovněž lze gradovat použitím **více barev**.

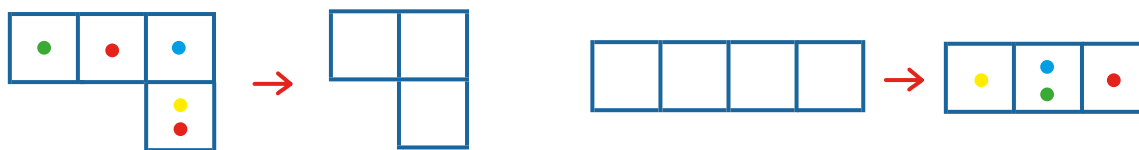
Úloha:

Postav a obarvi tečky v plánu barevné stavby.



Úloha:

Postav, přesuň, zapiš.



Do kategorie úloh zaměřených na čtenářskou gramotnost patří i úlohy s podlažími.

Úloha:

Doplň.

a) Pepa bydlí 3 podlaží nad námi a Honza 5 podlaží pod Pepou.

Já bydlím o podlaží výše/níže než Honza.

b) Aurel bydlí podlaží pod námi. Marek bydlí 4 podlaží nad

Aurelem. Já bydlím o podlaží výše/níže než Marek.

Stává se, že žáci mají potíže s podobnými úlohami, protože jim chybí nějaký záchytný bod – začátek. Podobná situace vzniká např. v úloze s mincemi: „Dědeček přidal vnukovi do kasičky 3 Kč, babička 5 Kč. Kolik Kč přibylo vnukovi do kasičky?“ Někteří žáci řeknou: „To nejde, nevím, kolik tam bylo na začátku.“ V úloze s mincemi se nabízí zadat žákům několik vstupních hodnot (kolik bylo v kasičce na začátku), žák poté zjistí, že na tom vlastně nezáleží. V úlohách s podlažími je dobré žáky směřovat ke kreslení si situace, která jim pomůže k vhledu do úlohy. Může se i vyrobit z papíru poschoďový panelák a situace se na něm modeluje.

Pozn.: Ve zmiňovaných úlohách čísla vystupují v roli operátoru (5 podlaží pod, přibyly 3 Kč, ...). Pokud se např. v úlohách s mincemi zadá počáteční suma (bylo v kasičce např. 8 Kč), toto číslo není operátor, ale stav.

3.–4. ročník

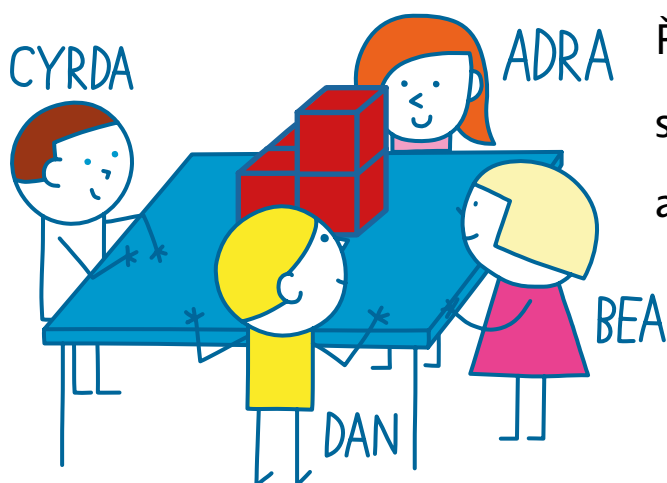
Průměty

Ve 3. ročníku se s žáky zavádí různé pohledy na krychlové stavby – **shora (půdorys)**, **zepředu (nárys)**, **z boku (bokorys)**.

Tím se generuje další množství zajímavých úloh. Učitel opět může sledovat, zda žák používá k řešení úloh manipulaci s krychlemi, nebo ji nepotřebuje. Úlohy se často spojují s prací s plánem stavby.

Úloha:

Na červenou stavbu ze 4 krychlí se zepředu dívají 4 žáci.

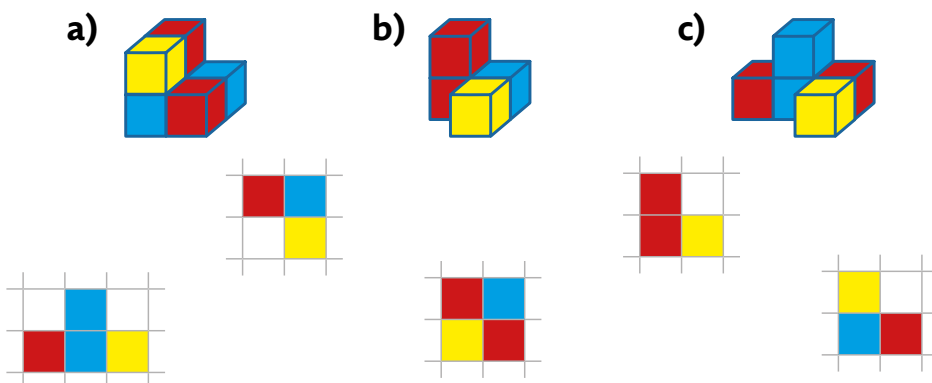


Řekni, který z nich vidí
stavbu takto 
a který takto .

Úloha slouží k tomu, aby si žáci uvědomili, že pohledy jsou různé. Pro každého z dětí je pohled zepředu z jiné strany. K tomu dobře poslouží podobné úlohy – je postavena stavba a kolem ní se postaví žáci a kreslí pohled zepředu, případně z boku. Akorát při pohledu shora žáci pojmenují, že je pro všechny stejný. Proto jej využíváme v záznamu plánů.

Úloha:

Ariana si nakreslila ke každé stavbě pohled shora a pohled zepředu. Nákrasy se jí však rozsypaly a jeden se ztratil. Pomoz Arianě přiřadit rozházené nákrasy a doplnit chybějící.

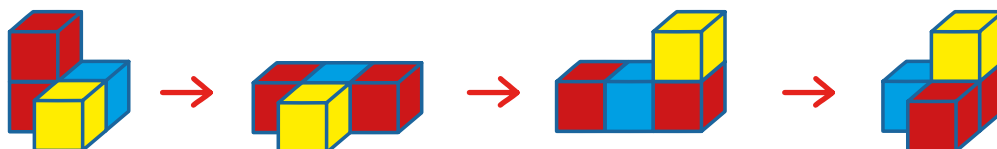


Přiřazování správných pohledů k odpovídajícím stavbám je další typ úloh. Úlohy se dají dobře gradovat. V této úloze je již např. použito více barev a kombinují se pohledy shora a zepředu. Pokud žákům úloha činí potíže, učitel může nějaký z parametrů odstranit – např. použít pouze jeden pohled.

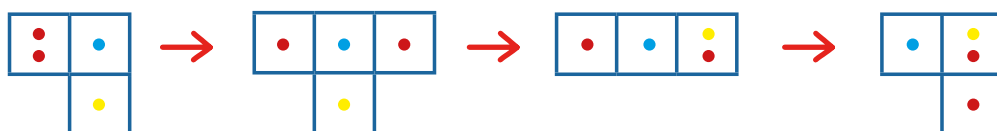
Úloha:

Ariana postavila stavbu ze čtyř krychlí a podle portrétů ji přestavovala. Elmar přitom kreslil plány a Kira pohledy na stavbu zepředu.

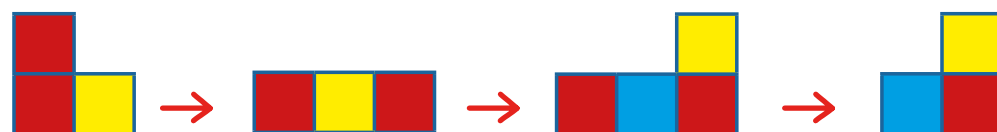
Ariana (portréty):



Elmar (plány):



Kira (pohled zepředu):

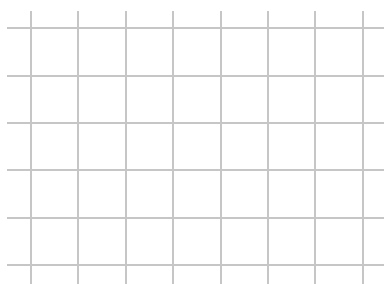
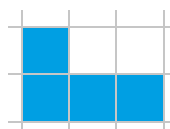


Úloha slouží k tomu, aby si žáci uvědomili, že pohledy jsou různé. Pro každého z dětí je pohled zepředu z jiné strany. K tomu dobře poslouží podobné úlohy – je postavena stavba a kolem ní se postaví žáci a kreslí pohled zepředu, případně z boku. Akorát při pohledu shora žáci pojmenují, že je pro všechny stejný. Proto jej využíváme v záznamu plánů.

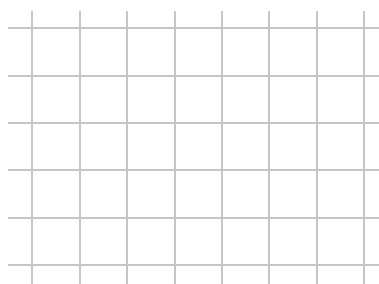
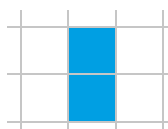
Úloha:

Postav stavbu z 5 krychlí. Znáš její pohled zepředu.
Nakresli její plán. Hledej více řešení.

a)



b)



Náročné výzvy jsou úlohy typu:

Úloha:

Postav krychlovou stavbu z 8 krychlí, která má ze všech pohledů stejný tvar (vidíme stejný geometrický útvar).

Později (především na 2. stupni) žáci pracují i s tzv. **krychlovým tělesem**. To je de facto krychlová stavba s tím rozdílem, že jeho krychle „mohou být ve vzduchu“, tzn. např. v prvním podlaží jednoho sloupce krychle není, ale ve druhém ano.

Pak lze zadat úlohu:

Úloha:

Postav krychlovou stavbu z 7 krychlí, která má ze všech pohledů stejný tvar (vidíme stejný geometrický útvar).

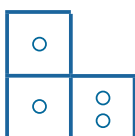
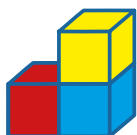
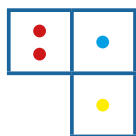
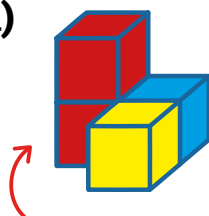
Překlápění staveb

I ve 3. ročníku se objevují úlohy s překlápěním staveb:

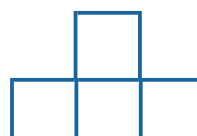
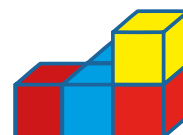
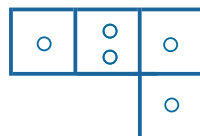
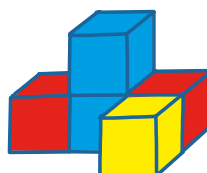
Úloha:

Překlop stavbu dozadu podle obrázku.

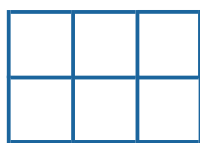
a)



b)

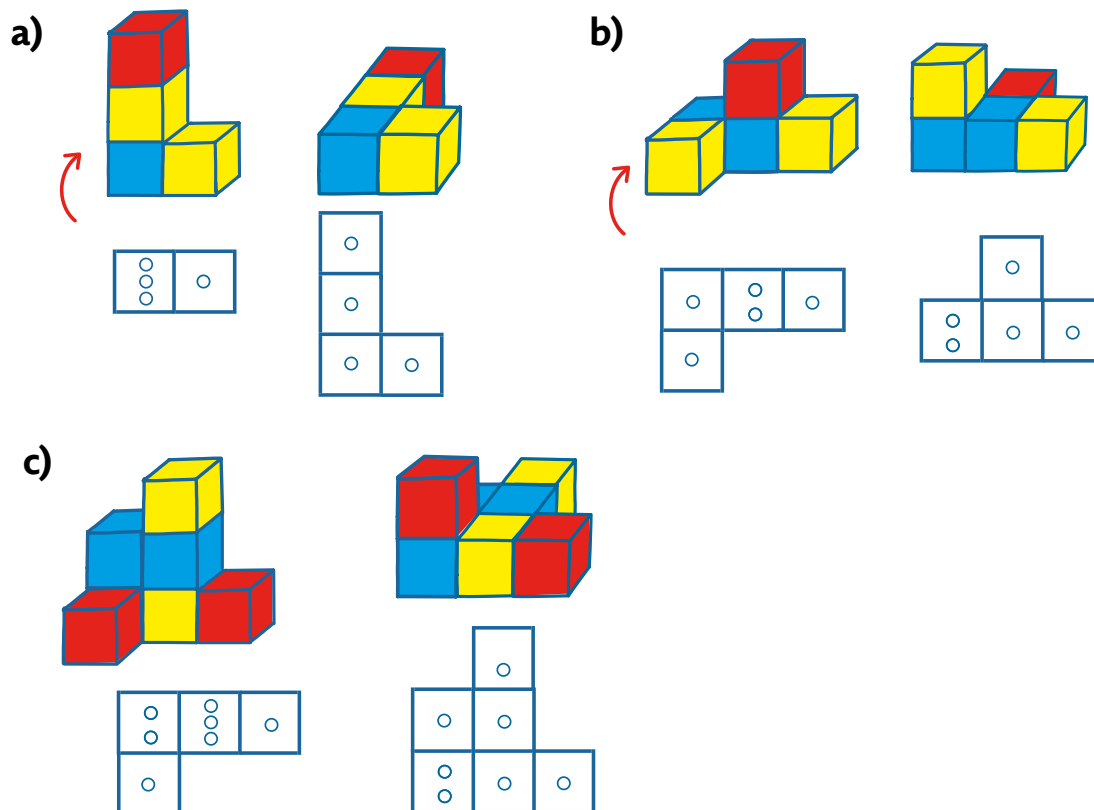


c)



Úloha:

Překlop stavbu dozadu podle obrázku.



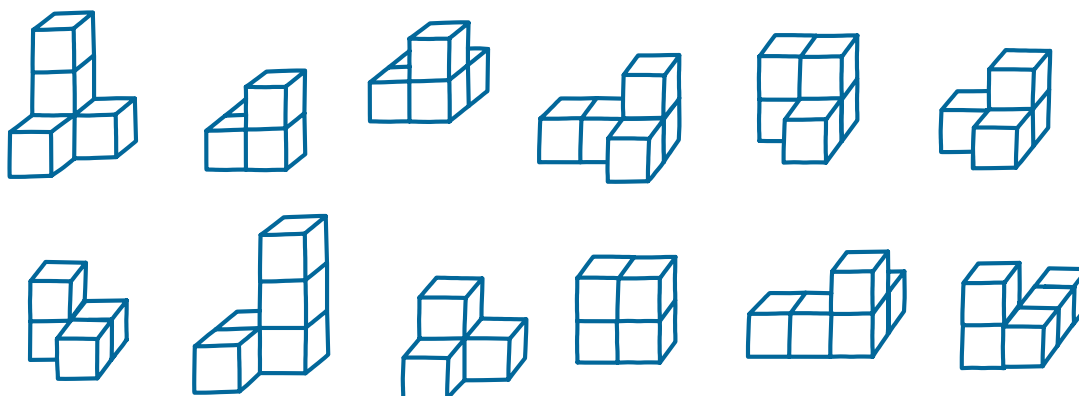
Úloha:

Postav stavbu podle plánu, překlápěj ji na různé strany a zapisuj plán.



Úloha:

Vybarvi stejnou barvou takové dvojice staveb, že když jednu překlopíš některým směrem, dostaneš druhou.



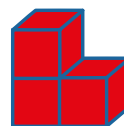
5. ročník

Povrch, objem

V 5. ročníku žáci počítají povrchy a objemy krychlových staveb. V počátku je vhodné pracovat s krychlemi s hranou 1 cm, aby získávali dobré představy.

Úloha:

U krychlové stavby pojmenuj všechny vrcholy.
Urči počet vrcholů, stěn a hran.

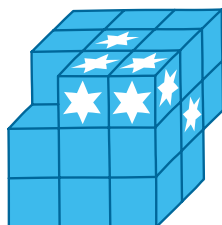
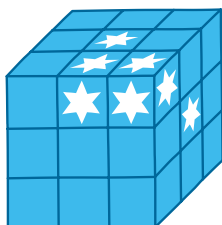


Později učitel může žáky vést i k objevení vzorců pro objem krychle a kváдру nebo jejich povrchů. Učitel samozřejmě nic neprozrazuje, pouze zadává „dobré úlohy“. Ideální cestou je jít přes izolované modely – např. u objemu krychle žáci určují počet jednotkových krychlí k vytvoření krychlí s hranou 1 cm, pak 2 cm (4 jednotkové krychle v každé vrstvě), 3 cm (9 jednotkových krychlí v jedné vrstvě) atd. Pokud žáci k tomu dostanou prostor, objeví požadovaný vztah sami. Řeknou např.: „Objem dostanu tak, že zjistím počet jednotkových krychlí ve spodní vrstvě (strana · strana) a pak číslo ještě vynásobím počtem vrstev (strana · strana · strana).“

V praxi se osvědčují různé aktivity k zjišťování povrchu těles. Jedna z takových je polepování stěn nějakými objekty – např. hvězdičkami. Žáci v počátku jednotlivé stěny polepují a počítají počet obrázků, které potřebovali. Postupně ale hledají rychlejší cesty – např.: „Podívám se na všechny stěny stavby a u každé počítám počet čtverečků.“ To ukazuje na dobré porozumění pojmu povrch.

Úloha:

Elmar si vytvořil krychli $3 \times 3 \times 3$. Chtěl si vyzdobit její povrch tak, že nalepí hvězdičky na stěny malých krychliček. Zjistil ale, že má pouze 50 nálepek. Kolik nálepek mu chybí?
Rozhodl se, že dvě krychličky odebere. Budou mu nálepky stačit?

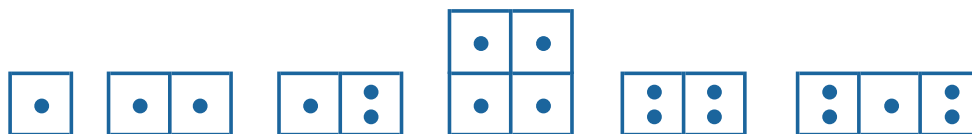


Úloha nabízí zajímavou myšlenku, že pokud odstraníme ze stavby dvě krychle – viz obrázek, objem se změní, ale povrch nikoli. Učitel se může ptát: „Platí to pro každé dvě krychle, které odebereme?“ Nebo: „Najdi ještě jednu dvojici takových krychlí, aby povrch zůstal stejný, ale objem se zmenšil.“

Ideální je ale začít s úlohami, které jsou jednodušší. Žáci staví jednoduché krychlové stavby a zjišťují, kolik nálepek je třeba k polepení všech jednotkových stěn. Jednu takovou sérii uvedeme pomocí plánů:

Úloha:

Urči povrch, počet vrcholů, počet hran a počet stěn u následujících těles.



Stavby lze samozřejmě zadávat i portréty nebo dalšími pohledy.

Pro propojení obou pojmů lze zadávat např. úlohy:

Úloha:

Najděte krychli, jejíž povrch i objem je stejné číslo.

Urči objem krychle, jejíž jedna stěna má obsah 16 cm^2 .

Úloha nabízí zajímavou myšlenku, že pokud odstraníme ze stavby dvě krychle – viz obrázek, objem se změní, ale povrch nikoli. Učitel se může ptát: „Platí to pro každé dvě krychle, které odebereme?“ Nebo: „Najdi ještě jednu dvojici takových krychlí, aby povrch zůstal stejný, ale objem se zmenšil.“

Ideální je ale začít s úlohami, které jsou jednodušší. Žáci staví jednoduché krychlové stavby a zjišťují, kolik nálepek je třeba k polepení všech jednotkových stěn. Jednu takovou sérii uvedeme pomocí plánů:

Úloha:

Stavba zadaná plánem  má objem 4 a povrch 18 (jednotky dle zvyklosti třídy). Najděte jinou krychlovou stavbu, která má:

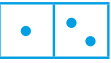
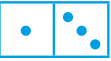
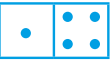
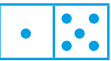
- stejný objem i stejný povrch,
- stejný objem, ale jiný povrch.

Povrch i objem základních těles (krychle, kvádr) je vhodné řešit v úlohách, kde žáci řeší jednotlivé izolované modely (jednotlivá tělesa s danými rozměry) a pozorují, jak délky hran souvisí s oběma pojmy. Ve třídní diskuzi pak zazní i tzv. obecný (generický) model: U povrchu krychle některý žák např. řekne: „Spočítám obsah jedné stěny a pak to vynásobím šesti, protože krychle má 6 stěn.“

V následující úloze přichází další pojem 3D geometrie – tzv. **kostra** (součet délek hran). Žáci možná řeknou, že vlastně počítají 3D obvod.

Úloha:

Doplň tabulku.

krychlová stavba	objem	povrch	součet délek hran
			
			
			
			

Uvažuj, že krychle má hranu délky 1 cm.

Urči u každé krychlové stavby počet vrcholů, stěn a hran.

Jedním z hlavních cílů těchto úloh je učit žáky evidovat vrcholy, hrany a stěny jednotlivých těles. Zde znovu na úrovni izolovaných modelů objevují vztah, který se na druhém stupni či na střední škole pojmenuje jako **Eulerova věta**: V konvexním mnohostěnu platí, že $v + s = h + 2$, kde v je počet vrcholů, s je počet stěn a h je počet hran.

To jsou dobré úlohy zejména pro motivované žáky. Evidují počty stěn, vrcholů a hran u známých těles, u krychlových staveb. Pokud je zapisují do tabulky, možná vztah objeví. Pokud ne, jsou to dobré zkušenosti, které zúročí v matematice na 2. stupni.

Úloha:

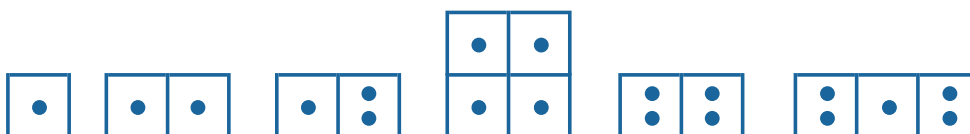
Stavba je zadána plánem .

Urči její povrch, počet vrcholů, počet hran a počet stěn.

Učitel může samozřejmě stavby měnit a pozorovat, které dělají žákům potíže. S žáky je nutno diskutovat, co se považuje za vrchol, hranu nebo stěnu. Pokud žáci postaví z jednotlivých krychlí např. výše uvedenou stavbu, někteří by mohli říct: „Spodní stěna má 8 hran.“ K tomu se dopočítají tak, že evidují hrany jednotlivých „jednotkových“ krychlí. Taková věc se musí ve třídě vyjasnit.

Úloha:

Urči povrch, počet vrcholů, počet hran a počet stěn u následujících těles.



Další náměty a úlohy

1. Tajná stavba

Úloha:

Tajná stavba. Postav stavbu z 9 krychlí, která má alespoň dvě podlaží. Nikdo ji nesmí vidět! Úkolem tvých spolužáků je postavit stejnou stavbu. Pomůžeš jim? Ty smíš pouze mluvit, ostatní pouze stavět. Dokážete to společně?

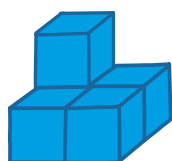
2. Vysílač a přijímač

Jeden žák je v roli vysílače a jeho úkolem je popsat svou stavbu pomocí slov. Ostatní žáci (přijímači) stavbu pochopitelně nevidí a podle popisu vysílače ji mají postavit. Je to velice dobrá hra na rozvoj komunikace i na frekventování geometrických myšlenek (počet kostek = objem, pohledy na stavbu, podlaží apod.).

3. Spojovačky

Úlohy se stavbami, plány a pohledy lze řešit s žáky jako spojovačky. Měli jsme např. kartičky s několika stavbami a žáci hledali po třídě trojice.

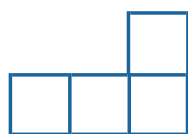
Úloha:



D

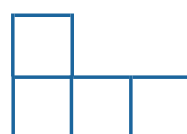


R

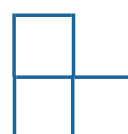


shora

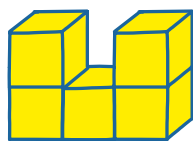
S



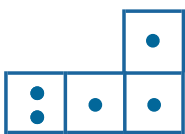
zepředu



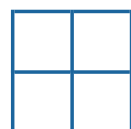
zprava



K

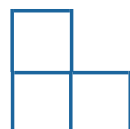


U

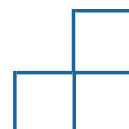


shora

D



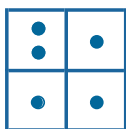
zepředu



zprava



H

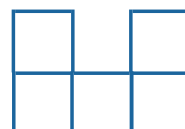


Ě



shora

M



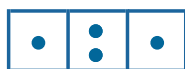
zepředu



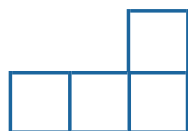
zprava



R

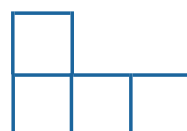


E

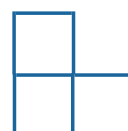


shora

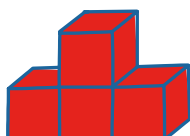
P



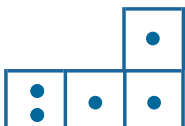
zepředu



zprava



L

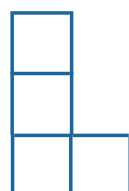


í

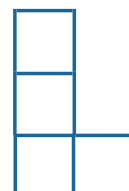


shora

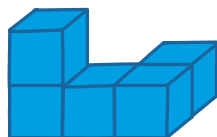
K



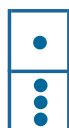
zepředu



zprava



Š

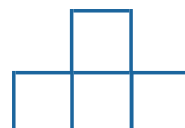


A



shora

S



zepředu



zprava

Seznam použité literatury

Některé úlohy jsou čerpány z učebnic autorského týmu profesora Hejného vydaných společností H-mat, o. p. s., některé byly úlohami z těchto učebnic inspirovány. Další úlohy vytvořil autorský kolektiv projektu.