

Koncepce řady pracovních učebnic matematiky pro 2. stupeň

prof. Hejný a kol.

PREAMBULE

Sada pracovních učebnic pro vzdělávací oblast **Matematika a její aplikace** pro druhý stupeň základního vzdělávání a odpovídající ročníky šestiletých a osmiletých gymnázií tvoří čtyři pracovní učebnice označené písmeny A, B, C, D.

Sada je určena pro konstruktivistický edukační styl, jehož hlavní charakteristiky jsou:

- výrazná intelektuální i osobnostní autonomie žáků;
- těžištěm výuky je individuální i skupinové řešení úloh a bohatá komunikace mezi žáky;
- vhodně volené série gradovaných úloh, které vedou žáky k objevování nových zákonitostí a procesů;
- formulování hypotéz a jejich prověřování patří ke klíčovým aktivitám žáků;
- role učitele spočívá především v tvorbě příznivého pracovního klimatu, v diferencovaném zadávání přiměřených úloh žákům;
- učitel učivo nevysvětluje, žákům předkládá úlohy a řídí třídní diskuse;
- hlavními indikátory kvality výuky jsou:
 - a) vztah žáků k intelektuální práci obecně a matematice zvláště,
 - b) schopnost žáků vzájemně spolupracovat.

Jedním z nejnáročnějších didaktických problémů vyučování matematice vůbec je diferenciací žáků. Materiály jsou připraveny tak, aby učitel mohl výuku lehce diferencovat. Tím se podporuje to, aby všichni žáci měli možnost zažít úspěch a rozvíjet svou sebedůvěru v matematice. Žáci, kteří opakovaně zažívají neúspěch, se omezují na činnosti reproduktivní a imitační a trpí v této oblasti komplexem méněcennosti. Zároveň pokud špičkoví žáci nejsou dostatečně podporováni, společnost přichází o nejcennější kapitál – o rozvoj talentované mládeže.

Konstruktivistický edukační styl řeší uvedený problém tím, že učí žáky volit si individuální rychlost postupu. V tomto směru je učebnice učiteli nápomocná nabídkou mnoha gradovaných sérií úloh. Například úloha 22 v sešitu A na straně 53, která modeluje zlomky pomocí tyčového modelu. Žák řeší úlohy podle svých schopností. Třeba úlohy a) – c) se opírají o obrázek, proto jsou pro žáky jednodušší. Naopak, v úlohách d) – f) žáci musí obrázek vymyslet sami, případně oporu obrázku

ani nepotřebují. Navíc úlohy gradují obtížností použitých zlomků. Např. úloha a) pracuje pouze s polovinami, proto je nejjednodušší.

Je zřejmé, že takový způsob výuky klade na učitele značné nároky, pokud jde o organizaci práce celé třídy. Zkušenosti ukazují, že žáci sami (a to již v prvním ročníku) si zde rychle vytvářejí efektivní vzorce sociálního chování. Žáci řeší úlohy odpovídající úrovně a navzájem si pomáhají v dalším jejich rozvoji. Tomu odpovídá koncepce pracovních učebnic.

Uvedený postup vede k tomu, že i žáci, kteří pracují na nejnižší úrovni obtížnosti úloh „drží krok“ s třídou, byť jejich vhlad do dané problematiky je menší. Mluvíme-li například o sčítání zlomků, tak tito žáci umí třeba sečíst $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ a ví, proč je to $\frac{3}{4}$; žáci, kteří pracují na vyšší úrovni obtížnosti úloh, se dopracují k objevu vztahu $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$ a ti pracující na nejvyšší úrovni jsou schopni tento vztah i dokázat.

Aby bylo možné diferenciaci žáků zachovat po celou dobu čtyř let, jsou pracovní učebnice stavěny tak, že díly A, B, C, D pokrývají předepsané výstupy RVP. Každý díl pracovních učebnic je doplněn o QR kódy, které vedou jak na opakovací/procvičovací úlohy, tak na úlohy expertní. To slouží žákům i učitelům k tomu, aby ve výuce mohli žáci řešit další úlohy patřící úrovně.

Učebnice je plně v souladu s aktuální strategií modernizace vzdělávání a reflektuje chystané revidované RVP, přičemž klade důraz na rozvoj klíčových kompetencí a aplikaci matematiky v reálných situacích.

Obsah i metodika učebnice jsou navrženy tak, aby podporovaly formativní přístup k hodnocení a vedly žáka k aktivnímu objevování matematických zákonitostí.

Materiál překračuje rámec pouhého předávání faktografických znalostí; zaměřuje se na budování funkční gramotnosti a schopnost řešit komplexní problémy.

Zaměření na klíčové kompetence

Materiál rozvíjí klíčové kompetence, což ilustrujeme příklady.

- Kompetence k řešení problémů

Úlohy jsou koncipovány tak, aby žáky motivovaly k hledání různých strategií řešení, kritickému posouzení výsledků a diskusi o efektivitě zvolených postupů.

- Kompetence komunikační

Žáci rozvíjejí schopnost formulovat vlastní myšlenky, porozumět matematickým úvahám spolužáků a tyto úvahy interpretovat, či volit vhodné otázky.

- Kompetence digitální

Učebnice integruje podněty pro práci s digitálními technologiemi a softwarem (např. dynamická geometrie, tabulkové procesory), čímž naplňuje požadavky na rozvoj nové informatiky a digitální gramotnosti napříč předměty.

Nové pojmy a vztahy

Pojmenování objevených vztahů a pojmů je důsledně dodržováno prostřednictvím odlišené grafiky (červení a modré rámečky) přímo v pracovní učebnici. Je to důležité proto, aby si žáci upevnili důležité pojmy a vztahy, se kterými pracovali.

Nikde v učebnici nejsou graficky výrazné vzorečky, neboť tyto se obrací k dlouhodobé paměti žáka, do které se ukládají jako izolované fakty. Jako takové se pak stávají překážkou pro vznik porozumění. Učebnice vede žáka k tomu, aby důležité vztahy objevil samostatně, nebo s pomocí spolužáků a aby se tento poznatek dostával do žákovy vědomí jako zážitek a byl zde propojen na další poznatky, které se objevily v procesu řešení příslušné úlohy.

Sebereflexe žáků

Na konci většiny kapitol je zařazena sebereflexe žáků, která je náležitě metodicky popsána. Cílem sebereflexe žáků je to, aby si žáci v daném tématu pojmenovali své silné či slabé stránky, pojmenovali nové pojmy či vztahy. Neboli žák si pojmenovává, na čem ještě v daném tématu musí pracovat, co už si osvojil nebo s čím potřebuje ještě pomoci. Někdy sebereflexe umožňuje žákům rekapitulaci a shrnutí toho, co bylo objeveno. Např. žák je formou otázky: "Co to znamená rozšiřování zlomků?" vyzván k tomu, aby pojmenoval a upevnil si svá předchozí bádání.

Poznávací proces žáka

Východiskem vzniku každého poznání jsou životní a následně i školské zkušenosti žáka a poznávací proces pak probíhá v řetězci zkušenosti → jejich evidence → jejich organizace → odhalení vztahu.

Toto je základní způsob, kterým učebnice budují dílčí žakovy znalosti. Dílčí znalosti se pak zasíťují do celků – širších mentálních schémat.

Na rozdíl od dospělého člověka, který potřebuje svoje znalosti strukturovat a dokáže se jistým problémem zabývat dlouhou dobu, má žák schopnost vstřebat a propojit mnoho různorodých podnětů a potřebu svoji činnost často měnit. Proto v učebnicích je časté střídání tematických celků. Stejný typ úloh se opakovaně vrací, ale pokaždé jsou obohaceny o některé další prvky, další myšlenky. Žák tak má dostatek času zažít a hlouběji pochopit danou myšlenku. Týká se to zejména nosných myšlenek, jako je budování představy čísla, budování představy funkční závislosti, budování geometrických představ, budování schopnosti efektivní práce s daty.

Kalkulativní procedury

V době kalkulačů ztrácí schopnost hbitého a spolehlivého počítání na důležitosti. Jistou počítačskou rutinu však žák potřebuje.

Získává ji pomocí:

- tzv. cílených úloh, tj. úloh, u nichž dosažení cíle vyžaduje mnohé výpočty,
- více procvičovací (procedurálních) úloh,
- prvků s využitím ICT technologií (napojení na program Eduten, řízený AI)

Důležité je, aby žák uměl účinně pracovat s kalkulačem a aby rozuměl kalkulačním procedurám, které používá. K tomu jej vedou např. algebrogramy. Žáci nejprve konstruktivistickým přístupem objevují svět matematiky, po nějaké době získané poznatky procvičují např. pomocí Edutenu. Tím dochází k propojení témat a k postupnému vytváření mentálních schémat.

NESTANDARDNÍ ÚLOHY

Učebnice využívá didaktická prostředí, např.: Autobus, Krokování, Součtové trojúhelníky, Násobkové čtverce, Algebrogramy, Sousedé, Šipkové grafy, Mince, Čtvercová mříž, Origami, Krychlová tělesa.

Převážná většina úloh vycházejících z těchto prostředí je nestandardní. Mnohé z nich jsou propojeny na životní zkušenost žáka a mají tedy silně aplikační charakter. V těchto úlohách je dále přítomno množství důležitých jevů jazykových i logických. Edukační síla těchto úloh bytostně závisí na způsobu, jakým je výuka vedena. Tyto úlohy jsou účinné v případě, že žáci mají dostatečný čas k jejich řešení a k vzájemným diskuzím.

Mezipředmětové vztahy

V pracovních učebnicích se objevují i výzvy (úlohy), které propojují různé předměty. Např. v pracovní učebnici A (str. 80) se objevuje nové prostředí Ježibaba Armida. Série úloh a pokusů porovnává náš reálný svět se světem "kouzel". To žáky vede k pozorování jevů a k jejich vyhodnocování.

PRACOVNÍ UČEBNICE A

ARITMETIKA A ALGEBRA

Pojmy.

- přirozené číslo, celé číslo, nula, číslice (0, 1, ...,9)
- základní aritmetické operace (součet, rozdíl, součin, podíl), výpočet, výsledek, dílčí výsledek, závorka, rovnost, různost, nerovnost
- nejmenší a největší prvek
- idiomy: o n větší/menší, n -krát větší/menší
- n -ciferné číslo (zejména pro $n \leq 3$),
- rozklad přirozeného čísla na součet/součin
- propedeutika ciferný součet čísla, propedeutika pojmu rozvinutý zápis čísla v desítkové soustavě
- sudé a liché číslo, násobek, dělitel, nejmenší společný násobek,
- propedeutika dělitelnosti číslem 2, 3, 4, 10
- desetinná čísla (zejména desetiny a setiny), desetinná čárka
- kmenový zlomek, zlomky (zejména se jmenovatelem menším než 13 a jmenovateli 60, 100), čítec, jmenovatel, zlomek v základním tvaru, smíšené číslo
- porovnávání, uspořádání vzestupné/sestupné
- číselná osa (v rozsahu výše zmíněných čísel), číslo opačné
- idiom typu „ $2/3$ z A “
- porozumění předložkám kilo, deci, centi, mili
- měřítko (propedeutika)
- lineární rovnice
- absolutní hodnota (propedeutika)

Vztahy.

- nula je neutrální prvek vzhledem ke sčítání $0 + n = n$, nula je nulový prvek vzhledem k násobení $0 \cdot n = 0$
- komutativita a asociativita sčítání i násobení
- propedeutika distributivního zákona
- tranzitivita uspořádání
- rovnost $\frac{a}{b} = a : b$ (propedeutika)
- rovnosti typu $3,20 = 3,2$

Činnosti.

- písemné, mentální i kalkulaátorem realizované základní operace
- účelné využití kalkulaátora (např. dělení, dělení se zbytkem)

- uspořádání množiny čísel (v rozsahu výše zmíněných čísel)
- odhady (sémantické i strukturální týkající se jedné operace)
- krácení/rozšiřování zlomků (v rozsahu výše zmíněných čísel)
- sčítání a odčítání celých čísel
- sčítání a odčítání desetinných čísel (v rozsahu výše zmíněných čísel)
- převody jednotek (délka, obsah, hmotnost, čas)
- různé metody řešení (slovních) úloh: metoda pokusů, dramatizace, tabulace, vizualizace, modelování
- zaokrouhlování přirozených a desetinných čísel
- práce s parketami - dělitelnost

GEOMETRIE

Pojmy.

- úsečka, přímka, polopřímka
- trojúhelník (ostroúhlý, pravoúhlý, tupoúhlý, rovnoramenný, rovnostranný)
- čtyřúhelník (čtverec, obdélník, kosočtverec, lichoběžník)
- kruh, kružnice, poloměr (propedeutika)
- úhel (konceptuálně i procesuálně), dvojice úhlů, velikost úhlu
- délka, obvod, obsah
- krychle, kvádr a jejich sítě
- povrch krychle a kvádru
- objem krychle a kvádru (propedeutika)
- krychlová tělesa

Vztahy.

- rovnoběžnost a kolmost přímek
- součet úhlů v trojúhelníku
- vztahy o dvojicích úhlů

Činnosti.

- konstrukce ve čtvercové mříži a na čistém papíře
- měření délek, zjišťování obsahu útvarů ve čtvercové mříži
- rámování ve čtvercové mříži propedeutika
- měření velikostí úhlu, zjišťování velikostí úhlů
- zobrazení prostoru v rovině
- pokrývání roviny - propedeutika obsahu

ZÁVISLOSTI A PRÁCE S DATY

Pojmy.

- soubor dat
- kombinatorika, kombinatorické pravidlo součinu

Vztahy.

- lineární závislost a její tabulace
- procesuální a konceptuální vztahy

Činnosti.

- zobecňování - např. úlohy se dřívky
- evidence a uspořádání dat
- organizace dat tabulkou nebo jiným systémem

PRACOVNÍ UČEBNICE B

ARITMETIKA A ALGEBRA

Pojmy.

- propedeutika ciferný součet čísla, propedeutika pojmu rozvinutý zápis čísla v desítkové soustavě
- rozklad přirozeného čísla na součet/součin
- prvočíslo, složené číslo, největší společný dělitel, Eratosthenovo síto
- kritéria dělitelnosti 3, 9
- procento, počet procent, základ
- soustav dvou lineárních rovnic (propedeutika)
- celá čísla
- zlomky, záporný zlomek
- desetinná čísla
- poměry, měřítko
- NSD

Vztahy.

- rovnost $\frac{a}{b} = a:b$
- vysvětlení paradoxu zápisu $7:3 = 2 \text{ (zb. 1)} = 9:4$
- distributivní zákon

Činnosti.

- sčítání a odčítání zlomků
- násobení a dělení zlomků
- násobení a dělení celých čísel
- násobení a dělení desetinných čísel
- porovnávání jednoduchých zlomků a desetinných čísel (v rozsahu výše zmíněných čísel)
- řešení úloh o slevách a zdražení v procentech
- využití prvočíselného rozkladu (pro nalezení nsn a NSD dvou čísel)

GEOMETRIE

Pojmy.

- trojúhelník: střední příčka, těžnice, výška, osa strany (jako množina bodů dané vlastnosti)

- čtyřúhelník (čtverec, obdélník, kosočtverec, lichoběžník, lichoběžník)
- osová souměrnost, středová souměrnost
- Cavalieriho princip v rovině
- obsah trojúhelníku
- obsah rovnoběžníku

Vztahy.

- Thaletova věta (propedeutika)
- Pythagorova věta propedeutika

Činnosti.

- geometrická chirurgie
- rámování ve čtvercové mříži
- zjišťování obsahu útvarů ve čtvercové mříži
- zjišťování obsahu rovinných útvarů (trojúhelníky, čtyřúhelníky)

ZÁVISLOSTI A PRÁCE S DATY

Pojmy.

- Vennovy diagramy
- aritmetický průměr
- periodická posloupnost (propedeutika)
- relativní a absolutní četnost

Činnosti.

- Vennův diagram jako nástroj organizace prvků množiny
- porozumění matematizaci procesuálnímu souboru dat (např. evidence jízdy autobusu tabulkou)
- porozumění matematizaci konceptuálnímu souboru dat (např. práce se vztahy v rodokmenu)

PRACOVNÍ UČEBNICE C

ARITMETIKA A ALGEBRA

Pojmy

- římské číslice?
- n -ciferné číslo, rozvinutý zápis čísla v desítkové soustavě
- prvočíselný rozklad
- kritéria dělitelnosti 4, 6, 8, propedeutika dělitelnosti 11, 12, 15
- desetinná čísla (tisíciny až miliontiny), periodické číslo, perioda, předperioda
- zlomky (s dvoucifernými a trojcifernými jmenovateli), složený zlomek, převrácené číslo
- promile, úrok, úroková sazba, procentová část
- číselná osa (v rozsahu výše zmíněných čísel),
- iracionální číslo (intuitivně)
- zaokrouhlování iracionálních čísel
- n -tá mocnina
- druhá odmocnina
- přímá a nepřímá úměrnost
- poměr, měřítko mapy
- číselný výraz
- písmeno jako: obecné číslo, proměnná, neznámá
- algebraický výraz, dvojčlen, trojčlen
- ekvivalentní úprava algebraického výrazu
- soustava dvou lineárních rovnic
- rovnice se zlomky
- lineární diofantické rovnice (propedeutika)
- absolutní hodnota

Vztahy.

- distributivní zákon
- $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$
- $n^{a+b} = n^a \cdot n^b$
- vztahy týkající se čtverce $S = a^2$, $a = \sqrt{S}$,
- objem krychle $V = a^3$
- trojčlenka
- $a|b$ & $a|c \Rightarrow a|(b \pm c)$
- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Činnosti.

- účelné využití kalkulátoru (např. při práci s racionálními čísly)
- zápis čísla římskými číslicemi (důraz na logiku římských zápisů)?

- uspořádání množiny čísel (v rozsahu výše zmíněných čísel)
- odhady (sémantické i strukturální týkající se výrazů s více operacemi)
- zaokrouhlování
- porovnávání zlomků a desetinných čísel (v rozsahu výše zmíněných čísel)
- dělení desetinného čísla desetinným číslem typu 7,1
- převody jednotek (obsah, objem, rychlost)
- řešení úloh o opakovaných slevách a zdraženích v procentech
- využití trojčlenky
- dělení celku v daném poměru
- využití jazyka algebry k řešení úloh
- cílené úpravy jednodušších algebraických výrazů (vytýkání, roznásobování)
- různé metody řešení (slovních) úloh: pokus-omyl, tabulace, vizualizace, využitím dělitelnosti, modelování, jazykem algebry

GEOMETRIE

Pojmy.

- trojúhelník: osa úhlu (jako množina bodů dané vlastnosti), těžiště (propedeutika), kružnice opsaná a vepsaná
- čtyřúhelník (rovnoběžník, deltoid, nekonvexní)
- pravidelný mnohoúhelník (6, 8, 12), nekonvexní mnohoúhelník
- shodnost a podobnost
- posunutí
- vektor (propedeutika)
- kruh, kružnice, poloměr, průměr, výseč
- Thaletova kružnice (jako množina bodů dané vlastnosti)
- Cavalieriho princip v prostoru
- povrch, objem
- Pythagorova věta
- hranol (pravidelné i nepravidelné)
- řezy těles

Vztahy.

- trojúhelníková nerovnost
- součet úhlů v mnohoúhelníku (3, 4, 5, 6, n)
- věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků
- Thaletova věta
- Pythagorova věta
- vlastnosti úhlopříček čtyřúhelníků
- obvod kružnice, obsah kruhu
- invarianty transformací

Činnosti.

- experimentální hledání Ludolfova čísla
- geometrická chirurgie
- konstrukce ve čtvercové mříži a na čistém papíře
- odhadování a zjišťování obsahu, objemu, povrchu
- převody jednotek objemu

ZÁVISLOSTI A PRÁCE S DATY

Pojmy.

- množina, podmnožina, sjednocení, průnik
- pravděpodobnost
- lineární funkce, její graf
- kvadratická funkce (propedeutika)
- vážený průměr
- kruhový a sloupcový diagram
- galerie, organizační princip galerie

Vztahy.

- kombinatorické vztahy (propedeutika)

Činnosti.

- vyjádření lineární závislosti grafem a rovnicí
- organizace souboru dat (jednoparametrické třídění, hledání organizačního principu)
- organizace souboru dat s cílem zjištění počtu jeho prvků
- analýza statistického souboru
- řešení základních kombinatorických a pravděpodobnostních úloh
- vyhledávání dat
- porovnávání souborů dat
- grafické znázorňování souboru dat
- čtení z grafů a diagramů

PRACOVNÍ UČEBNICE D

ARITMETIKA A ALGEBRA

Pojmy.

- třetí odmocnina
- mnohočlen
- lineární nerovnice
- kvadratická funkce
- kvadratická rovnice - propedeutika
- písmeno jako: obecné číslo, proměnná, neznámá
- algebraický výraz, dvojčlen, trojčlen
- rovnice a nerovnice se zlomky
- procenta se změnou základu
- finanční gramotnost

Vztahy.

- stav konta po n letech při $p\%$ úročení a základním vkladu C je $C \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$
- $n^{a-b} = \frac{n^a}{n^b}$
- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- délka hrany krychle $a = \sqrt[3]{V}$
- tranzitivita dělitelnosti

Činnosti.

- účelné využití kalkulaátoru
- uspořádání množiny čísel (v rozsahu výše zmíněných čísel)
- odhady (řádové odhady jako propedeutika limity)
- sčítání, odčítání, násobení a dělení zlomků a desetinných čísel
- aproximace $\sqrt{2}$
- využití prvočíselného rozkladu (pro nalezení nsn a NSD více čísel)
- Euklidův algoritmus
- cílené úpravy algebraických výrazů
- úprava kvadratického trojčlenu na čtverec
- různé metody řešení (slovních) úloh: pokus-omyl, tabulace, vizualizace, využitím dělitelnosti, modelování, jazykem algebry, metodou izomorfismu

GEOMETRIE

Pojmy.

- trojúhelník: těžiště, ortocentrum
- čtyřúhelník (tětivový, tečnový)
- pravidelný mnohoúhelník (5, 10)
- Pythagorova věta
- tětiva kružnice, mezikruží
- otočení, stejnolehlost, podobnost
- jehlan, válec, kužel, koule
- řezy těles

Vztahy.

- Pythagorova věta (důkaz)
- věta o obvodovém a středovém úhlu (propedeutika)
- charakterizace tečnového čtyřúhelníku
- vztah mezi obsahem a obvodem kruhu
- invarianty transformací

Činnosti.

- geometrická chirurgie (i Cavalieriho princip)
- odhadování a zjišťování povrchu a objemu válce a kužele
- tvorba sítě rotačního válce a rotačního kužele

ZÁVISLOSTI A PRÁCE S DATY

Pojmy.

- posloupnosti aritmetická a geometrická
- vážený aritmetický průměr, četnost znaku
- kvadratická funkce, její graf
- statistický soubor

Vztahy.

- kombinatorické vztahy (propedeutika)

Činnosti.

- posunutí grafu lineární a kvadratické funkce
- organizace souboru dat (víceparametrická třídění)
- tvorba statistického souboru, jeho evidence a jednoduchá analýza
- řešení jednoduchých kombinatorických a pravděpodobnostních úloh
- vyhledávání dat

- porovnávání souboru dat
- grafické znázorňování souboru dat
- čtení z grafů a diagramů