MATE MATIKA

příručka učitele

MATEMATIKA

příručka učitele pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia

Autoři: prof. RNDr. Milan Hejný, CSc.
Mgr. et Mgr. Pavel Šalom
doc. RNDr. Darina Jirotková, Ph.D.
Mgr. Jana Hanušová, Ph.D.
Mgr. Anna Sukniak

Ilustrace: MgA. Lukáš Urbánek

Svými praktickými zkušenostmi z ověřování učebnic do příručky přispěli:
Mgr. Anna Antonová, Mgr. Lenka Beranová, Ph.D., PhDr. Hana Bretfeldová, Ph.D., Mgr. Petra Dvořáková, Mgr. Kateřina Eichlerová, Mgr. Martina Hálová, Mgr. Hynek Humlíček, Mgr. Milan Chalupník, Mgr. Hana Kubová, Mgr. Hana Kotíková, Mgr. Jitka Linhartová, Mgr. Jitka Němcová, RNDr. Eva Nováková, Emília Raszyková, Mgr. Jaroslav Semorád, Mgr. Eva Slezáková, Mgr. Václav Strnad, Mgr. Lenka Vopálková, Mgr. Daniel Vybíral, Mgr. Jan Zapletal, Mgr. Milena Zapletalová

Odpovědný redaktor: Mgr. et Mgr. Pavel Šalom
Technický redaktor: Mgr. Jan Šedo
Návrhy obálky: MgA. Silvie Klempererová s použitím ilustrace Lukáše Urbánka
Grafická úprava: Olga Matulová
Sazba: Olga Matulová
Jazyková korektura: Mgr. Jaroslava Frňková, Ph.D., Mgr. Kateřina Kovaljová

Doložka MŠMT: Informace o zařazení učebnice do seznamu učebnic pro základní školy jako součást ucelené řady pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace jsou uvedeny na www.msmt.cz v sekci Schvalovací doložky učebnic a souběžně na www.h-mat.cz/dolozky.

Vydala: H-mat, o. p. s., Magdalény Rettigové 47/4, 110 00 Praha 1, www.h-mat.cz
Tiskárna: POLYGOS print, s. r. o., Praha
Printed in the Czech Republic

1. vydání
ISBN 978-80-905756-2-2

OBSAH

Koncepce řady učebnic matematiky pro 2. stupeň

Preambule

Sada učebnic pro vzdělávací oblast Matematika a její aplikacepro druhý stupeň základního vzdělávání a odpovídající ročníky šestiletých a osmiletých gymnázií tvoří sedm sešitů označených písmeny A, B, C, D, E, F a G. Sada je určena pro konstruktivistický edukační styl, jehož hlavní charakteristiky jsou:

- výrazná intelektuální i osobnostní autonomie žáků;
- těžištěm výuky je individuální i skupinové řešení úloh a bohatá komunikace mezi žáky;
- vhodně volené série gradovaných úloh vedou žáky k objevování nových zákonitostí a procesů; formulování hypotéz a jejich prověřování patří ke klíčovým aktivitám žáků;
- role učitele spočívá především v tvorbě příznivého pracovního klimatu, diferencovaném zadávání přiměřených úloh žákům a řízení třídní diskuze;
- učitel učivo nevysvětluje, svoji akustickou přítomnost na hodině omezuje na minimum;
- hlavními indikátory kvality výuky jsou:
  - vztah žáků k intelektuální práci obecně, a matematice zvláště,
  - schopnost žáků vzájemně spolupracovat.

Jedním z nejnáročnějších didaktických problémů vyučování matematice vůbec je diferenciace žáků. Tradiční frontální přístup vede k tomu, že slabší žáci ztrácí víru v to, že by matematice mohli porozumět, omezují se na činnosti reproduktivní a imitační a trpí v této oblasti komplexem méněcennosti. Z národohospodářského hlediska je ještě horší to, že špičkoví žáci nejsou dostatečně podporováni, a tak společnost přichází o nejcennější kapitál, který má – o rozvoj talentované mládeže.

Konstruktivistický edukační styl řeší uvedený problém tím, že učí žáky volit si individuální rychlost postupu. V tomto směru je učebnice učiteli nápomocná nabídkou mnoha gradovaných sérií úloh. Například úloha 2 v sešitu A na straně 44, která modeluje zlomky pomocí hodin, má 15 případů. Z nich si každý žák vybírá případy podle svých schopností. Třeba případy a) – d) vyřeší nejslabší žáci, případy n) a o) ti nejzdatnější. Je zřejmé, že takový způsob výuky klade na učitele značné nároky, pokud jde o orchestraci práce celé třídy. Zkušenosti ukazují, že žáci sami (a to již v prvním ročníku) si zde rychle vytváří efektivní vzorce sociálního chování.
Uvedený postup vede k tomu, že i slabší žáci „drží krok" s třídou, byť jejich vhled do dané problematiky je menší. Mluvíme-li například o sčítání zlomků, tak ti nejslabší umí třeba sečíst $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ a ví, proč je to $\frac{3}{4}$, zdatnější se dopracují k objevu vztahu $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$, a ti nejlepší jsou schopni tento vztah dokázat.

Aby bylo možné diferenciaci žáků zachovat po celou dobu čtyř let, jsou učebnice stavěny tak, že díly A, B, C, D, E a F pokrývají celé učivo předepsané RVP a díl G je v tomto smyslu nástavbou. Tento díl nabízí dostatečně náročné podněty i těm nejschopnějším žákům.

Nikde v učebnici nejsou graficky výrazné vzorečky nebo poučky, neboť tyto se obrací k dlouhodobé paměti žáka, do které se ukládají jako izolovaná fakta. Jako takové se pak stávají překážkou pro vznik porozumění. Učebnice vede žáka k tomu, aby důležité vztahy objevil samostatně, nebo s pomocí spolužáků, a aby se tento poznatek dostával do žákova vědomí jako zážitek a byl zde propojen na další poznatky, které se objevily v procesu řešení příslušné úlohy.
Východiskem vzniku každého poznání jsou životní a následně i školské zkušenosti žáka, a poznávací proces pak probíhá v řetězci zkušenosti → jejich evidence → jejich organizace → odhalení vztahu.
Toto je základní způsob, kterým učebnice budují dílčí žákovy znalosti. Dílčí znalosti se pak zasíťují do celků – širších mentálních schémat.

Na rozdíl od dospělého člověka, který potřebuje svoje znalosti strukturovat a dokáže se jistým problémem zabývat dlouhou dobu, má žák schopnost vstřebat a propojit mnoho různorodých podnětů a potřebu svoji činnost často měnit. Proto je v učebnicích, zejména v dílech A, B, C a D, časté střídání tematických celků. Stejný typ úloh se opakovaně vrací, ale pokaždé jsou obohaceny o některé další prvky, další myšlenky. Žák tak má dostatek času zažít a hlouběji pochopit danou myšlenku. Týká se to zejména nosných myšlenek, jako je budování představy čísla, budování představy funkční závislosti, budování geometrických představ, budování schopnosti efektivní práce s daty.

V době kalkulátorů ztrácí schopnost hbitého a spolehlivého počítání na důležitosti. Jistou počtářskou rutinu však žák potřebuje. Získává ji pomocí tzv. cílených úloh, tj. úloh, u nichž dosažení cíle vyžaduje mnohé výpočty. Důležité je, aby žák uměl účinně pracovat s kalkulátorem a aby rozuměl kalkulativním procedurám, které používá. K tomu jej vedou zejména algebrogramy.

Nestandardní úlohy

Učebnice masově využívá nestandardní didaktická prostředí, zejména: Autobus, Krokování, Součtové trojúhelníky, Součinové čtverce, Algebrogramy, Sousedé, Šipkové grafy, Mince, Čtvercová mříž, Origami, Krychlová tělesa.

Převážná většina úloh vycházejících z těchto prostředí je nestandardní. Mnohé z nich jsou propojeny na životní zkušenost žáka, a mají tedy silně aplikační charakter. V těchto úlohách je dále přítomno množství důležitých jevů jazykových i logických. Edukační síla těchto úloh bytostně závisí nazpůsobu, jakým je výuka vedena. Účinné jsoutyto úlohy v případě, že mají žáci dostatečný čas k jejich řešení a k vzájemným diskuzím.

Díly A + B

Aritmetika a algebra

Pojmy.

- přirozené číslo, **celé číslo**, nula, číslice (0, 1, …,9)
- základní aritmetické operace (součet, rozdíl, součin, dělení se zbytkem jednomístným číslem), výpočet, výsledek, dílčí výsledek, závorka, rovnost, různost, nerovnost
- nejmenší a největší prvek
- idiomy: o *n* větší/menší, *n*-krát větší/menší
- *n*-ciferné číslo (zejména pro $n \leq 3$), ciferný součet čísla, propedeutika pojmu **rozvinutý zápis čísla v desítkové soustavě**
- rozklad přirozeného čísla na součet/součin
- sudé a liché číslo, **prvočíslo**, **složené číslo**, **násobek**, **dělitel**, **nejmenší společný násobek**, největší společný dělitel, Eratosthenovo síto
- kritéria dělitelnosti 2, 5, 10, propedeutika dělitelnosti číslem 3 a 4
- **desetinná čísla** (zejména desetiny a setiny), desetinná čárka
- kmenový zlomek, zlomky (zejména se jmenovatelem menším než 13 a jmenovateli 60, 100), čitatel, jmenovatel, zlomek v základním tvaru
- procento, **počet procent**, **základ**
- porovnávání, uspořádání vzestupné/sestupné
- **číselná osa** (v rozsahu výše zmíněných čísel)
- idiom typu „$\frac{2}{3}$ *z A*“
- porozumění předložkám kilo, deci, centi, mili
- měřítko (propedeutika)
- **lineární rovnice**, **soustava dvou lineárních rovnic** (propedeutika)
- absolutní hodnota (propedeutika)

Vztahy.

- nula je neutrální prvek vzhledem ke sčítání, $0 \cdot n = 0$
- komutativita a asociativita sčítání i násobení
- propedeutika distributivního zákona
- tranzitivita uspořádání
- rovnost $\frac{a}{b} = a : b$
- rovnosti typu 3,20 = 3,2
- vysvětlení paradoxu zápisu 7 : 3 = 2 (zb. 1) = 9 : 4

Činnosti.

- písemné, mentální i kalkulátorem realizované základní operace
- účelné využití kalkulátoru (např. dělení, dělení se zbytkem)
- uspořádání množiny čísel (v rozsahu výše zmíněných čísel)
- odhady (sémantické i strukturální týkající se jedné operace)
- krácení/rozšiřování zlomků (v rozsahu výše zmíněných čísel)

- porovnávání jednoduchých zlomků a desetinných čísel (v rozsahu výše zmíněných čísel)
- sčítání kmenových zlomků
- sčítání a odčítání desetinných čísel (v rozsahu výše zmíněných čísel)
- převody jednotek (délka, hmotnost, čas)
- řešení úloh o slevách a zdraženích v procentech
- různé metody řešení (slovních) úloh: pokus – omyl, dramatizace, tabulace, vizualizace, modelování

Geometrie

Pojmy.

- **úsečka**, **přímka**, **polopřímka**
- **trojúhelník** (ostroúhlý, pravoúhlý, tupoúhlý, rovnoramenný, rovnostranný)
- trojúhelník: střední příčka, těžnice, **výška**, **osa strany (jako množina bodů dané vlastnosti)**
- **čtyřúhelník** (čtverec, obdélník, kosočtverec, **lichoběžník**)
- kruh, kružnice, poloměr (propedeutika)
- **úhel** (konceptuálně i procesuálně), **dvojice úhlů**, **velikost úhlu**
- **osová souměrnost** (speciální případy), **středová souměrnost**
- délka, obvod, obsah
- **krychle**, **kvádr**, síť krychle a jiných těles
- krychlová tělesa

Vztahy.

- rovnoběžnost a kolmost přímek
- **Thaletova věta** (propedeutika)
- součet úhlů v trojúhelníku (propedeutika)
- vztahy pro dvojiceúhlů

Činnosti.

- konstrukce ve čtvercové mříži a na čistém papíře
- měření délek, zjišťování obsahu
- měření velikostí úhlů, zjišťování velikostí úhlů
- zobrazení prostoru v rovině

Závislosti a práce s daty

Pojmy.

- Vennovy diagramy
- soubor dat
- periodická posloupnost (propedeutika)

Vztahy.

- lineární závislost a její tabulace
- procesuální a konceptuální vztahy

Činnosti.

- Vennův diagram jako nástroj organizace prvků množiny
- porozumění matematizaci procesuálníhosouboru dat (např. evidence jízdy autobusu tabulkou)
- porozumění matematizaci konceptuálníhosouboru dat (např. práce se vztahy v rodokmenu)

Díly C + D

Aritmetika a algebra

Pojmy.

- římské číslice
- *n*-ciferné číslo, r**ozvinutý zápis čísla v desítkové soustavě** (do řádu 10^4)
- prvočíselný rozklad
- **kritéria dělitelnosti 3**, **4**, **9**, propedeutika dělitelnosti 6, 8, 11, 12
- **desetinná čísla** (tisíciny až miliontiny), periodické číslo, perioda, předperioda
- zlomky (s dvoucifernými a trojcifernými jmenovateli), **složený zlomek**, **smíšené číslo**, **převrácené číslo**, záporný zlomek
- **promile**, **úrok**, **procentová část**
- **číselná osa** (v rozsahu výše zmíněných čísel), **číslo opačné**
- iracionální číslo (intuitivně)
- zaokrouhlování
- ***n*-tá mocnina**
- **druhá odmocnina**
- **přímá a nepřímá úměrnost**
- **poměr**, **měřítko mapy**
- **číselný výraz**

- písmeno jako: obecné číslo, proměnná, neznámá
- algebraický výraz, dvojčlen, trojčlen
- ekvivalentní úprava výrazu
- soustava dvou lineárních rovnic
- lineární diofantickérovnice (propedeutika)
- absolutní hodnota

Vztahy.

- distributivní zákon
- $\frac{-a}{b} = \frac{-b}{a} = -\frac{a}{b}$
- $n^{(a+b)} = n^a \cdot n^b$
- vztahy týkající se čtverce $S = a^2$, $a = \sqrt{S}$,
- objem krychle $V = a^3$
- **trojčlenka**
- $a|b \;\&\; a|c \Rightarrow a|(b \pm c)$
- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$

Činnosti.

- účelné využití kalkulátoru (např. při práci s racionálními čísly)
- zápis čísla římskými číslicemi (důraz na logiku římských zápisů)
- uspořádání množiny čísel (v rozsahu výše zmíněných čísel)
- odhady (sémantické i strukturální týkající se výrazů s více operacemi)
- zaokrouhlování
- krácení/rozšiřování zlomků (v rozsahu výše zmíněných čísel)
- sčítání a odčítání zlomků a desetinných čísel
- násobení zlomků a násobení desetinných čísel
- porovnávání zlomků a desetinných čísel (v rozsahu výše zmíněných čísel)
- dělení desetinného čísla desetinným číslem typu 7,1
- převody jednotek (obsah, objem, rychlost)
- řešení úloh o opakovaných slevách a zdraženích v procentech
- využití trojčlenky
- dělení celku v daném poměru
- využití prvočíselného rozkladu (pro nalezení nsn a NSD dvou čísel)
- využití jazyka algebry k řešení úloh
- cílené úpravy jednodušších algebraických výrazů (vytýkání, roznásobování)
- různé metody řešení (slovních) úloh: pokus – omyl, tabulace, vizualizace, využitím dělitelnosti, modelování, jazykem algebry
-

Geometrie

Pojmy.

- trojúhelník: **osa úhlu (jako množina bodů dané vlastnosti)**, těžiště (propedeutika), kružnice opsaná a vepsaná
- čtyřúhelník (**rovnoběžník**, deltoid, nekonvexní)
- **pravidelný mnohoúhelník** (6, 8, 12), nekonvexní mnohoúhelník
- **shodnost** a **podobnost**
- **osová souměrnost**, posunutí
- vektor (propedeutika)
- **kruh**, **kružnice**, poloměr, průměr, výseč
- **Thaletova kružnice (jako množina bodů dané vlastnosti)**
- Cavalieriho princip
- povrch, objem
- **hranol**, **jehlan** (pravidelnýi nepravidelný)

Vztahy.

- trojúhelníková nerovnost
- součet úhlů v trojúhelníku
- věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků
- Thaletova věta
- Pythagorova věta (propedeutika)
- vlastnosti úhlopříček čtyřúhelníků
- obvod kružnice, obsah kruhu
- invarianty transformací

Činnosti.

- experimentální hledání Ludolfova čísla
- geometrická chirurgie
- konstrukce ve čtvercové mříži a na čistém papíře
- odhadování a zjišťování obsahu, objemu, povrchu

Závislosti a práce s daty

Pojmy.

- množina, podmnožina, sjednocení, průnik
- pravděpodobnost
- **lineární funkce**, její graf
- kvadratická funkce (propedeutika)
- **aritmetický průměr**
- kruhový a sloupcový **diagram**
- galerie, organizační princip galerie

Vztahy.

- kombinatorické vztahy (propedeutika)

Činnosti.

- vyjádření lineární závislosti grafem a rovnicí
- organizace souboru dat (jednoparametrické třídění, hledání organizačního principu)
- organizace souboru dat s cílem zjištění počtu jeho prvků
- analýza statistického souboru
- řešení základních kombinatorických a pravděpodobnostních úloh
- vyhledávání dat
- porovnávání souborů dat
- grafické znázorňování souboru dat
- čtení z grafů a diagramů

Díly E + F

Aritmetika a algebra

Pojmy.

- **rozvinutý zápis čísla v desítkové soustavě**
- **kritéria dělitelnosti 6, 8, 11, 12**
- celá část čísla
- propedeutika limity
- třetí odmocnina
- **mnohočlen**
- lineární nerovnice
- kvadratická rovnice (propedeutika)

Vztahy.

- stav konta po n letech při $p\%$ úročení a základním vkladu C je $C \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$
- $n^{a-b} = \frac{n^a}{n^b}$
- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- délka hrany krychle $a = \sqrt[3]{V}$
- poměr typu $a:b:c$
- tranzitivita dělitelnosti

Činnosti.

- účelné využití kalkulátoru
- uspořádání množiny čísel (v rozsahu výše zmíněných čísel)
- odhady (řádové odhady jako propedeutika limity)
- sčítání, odčítání, násobení a dělení zlomků a desetinných čísel
- aproximace $\sqrt{2}$
- využití prvočíselného rozkladu (pro nalezení nsn a NSD více čísel)
- Euklidův algoritmus
- cílené úpravy algebraických výrazů (i dělení trojčlenu dvojčlenem)
- úprava kvadratického trojčlenu na čtverec
- různé metody řešení (slovních) úloh: pokus – omyl, tabulace, vizualizace, využitím dělitelnosti, modelování, jazykem algebry, metodou izomorfismu

Geometrie

Pojmy.

- trojúhelník: těžiště, ortocentrum
- čtyřúhelník (tětivový, tečnový)
- pravidelný mnohoúhelník (5, 10)
- **Pythagorova věta**
- tětiva kružnice, mezikruží
- otočení, stejnolehlost
- vektor
- **válec**, **kužel**, **koule**

Vztahy.

- Pythagorova věta (důkaz)
- věta o obvodovém a středovém úhlu (propedeutika)
- charakterizace tečnového čtyřúhelníku
- vztah mezi obsahem a obvodem kruhu
- invarianty transformací

Činnosti.

- skládání a rozkládání vektorů
- geometrická chirurgie (i Cavalieriho princip)
- odhadování a zjišťování povrchu a objemu válce a kužele
- tvorba sítě rotačního válce a rotačního kužele

Závislosti a práce s daty

Pojmy.

- posloupnosti aritmetická a geometrická
- periodická, rostoucí, klesající, omezená posloupnost
- funkce kosinus a sinus (propedeutika)
- vážený aritmetický průměr, **četnost znaku**
- kvadratická funkce, její graf
- prázdná množina
- statistický soubor

Vztahy.

- kombinatorické vztahy (propedeutika)
  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Činnosti.

- posunutí grafu lineární a kvadratické funkce
- organizace souboru dat (víceparametrická třídění)
- tvorba statistického souboru, jeho evidence a jednoduchá analýza
- řešení jednoduchých kombinatorických a pravděpodobnostních úloh
- vyhledávání dat
- porovnávání souboru dat
- grafické znázorňování souboru dat
- čtení z grafů a diagramů

Díl G

Aritmetika a algebra

Pojmy.

- desetinná část čísla
- posloupnosti (např. Fibonacciho)
- *n*-tá odmocnina
- zlatý řez
- soustava tří lineárních rovnic
- iracionální rovnice
- kvadratická rovnice, diskriminant

Vztahy.

- účelné využití kalkulátoru
- důkaz iracionality některých čísel $\sqrt{n}$
- $n^{-a} = \frac{1}{n^a}$; $n^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$, $n^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{n}$
- Vietovy vztahy, diskriminant

Činnost.

- řešení kvadratické rovnice
- řešení lineární diofantické rovnice
- různé metody řešení (slovních) úloh: pokus – omyl, tabulace, vizualizace, modelování, jazykem algebry, metodou izomorfismu
- řešení kombinatorických a pravděpodobnostních úloh
- aproximace iracionálního čísla

Geometrie

Pojmy.

- věta o obvodovém a středovém úhlu
- kruhová úseč
- orientovaný úhel
- Gaussova křivka (propedeutika)
- izometrie
- objem a povrch koule
- pravidelné mnohostěny

Vztahy.

- věta o obvodovém a středovém úhlu (důkaz)
- charakterizace tětivového čtyřúhelníku

Činnosti.

- skládání izometrií
- tvorba sítí pravidelných mnohostěnů

Závislosti a práce s daty

Pojmy.

- limita posloupnosti (propedeutika)
- geometrický průměr (dvou a tří čísel)
- funkce kosinus a sinus (pro ostrý úhel)
- funkce tangens, kotangens (propedeutika)
- permutace, kombinace, variace

Vztahy.

- nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem
- základní kombinatorické identity
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$
- $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- nekomutativita skládání funkcí

Činnosti.

- tvorba a posunutí grafu funkce
- organizace souboru dat s cílem zjištění počtu jeho prvků
- dokazování některých kombinatorických identit

Očekávané výstupy	Naše očekávané výstupy			
Výstupy, kompetence	díly A + B	díly C + D	díly E + F	díl G
ČÍSLO A PROMĚNNÁ				
M-9-1-01 provádí početní operace v oboru celých a racionálních čísel; užívá ve výpočtech druhou mocninu a odmocninu	Provádí početní operace s celými čísly, vyhledá a určí nejmenší a největší prvek, rozlišuje idiomy o n větší/menší, n krát větší/menší, sčítá kmenové zlomky, sčítá a odčítá desetinná čísla (desetiny, setiny). Základní operace realizuje mentálně, písemně i kalkulátorem.	Čte a užívá zápis čísla římskými číslicemi, řeší úlohy s důrazem na logiku římských zápisů. Zapíše číslo rozvinutým zápisem do řádu desetitisíců. Uspořádá množinu celých i racionálních čísel. Krátí/rozšiřuje zlomky, sčítá a odčítá zlomky a desetinná čísla, násobí zlomky i desetinná čísla, dělí desetinné číslo desetinným číslem. Užívá n-tou mocninu, druhou odmocninu. Provádí výpočty s mocninami. Převádí jednotky (obsah, objem, rychlost).	Užívá rozvinutý zápis čísla v desítkové soustavě. Porovnává reálná čísla. Užívá ve výpočtech druhou a třetí mocninu a odmocninu. Sčítá, odčítá, násobí a dělí zlomky a desetinná čísla, počítá s odmocninami. Provádí aproximaci čísla druhá odmocnina ze dvou.	Používá desetinnou část čísla. Pracuje s n-tou odmocninou. Provádí aproximaci iracionálních čísel. Dokazuje iracionalitu některých čísel. Řeší úlohy na posloupnosti – například Fibonacciho posloupnost. Vyjadřuje odmocniny pomocí mocnin s racionálním mocnitelem.
M-9-1-02 zaokrouhluje a provádí odhady s danou přesností, účelně využívá kalkulátor	Při výpočtech zaokrouhluje, provádí odhady (sémantické i strukturální týkající se jedné operace). Účelně využívá kalkulátor (například při dělení, dělení se zbytkem).	Zaokrouhluje, provádí odhady (sémantické i strukturální týkající se výrazů s více operacemi). Účelně využívá kalkulátor (například při práci s racionálními čísly)	Provádí řádové odhady (propedeutika limity). Účelně využívá kalkulátor při výpočtech s reálnými čísly.	Účelně využívá kalkulátor.
M-9-1-03 modeluje a řeší situace s využitím dělitelnosti v oboru přirozených čísel	Pracuje s pojmy sudé/liché číslo, prvočíslo, číslo složené, násobek, největší společný násobek, dělitel, nejmenší společný dělitel, rozkládá přirozené číslo na součin, získává zkušenosti s n-cifernými čísly, s ciferným součtem (propedeutika pojmu rozvinutý zápis).	Odhaluje a používá kritéria dělitelnosti 3, 4, 9, řeší úlohy s propedeutikou dělitelnosti 6, 8, 11, 12. Pro nalezení nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele používá prvočíselný rozklad.	Odhaluje a používá kritéria dělitelnosti 6, 8, 11, 12. Využívá prvočíselný rozklad pro nalezení nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele více čísel. Seznamuje se s Euklidovým algoritmem.	

Očekávané výstupy	Naše očekávané výstupy			
Výstupy, kompetence	díly A + B	díly C + D	díly E + F	díl G
ČÍSLO A PROMĚNNÁ				
M-9-1-04 užívá různé způsoby kvantitativního vyjádření vztahu celek – část (přirozeným číslem, poměrem, zlomkem, desetinným číslem, procentem)	Užívá desetinná čísla, kmenové zlomky - sčítá a odčítá kmenové zlomky (zejména se jmenovatelem menším než 13 a se jmenovatelem 60, 100) , krátí a rozšiřuje zlomky, znázorňuje zlomky a desetinná čísla na číselné ose, používá pojmy procento, počet procent, základ.	Používá desetinná čísla (tisíciny až miliontiny), periodická čísla, periodu, předperiodu, zlomky (s dvoucifernými a trojcifernými jmenovateli), složený zlomek, smíšené číslo, převrácené číslo, záporný zlomek. Zmíněná čísla umísťuje na číselnou osu, vyjádří číslo opačné. Intuitivně pracuje s číslem iracionálním. Pracuje s číselnými výrazy. Řeší úlohy na procenta, procentovou část, promile, úrokování.	Reálná čísla umísťuje na číselnou osu.	
M-9-1-05 řeší modelováním a výpočtem situace vyjádřené poměrem; pracuje s měřítky map a plánů	Získává zkušenosti s poměrem, modeluje situace s využitím poměru, připravuje se na porozumění pojmu měřítko.	Dělí celek v daném poměru. Pracuje s měřítky map a plánů. Používá trojčlenku.		Seznamuje se s problematikou zlatého řezu.
M-9-1-06 řeší aplikační úlohy na procenta (i pro případ, že procentová část je větší než celek)	Řeší aplikované úlohy na procenta – určení počtu procent, základu, procentové části.	Řeší aplikační úlohy na procenta (i pro případ, že procentová část je větší než celek), řeší úlohy o opakovaných slevách a zdraženích v procentech.		
M-9-1-07 matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním	Matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnné v prostředí Krokování, Šipkových grafů, Součtových trojúhelníků, Součinových čtverců, Vah, Autobusu, Egyptského dělení, ve slovních úlohách.	Používá písmeno jako: obecné číslo, proměnnou, neznámou. Využívá jazyk algebry k řešení úloh. Cíleně provádí úpravy jednodušších algebraických výrazů (vytýkání, roznásobování), ekvivalentní úpravy (druhá mocnina dvojčlenu, rozdíl druhých mocnin). Rozlišuje dvojčlen, trojčlen.	Pracuje s mnohočleny, provádí cílené úpravy algebraických výrazů (i dělení trojčlenu dvojčlenem), upravuje kvadratický trojčlen na čtverec.	

Očekávané výstupy	Naše očekávané výstupy			
Výstupy, kompetence	díly A + B	díly C + D	díly E + F	díl G
ČÍSLO A PROMĚNNÁ				
M-9-1-08 formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav	Formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav - získává zkušenosti v prostředích Mince, Váhy , Hadi, Šipkové grafy (propedeutika rovnic, soustav rovnic, absolutní hodnoty).	Řeší soustavy dvou rovnic o dvou neznámých. Prostřednictvím úloh se připravuje na řešení lineárních diofantických rovnic.	Řeší lineární nerovnice. V úlohách se připravuje na řešení kvadratické rovnice.	Řeší kvadratické rovnice (používá Vietovy vztahy a diskriminant), lineární diofantické rovnice, iracionální rovnice, soustavy tří lineárních rovnic.
M-9-1-09 analyzuje a řeší jednoduché problémy, modeluje konkrétní situace, v nichž využívá matematický aparát v oboru celých a racionálních čísel	Analyzuje a řeší jednoduché problémy, modeluje konkrétní situace v různých prostředích – Krokování, Egyptské dělení, Indické násobení, Stovková tabulka, Součtové trojúhelníky, Číselná osa.	Modeluje konkrétní situace, v nichž využívá matematický aparát v oboru celých a racionálních čísel. Používá absolutní hodnotu.		
ZÁVISLOSTI, VZTAHY A PRÁCE S DATY				
M-9-2-01 vyhledává, vyhodnocuje a zpracovává data	Vyhledává, vyhodnocuje a zpracovává data. Používá Vennovy diagramy jako nástroj k organizaci prvků množiny. Využívá tabulku jako nástroj k evidenci dat a hledání závislostí.	Používá množiny, podmnožiny, průnik, sjednocení. Organizuje soubory dat (jednoparametrické třídění, hledání organizačního principu), zjišťuje počet prvků souboru.	Organizuje soubor dat (víceparametrické třídění). Vytváří statistický soubor, provádí evidenci a jednoduchou analýzu, setkává se s prázdnou množinou. Graficky znázorňuje soubor dat.	Organizuje soubor dat s cílem zjištění počtu jeho prvků.
M-9-2-02 porovnává soubory dat	Vyhodnocuje soubor dat procesuálně (evidence jízdy autobusem tabulkou), porovnává soubory dat konceptuálně (práce se vztahy v rodokmenu).	Vyhledává data, porovnává soubory dat. Analyzuje statistické soubory. Určuje aritmetický průměr.	Vyhledává data. Porovnává soubory dat. Určuje vážený průměr, četnost znaku.	Určuje geometrický průměr dvou a tří čísel. Odhaluje a zůvodňuje nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.
M-9-2-03 určuje vztah přímé anebo nepřímé úměrnosti	Získává zkušenosti s lineární závislostí v prostředích Šipkových grafů, Hadů, ve slovních úlohách.	Pracuje s lineární funkcí, narýsuje její graf. Řeší úlohy na kvadratickou funkci (propedeutika).	Řeší úlohy s aritmetickou i geometrickou posloupností. Pracuje s periodickou, rostoucí, klesající, omezenou posloupností.	
M-9-2-04 vyjádří funkční vztah tabulkou, rovnicí, grafem	Vyhledává vztahy, pravidelnosti, formuluje slovně závislosti, eviduje tabulkou.	Graficky znázorňuje soubory dat, čte z grafů a diagramů. Užívá kruhový a sloupcový diagram, používá galerii, organizační princip galerie.	Tabulkou, rovnicí i grafem vyjádří kvadratickou funkci. Řeší úlohy, které připravují pojem kosinus a sinus.	Řeší úlohy směřující propedeuticky k limitě posloupnosti. Pracuje s funkcemi kosinus a sinus pro ostrý úhel, propedeuticky s funkcemi tangens a kotangens.

Očekávané výstupy	Naše očekávané výstupy			
Výstupy, kompetence	díly A + B	díly C + D	díly E + F	díl G
ZÁVISLOSTI, VZTAHY A PRÁCE S DATY				
				V úlohách se seznámí se součtovými vzorci pro sinus a kosinus, odhalí vztah mezi funkcemi tangens, sinus a kosinus. V úlohách ověří nekomutativnost skládání funkcí. Tvoří grafy funkcí, využívá i jejich posunutí.
M-9-2-05 matematizuje jednoduché reálné situace s využitím funkčních vztahů	Řeší úlohy o slevách a zdraženích v pocentech, používá různé metody řešení slovních úloh: pokus-omyl, dramatizaci, tabulaci, vizualizaci, modelování.	Používá různé metody řešení úloh: pokus-omyl, tabulaci, vizualizaci, dělitelnost, modelování, jazyk algebry.	Používá různé metody řešení úloh: pokus-omyl, tabulaci, vizualizaci, dělitelnost, modelování, jazyk algebry, metodu izomorfizmu.	
GEOMETRIE V ROVINĚ A V PROSTORU				
M-9-3-01 zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů; využívá potřebnou matematickou symboliku	Zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti rovinných útvarů při konstrukcích i modelování (skládání papíru, dřívka, geoboard).	Zkoumá a odvozuje vlastnosti trojúhelníků: trojúhelníková nerovnost, součet úhlů v trojúhelníku, osa úhlu (jako množina bodů dané vlastnosti), těžiště (propedeuticky), kružnice opsaná a vepsaná. V úlohách se připravuje na Pythagorovu větu.	Zkoumá a odvozuje vlastnosti trojúhelníků: těžiště, ortocentrum. Provádí různé důkazy Pythagorovy věty. V úlohách získává zkušenosti, které připravují větu o obvodovém a středovém úhlu.	Odhaluje a zdůvodňuje větu o obvodovém a středovém úhlu.
M-9-3-02 charakterizuje a třídí základní rovinné útvary	Rozlišuje a charakterizuje trojúhelník ostroúhlý, pravoúhlý, tupoúhlý, rovnoramenný, rovnostranný, třídí čtyřúhelníky (čtverec, obdélník, kosočtverec, lichoběžník), propedeutiky pracuje s pojmy kruh, kruh, kružnice, poloměr	Rozlišuje a charakterizuje čtyřúhelníky (rovnoběžník, deltoid, nekonvexní čtyřúhelník), pravidelné mnohoúhelníky (6, 8, 12), nekonvexní mnohoúhelníky. Zkoumá vlastnosti úhlopříček čtyřúhelníků. Řeší úlohy na kruh, kružnici, kruhovou výseč. Rozlišuje poloměr a průměr.	Charakterizuje tětivový a tečnový čtyřúhelník, pravidelný mnohoúhelník (5, 10). Skládá a rozkládá vektory. Užívá tětivu kružnice, mezikruží. Při řešení úloh využívá geometrickou chirurgii.	Charakterizuje tětivový čtyřúhelník. Pracuje s kruhovou úsečí.
M-9-3-03 určuje velikost úhlu měřením a výpočtem	Měří velikosti úhlů, zjišťuje velikost úhlu porcesuálně i konceptuálně, pracuje s dvojicemi úhlů.	Určuje velikosti vnitřních úhlů rovinných útvarů, středových úhlů v mnohoúhelníku, využívá dvojice úhlů.		Užívá orientovaný úhel.

Očekávané výstupy	Naše očekávané výstupy			
Výstupy, kompetence	**díly A + B**	**díly C + D**	**díly E + F**	**díl G**
GEOMETRIE V ROVINĚ A V PROSTORU				
M-9-3-04 odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů	Měří délky, zjišťuje obvody a obsahy rovinných útvarů (nejprve obsah vyjadřuje počtem trojúhelníkových nebo čtvercových kachlíků).	Experimentálně hledá Ludolfovo číslo. Určuje obvod i obsah kruhu. Ke zjišťování a odhadování obsahu rovinných útvarů používá geometrickou chirurgii.	Zkoumá vztah mezi obsahem a obvodem kruhu.	
M-9-3-05 využívá pojem množina všech bodů dané vlastnosti k charakteristice útvaru a k řešení polohových a nepolohových konstrukčních úloh	Intuitivně užívá pojem množina všech bodů dané vlastnosti k charakteristice pojmu kruh, kružnice.	Prostřednictvím řešení úloh odhaluje Thaletovu větu (jako množina bodů dané vlastnosti).		
M-9-3-06 načrtne a sestrojí rovinné útvary	Modeluje rovinné útvary pomocí dřívek, na geoboardu, přehýbáním papíru. Trojúhelníky, čtyřúhelníky i mnohoúhelníky načrtává i konstruuje ve čtvercové síti i na čistém papíře.	Provádí konstrukce ve čtvercové mříži i na čistém papíře.		
M-9-3-07 užívá k argumentaci a při výpočtech věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků	Vyhledává a porovnává shodné a podobné útvary.	Zkoumá shodné a podobné trojúhelníky. Hledá pravidla a formuluje věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků, ty pak užívá k argumentaci a k výpočtům.		
M-9-3-08 načrtne a sestrojí obraz rovinného útvaru ve středové a osové souměrnosti, určí osově a středově souměrný útvar	Načrtne a sestrojí obraz rovinného útvaru ve středové a osové souměrnosti, určí osově a středově souměrný útvar.	Používá osovou souměrnost a posunutí, propedeuticky se seznamuje s pojmem vektor.	Řeší úlohy na otočení a stejnolehlost.	Používá různá shodná zobrazení. Skládá shodná zobrazení.
M-9-3-09 určuje a charakterizuje základní prostorové útvary (tělesa), analyzuje jejich vlastnosti	Určuje a charakterizuje krychli, krychlová tělesa, kvádr, hranol, jehlan, válec, kužel.	Analyzuje vlastnosti hranolu, jehlanu.	Zkoumá válec, kužel a kouli.	Zkoumá pravidelné mnohostěny.
M-9-3-10 odhaduje a vypočítá objem a povrch těles	Odhaduje a vypočítá objem a povrch krychle, kvádru, krychlových těles.	Odhaduje a počítá povrch a objem hranolu a jehlanu (pravidelný a nepravidelný). V úlohách se seznamuje s Cavalieriho principem.	Odhaduje a zjišťuje povrch a objem válce a kužele.	Počítá povrch a objem koule.

Očekávané výstupy	Naše očekávané výstupy			
Výstupy, kompetence	**díly A + B**	**díly C + D**	**díly E + F**	**díl G**
GEOMETRIE V ROVINĚ A V PROSTORU				
M-9-3-11 načrtne a sestrojí sítě základních těles	Modeluje krychli, kvádr, krychlová tělesa. Načrtne a sestrojí jejich sítě.	Modeluje hranol a jehlan. Načrtne a sestrojí jejich sítě.	Tvoří síť rotačního válce a rotačního kužele.	Tvoří sítě pravidelných mnohostěnů.
M-9-3-12 načrtne a sestrojí obraz jednoduchých těles v rovině	Načrtne a sestrojí obraz krychle, kvádru, krychlových těles v rovině.	Načrtne a sestrojí obraz hranolu a jehlanu.	Načrtne a sestrojí obraz válce a kužele.	
M-9-3-13 analyzuje a řeší aplikační geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu	Analyzuje a řeší aplikační geometrické úlohy.	Získané poznatky používá při řešení aplikačních geometrických úloh.	Získané poznatky používá při řešení aplikačních geometrických úloh.	
NESTANDARDNÍ APLIKAČNÍ ÚLOHY A PROBLÉMY				
M-9-4-01 užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací	Užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů, nalézá různé postupy. Hledá další možné výsledky a řešení úloh, případně zdůvodňuje neřešitelnost některých úloh.	Řeší základní kombinatorické a pravděpodobnostní úlohy.	Řeší jednoduché kombinatorické a pravděpodobnostní úlohy, získává zkušenosti s kombinatorickými vztahy (propedeutika).	Seznamuje se s permutacemi, kombinacemi, variacemi. Dokazuje některé kombinatorické identity.
M-9-4-02 řeší úlohy na prostorovou představivost, aplikuje a kombinuje poznatky a dovednosti z různých tematických a vzdělávacích oblastí	Řeší logické a netradiční geometrické úlohy.	Řeší komplexní úlohy.	Aplikuje znalost grafů lineární a kvadratické funkce, posunuje graf.	Seznamuje se s Gaussovou křivkou.

Výstupy, kompetence RVP	Naše očekávané výstupy – díly A + B	Názvy tematických celků, popis učiva	Činnosti typické pro rozvíjení a ověřování dosažených výstupů
ČÍSLO A PROMĚNNÁ			
M-9-1-01 provádí početní operace v oboru celých a racionálních čísel; užívá ve výpočtech druhou mocninu a odmocninu	Provádí početní operace s celými čísly, vyhledá a určí nejmenší a největší prvek, rozlišuje idiomy o n větší/menší, n krát větší/menší, sčítá kmenové zlomky, sčítá a odčítá desetinná čísla (desetiny, setiny). Základní operace realizuje mentálně, písemně i kalkulátorem.	Ochutnávka (hadi, součtové trojúhelníky, slovní úlohy, hvězdičkogramy). Desetiná čísla. Šipkové grafy. Součtové trojúhelníky. Krokování (sčítání a odčítání celých čísel). Indické násobení. Tabulka 100. Pavučiny. Součinové čtverce. Racionální čísla. Algebrogramy. Rovnice. Zlomky. Sousedé. Autobus. Egyptské dělení. Váhy.	Žák řeší hady, součtové trojúhelníky, hvězdičkogramy v oboru přirozených čísel, provádí číselné operace, používá logickou úvahu, kombinuje. Při zavádění desetinných čísel se opírá o zkušenost, vychází z měření veličin. Nejprve pracuje s veličinami, pak s nepojmenovanými čísly. Mentálně provádí četné početní operace sčítání a násobení pro nalezení řešení šipkových grafů. Při řešení součtových trojúhelníků sčítá a odčítá celá čísla, desetinná čísla. Modeluje pomocí šipek sčítání a odčítání celých čísel. Násobí a dělí čísla přirozená i desetinná.
M-9-1-02 zaokrouhluje a provádí odhady s danou přesností, účelně využívá kalkulátor	Při výpočtech zaokrouhluje, provádí odhady (sémantické i strukturální týkající se jedné operace). Účelně využívá kalkulátor (například při dělení, dělení se zbytkem).	Desetinná čísla. Součtové trojúhelníky. Procenta. Indické násobení.	Používá kalkulátor při porovnávání desetinných čísel a zlomků. Provádí odhady výsledků při hledání řešení součtových trojúhelníků.
M-9-1-03 modeluje a řeší situace s využitím dělitelnosti v oboru přirozených čísel	Užívá desetinná čísla, kmenové zlomky – sčítá a odčítá kmenové zlomky (zejména se jmenovatelem menším než 13 a se jmenovatelem 60, 100), krátí a rozšiřuje zlomky, znázorňuje zlomky a desetinná čísla na číselné ose, používá pojmy procento, počet procent, základ.	Desetinná čísla (porovnávání, umístění na číselné ose). Parkety (dělitel, násobek, propedeutika dělení se zbytkem). Součinové čtverce (rozklad čísla na součin). Dělitelnost (dělelní se zbytkem, dělitel, násobek, výroky o dělitelnosti, ciferný součet). Tabulka 100 (věty o dělitelnosti výrazů). Indické násobení (neúplně zadané tabulky). Váhy. Prvočísla (číslo složené, prvočíslo, Eratosthénovo síto). Největší společný dělitel. Nejmenší společný násobek.	Porovnává desetinná čísla a zlomky, umísťuje je na číselné ose. Rozhoduje o možnostech pokrytí čtverce parketami tvaru růžku, elka, mona. Pro nalezení řešení součinového čtverce rozkládá čísla na součin. Provádí dělení se zbytkem, doplňuje chybějící čísla v zápisech. Rozhoduje o pravdivosti výroků o dělitelnosti, obhajuje, dokazuje svá tvrzení. Zkoumá dělitelnost číselných výrazů ve stovkové tabulce, vyslovuje a ověřuje hypotézy. Určuje ciferné součty dvojmístných a trojmístných čísel, testuje jejich dělitelnost. Určuje čísla složená, hledá prvočísa, v praktických úlohách určuje největší společný dělitel, nejmenší společný násobek.
M-9-1-04 užívá různé způsoby kvantitativního vyjádření vztahu celek – část (přirozeným číslem, poměrem, zlomkem, desetinným číslem, procentem)	Užívá desetinná čísla, kmenové zlomky – sčítá a odčítá kmenové zlomky (zejména se jmenovatelem menším než 13 a se jmenovatelem 60, 100), krátí a rozšiřuje zlomky, znázorňuje zlomky a desetinná čísla na číselné ose,	Rozjezdy o zlomcích (různé modely zlomků, dělení celku na části, slovní úlohy, zlomková zeď). Desetinná čísla. Zlomky (statické i dynamické modely, ciferník, kruhová výseč, středový úhel, rozšiřování a krácení zlomků). Číselná osa (umístění zlomků a desetinných	Používá různé modely ke znázornění zlomků (provázek, tyč, čokoládu, kachlíky,úsečku, čtverec, kruh, ciferník, množiny objektů). Vyjadřuje minuty zlomkem jako části hodiny, kruhové výseče charakterizuje středovým úhlem i zlomkem. Pracuje s měřítkem, doplňuje chybějící rysky. Znázorňuje zlomky a desetinná čísla na číselné ose. Umísťuje zlomky i desetinná

Výstupy, kompetence RVP	Naše očekávané výstupy – sešit A+B	Názvy tematických celků, popis učiva	Činnosti typické pro rozvíjení a ověřování dosažených výstupů
ČÍSLO A PROMĚNNÁ			
	používá pojmy procento, počet procent, základ.	čísel na číselné ose, intervaly). Obsahy.	čísla do intervalů. Rozšiřuje a krátí zlomky. Sčítá, odčítá, násobí a dělí desetinná čísla.
M-9-1-05 řeší modelováním a výpočtem situace vyjádřené poměrem; pracuje s měřítky map a plánů	Získává zkušenosti s poměrem, modeluje situace s využitím poměru, připravuje se na porozumění pojmu měřítko.	Dřívka. Obsahy. Origami. Mříž.	Modeluje podobné útvary, počítá jejich obvody a obsahy. Měří délky úseček v různých mřížích (1 cm, 2 cm, 0,7 cm).
M-9-1-06 řeší aplikační úlohy na procenta (i pro případ, že procentová část je větší než celek)	Řeší aplikované úlohy na procenta – určení počtu procent, základu, procentové části.	Procenta (praktické úlohy ze života, slevy, pojem procento, opakované slevy, výpočty se změnou základu).	Diskutuje o nápisech s procenty. Určuje ceny po slevách nebo zdražení, hodnotu slevy, procenta slev. Řeší úlohy na opakované zlevnění, určuje změny ceny.
M-9-1-07 matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním	Matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnné v prostředí Krokování, Šipkových grafů, Součtových trojúhelníků, Součinových čtverců,Vah, Egyptského dělení, ve slovních úlohách.	Krokování (šipkové rovnice, odčítání závorky). Tabulka 100. Pavučiny. Číselná osa (umístění neznámého čísla).	Hledaný počet kroků v prázdném políčku označuje písmenem jako hledanou neznámou hodnotu. Krokuje s otočkou (používá povel čelem vzad). Odčítá výrazy v závorce. Určuje hodnotu cesty ve stovkové tabulce, hodnotu výrazu pro danou hodnotu proměnné. Dosazuje různá vstupní čísla do pavučiny a vyhodnocuje změnu dalších parametrů. Používá písmena k označení neznámého čísla, vyznačuje jeho obraz na číselné ose. Hledá další číslo v řadě a popisuje závislost.
M-9-1-08 formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav	Formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav - získává zkušenosti v prostředích Mince, Váhy , Hadi, Šipkové grafy (propedeutika rovnic, soustav rovnic, absolutní hodnoty). Zlomky (soustava rovnic).	Mince. Krokování (propedeutika řešení rovnic, absolutní hodnoty, přepis šipkových rovnic do číselných rovnic). Rovnice (vymezení pojmu rovnice). Váhy (rovnice se závorkami). Parkety (diofantické rovnice). Zlomky (soustva rovnic). Desetinná čísla (cyklostezky).	Řeší mincové rovnice, přepisuje je na číselné, řeší číselné rovnice. Řeší šipkové rovnice, doplňuje počet kroků do prázdných políček, hledá všechna možná řešení, přepisuje šipkové rovnice do číselných rovnic s neznámou. Modeluje neznámou pomocí obálek, hledá číslo, které je v obálce ukryté. Modeluje a řeší váhové rovnice, přepisuje váhové rovnice do číselných a naopak. Používá závorky. Určuje počty parket při pokrývání obdélníku, intuitivně řeší diofantické rovnice. Určuje neznámá čísla, jestliže zná jejich součet a podíl. Určuje délku trasy cyklostezky.
M-9-1-09 analyzuje a řeší jednoduché problémy, modeluje konkrétní situace, v nichž využívá matematický aparát v oboru celých a racionálních čísel	Analyzuje a řeší jednoduché problémy, modeluje konkrétní situace v různých prostředích - Krokování, Egyptské dělení, Indické násobení, Stovková tabulka, Součtové trojúhelníky, Číselná osa	Egyptské dělení chlebů. Šipkové grafy. Součtové trojúhelníky. Indické násobení. Součinové čtverce (vztahy mezi rohovými a středovými čísly). Sčítání zlomků.	Modeluje kmenové zlomky jako díly kruhových chlebů, porovnává různé způsoby řešení, hledá optimální řešení. Modeluje součet kmenových zlomků. Při řešení šipkových grafů hledá a porovnává různé možnosti, kombinuje, ověřuje vyplněním grafu. Analyzuje vztahy v součtovém trojúhelníku, vyvozuje postup řešení. Používá logickou úvahu k dopnění tabulky indického násobení, k vyřešení součinových čtverců. Modeluje součty kmenových zlomků na čokládovém modelu.

Výstupy, kompetence RVP	Naše očekávané výstupy – sešit A+B	Názvy tematických celků, popis učiva	Činnosti typické pro rozvíjení a ověřování dosažených výstupů
ZÁVISLOSTI, VZTAHY A PRÁCE S DATY			
M-9-2-01 vyhledává, vyhodnocuje a zpracovává data	Vyhledává, vyhodnocuje a zpracovává data. Používá Vennovy diagramy jako nástroj k organizaci prvků množiny. Využívá tabulku jako nástroj pro evidenci dat a hledání závislostí.	Součinové čtverce (tabulka). Šipkové grafy (evidence tabulkou). Vennovy diagramy (schéma dvou, tří množin, záznam počtu prvků v oblastech). Dřívka (závislost počtu dřívek na počtu dvojoken), Egyptské dělení (hledání pravidla).	Dosazuje čísla z proměnnou, vyhodnocuje součty v součinových čtvercích, výsledky eviduje tabulkou, hledá pravidelnosti. Řeší šipkové grafy s jedním parametrem, výsledky zapisuje do tabulky. Znázorňuje množiny pomocí Vennových diagramů, zaznamenává počty prvků do příslušných oblastí.
M-9-2-02 porovnává soubory dat	Vyhodnocuje soubor dat procesuálně (evidence jízdy autobusem tabulkou), porovnává soubory dat konceptuálně (práce se vztahy v rodokmenu).	Součtové trojúhelníky. Autobus (vyhodnocení souboru dat, evidence tabulkou, propedeutika trojčlenky). Rodina.	Vyhodnocuje vztahy v trojúhelníku dosazováním jednotlivých čísel do políček s neznámou, eviduje v tabulce, hledá a vyhodnocuje závislosti. Vyhodnocuje soubor dat procesuálně, eviduje tabulkou i harmonogramem průběh jízdy autobusu. Čte z rodokmenu a určuje vztahy mezi osobami, vytváří obdobné úlohy.
M-9-2-03 určuje vztah přímé anebo nepřímé úměrnosti	Získává zkušenosti s lineární závislostí v prostředích Šipkových grafů, Hadů, ve slovních úlohách.	Šipkové grafy. Součinové čtverce (lineární funkce). Lineární funkce (sémantika – pohyb na schodech, evidence Dřívka.	Hledáním řešení šipkových grafů objevuje lineární závislosti. Porovnává řešení mnoha součinových čtverců, objevuje lineární závislosti, zdůvodňuje, argumentuje. Eviduje tabulkou pohyb po schodech, porovnává průběhy pohybů.
M-9-2-04 vyjádří funkční vztah tabulkou, rovnicí, grafem	Vyhledává vztahy, pravidelnosti, formuluje slovně závislosti, eviduje tabulkou.	Dřívka (počet dvojoken). Sousedé (periodicita, rytmus). Součinové čtverce (evidence výsledků).	Ze dřívek modeluje posloupnost dvojoken, určuje potřebný počet dřívek, hledá závislost, eviduje tabulkou. Vyhledává pravidelnost a využívá ji k řešení. Řeší součinové čtverce, hledá vztahy mezi rohovými čísly a součtem středových čísel, výsledky eviduje tabulkou.
M-9-2-05 matematizuje jednoduché reálné situace s využitím funkčních vztahů	Řeší úlohy o slevách a zdraženích v pocentech, používá různé metody řešení slovních úloh: pokus-omyl, dramatizaci, tabulaci, vizualizaci, modelování.	Procenta. Šipkové grafy.	Řeší úlohy o slevách v procentech inspirované letáky, počítá ceny po opakovaných zlevněních. Při řešení šipkových grafů používá metodu pokus - omyl, postupně eviduje výsledky.
GEOMETRIE V ROVINĚ A V PROSTORU			
M-9-3-01 zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů; využívá potřebnou matematickou symboliku	Zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti rovinných útvarů při konstrukcích i modelování (skládání papíru, dřívka, geoboard).	Mříž (čtverec v mříži, určování délky úsečky v mříži, odhady délky, rovnoběžky, kolmice). Origami (kolmice, rovnoběžky, střední příčky v trojúhelníku, výšky v trojúhelníku, propedeutika osové a středové souměrnosti). Konstrukce (rýsování podle návodu, přesnost rýsování, konstrukce trojúhelníku).	Měří délky úseček, odhaduje a odvozuje délky mřížových úseček. Umísťuje čtverec do čtvercové sítě. Modeluje rovnoběžky a kolmice skládáním papíru. Vystřihuje a skládá útvary. Rýsuje podle návodu, určuje narýsovaný útvar. Rýsuje trojúhelník určený třemi stranami, popisuje postup konstrukce, kontroluje přesnost rýsování. Rýsuje rovnoběžky a kolmice v mříži i na čistém papíru. Používá symbolický zápis.

Výstupy, kompetence RVP	Naše očekávané výstupy – sešit A+B	Názvy tematických celků, popis učiva	Činnosti typické pro rozvíjení a ověřování dosažených výstupů
GEOMETRIE V ROVINĚ A V PROSTORU			
M-9-3-02 charakterizuje a třídí základní rovinné útvary	Rozlišuje a charakterizuje trojúhelník ostroúhlý, pravoúhlý, tupoúhlý, rovnoramenný, rovnostranný, třídí čtyřúhelníky (čtverec, obdélník, kosočtverec, kosodelník, lichoběžník), propedeuticky pracuje s pojmy kruh, kružnice, poloměr.	Ochutnávka (dřívka, geoboard). Mříž. Dřívka.	Modeluje z dřívek, pomocí gumiček na geoboardu, načrtává trojúhelníky, čtyřúhelníky, mnohoúhelníky. Pozoruje, popisuje, porovnává, charakterizuje jednotlivé geometrické útvary.
M-9-3-03 určuje velikost úhlu měřením a výpočtem	Měří velikosti úhlů, zjišťuje velikost úhlu procesuálně i konceptuálně, pracuje s dvojicemi úhlů.	Úhel (velikost úhlu, třídění úhlů podle velikosti, rýsování, propedeutika součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku). Dvojice úhlů (plný úhel, přímý úhel, pravý úhel, dvojice úhlů, ciferník).	Rýsuje na mříži i na čistém papíru, měří velikosti úhlů úhloměrem. Určuje součet naměřených vnitřních úhlů v trojúhelníku. Používá pojmy plný úhel, přímý úhel, pravý úhel. Určuje úhly v ciferníku. Vyhledává a porovnává dvojice úhlů v síti rovnoběžek.
M-9-3-04 odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů	Měří délky, zjišťuje obvody a obsahy rovinných útvarů (nejprve obsah vyjadřuje počtem trojúhelníkových nebo čtvercových kachlíků).	Dřívka (obvod ve dřívkách, obsah v kachlíkách, obvod a obsah podobných útvarů). Obsah (obdélníky, útvary ve čtvercové síti, převody jednotek). Obsahy mřížových útvarů (trojúhelníky, mnohoúhelníky). Mříž. Parkety. Zlomky.	Modeluje ze dřívek obdélníky a trojúhelníky se zadaným obvodem, určuje jejich obsah. Modeluje podobné trojúhelníky, určuje jejich obvody a obsahy, porovnává je. Určuje obsahy útvarů složených z obdélníků. Převádí jednotky obsahu. Různými způsoby určuje obsahy útvarů v mříži.
M-9-3-05 využívá pojem množina všech bodů dané vlastnosti k charakteristice útvaru a k řešení polohových a nepolohových konstrukčních úloh	Intuitivně užívá pojem množina všech bodů dané vlastnosti k charakteristice pojmu kruh, kružnice	Mříž (krokování v rovině, propedeutika vektoru, konstrukce středu mřížové úsečky).	Různými způsoby na mříži i na čistém papíru rýsuje střed úsečky, popisuje postup konstrukce, intuitivě používá množinu bodů dané vlastnosti. Používá krokování v rovině při konstrukci a popisu souměrných útvarů.
M-9-3-06 načrtne a sestrojí rovinné útvary	Modeluje rovinné útvary pomocí dřívek, na geboardu, přehýbáním papíru. Trojúhelníky, čtyřúhelníky i mnohoúhelníky načrtává i konstruuje ve čtvercové síti i na čistém papíře.	Dřívka. Mříž (trojúhelníky, čtyřúhelníky, mnohoúhelníky, propedeutika Pythagorovy věty). Trojúhelník (osa úsečky).	Umísťuje body do mříže, modeluje rovinné útvary použítím dřívek, na geoboardu, třídí je, eviduje. Konstruuje střed úsečky na mříži i na čistém papíře. Doplňuje mřížovou úsečku na pravoúhlý trojúhelník, určuje délku úsečky. Sestrojí osu úsečky.
M-9-3-07 užívá k argumentaci a při výpočtech věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků	Vyhledává a porovnává shodné a podobné útvary.	Dřívka. Mříž (shodnost, podobnost).	Pomocí dřívek modeluje shodné i podobné útvary. Modeluje na geoboardu i na mříži rovinné útvary, vyhledává shodné a podobné útvary.

Výstupy, kompetence RVP	Naše očekávané výstupy – sešit A+B	Názvy tematických celků, popis učiva	Činnosti typické pro rozvíjení a ověřování dosažených výstupů
GEOMETRIE V ROVINĚ A V PROSTORU			
M-9-3-08 načrtne a sestrojí obraz rovinného útvaru ve středové a osové souměrnosti, určí osově a středově souměrný útvar	Načrtne a sestrojí obraz rovinného útvaru ve středové a osové souměrnosti, určí osově a středově souměrný útvar.	Osová souměrnost (osově souměrné útvary, manipulace, konstrukce osově souměrných útvarů). Středová souměrnost (středově souměrné útvary, manipulace, krokování na číselné ose, konstrukce středově souměrných útvarů).	Překládá papír, vystřihuje, kreslí na čtverečkovaném papíru, dokresluje osově souměrné útvary. Popisuje postup konstrukce osově souměrného útvaru. Pohybuje se po čtverečkovaném papíru a vytváří středově souměrné stopy. Krokuje, skáče na číselné ose přes střed souměrnosti. Provádí a popisuje konstrukci středově souměrného útvaru.
M-9-3-09 určuje a charakterizuje základní prostorové útvary (tělesa), analyzuje jejich vlastnosti	Určuje a charakterizuje krychli, krychlová tělesa, kvádr, hranol, jehlan, válec, kužel.	Ochutnávka (krychlová tělesa).	Z krychlí modeluje krychlová tělesa, používá názvy podlaží, portrét. Zobrazuje prostorové útvary v rovině.
M-9-3-10 odhaduje a vypočítá objem a povrch těles	Odhaduje a vypočítá objem a povrch krychle, kvádru, krychlových těles.	Krychlová tělesa. Objem (objem krychlových těles, kvádru, jednotky objemu).	Určuje objem krychlových těles, kvádrů. Převádí jednotky objemu.
M-9-3-11 načrtne a sestrojí sítě základních těles	Modeluje krychli, kvádr, krychlová tělesa. Načrtne a sestrojí jejich sítě.	Sítě krychle a těles (sítě krychle, kvádru, hranolu, propedeutika sítě jehlanu, nekonvexního tělesa).	Modeluje různé sítě krychle, kvádru, hranolu, počítá povrch krychle a kvádru. Přiřazuje sítě k tělesům.
M-9-3-12 načrtne a sestrojí obraz jednoduchých těles v rovině	Načrtne a sestrojí obraz krychle, kvádru, krychlových těles v rovině.	Krychlová tělesa	Kreslí portréty krychlových těles, podlažní plány, pohledy zepředu, shora, z boku. Seznamuje se spojmy nárys, půdorys, bokorys. Vytváří krychlová tělesa podle určených podmínek.Vytváří plány těles. Přemísťuje krychle v krychlových tělesech, tím vytváří nová tělesa. Řeší kombinatorické úlohy, hledá všechna řešení.
M-9-3-13 analyzuje a řeší aplikační geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu	Analyzuje a řeší aplikační geometrické úlohy.	Sítě krychle a těles (povrch).	Modeluje sítě těles, správnost ověřuje jejich složením. Počítá povrch těles z vymodelovaných sítí.

Výstupy, kompetence RVP	Naše očekávané výstupy – sešit A+B	Názvy tematických celků, popis učiva	Činnosti typické pro rozvíjení a ověřování dosažených výstupů
NESTANDARDNÍ APLIKAČNÍ ÚLOHY A PROBLÉMY			
M-9-4-01 užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací	Užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů, nalézá různé postupy. Hledá další možné výsledky a řešení úloh, případně zdůvodňuje neřešitelnost některých úloh.	Součinové čtverce. Desetinná čísla (cyklostezky). Kombinatorika (možnost řešení manipulací). Hvězdičkogramy. Parkety. Krychlová tělesa. Logika (Ostrov poctivců a padouchů).	Vytváří vlastní součinové čtverce podle požadovaných podmínek. Určuje délku trasy cyklostezky - kombinuje, hledá optimální řešení. Modeluje různé možnosti stavby věže, sestavení nápisu, pokrývání obdélníku parketami, určuje počet možností.
M-9-4-02 řeší úlohy na prostorovou představivost, aplikuje a kombinuje poznatky a dovednosti z různých tematických a vzdělávacích oblastí	Řeší logické a netradiční geometrické úlohy.	Dřívka (přidávání a odebírání dřívek, vytváření rovinných útvarů, kombinování, hledání pravidelností). Parkety (rozvíjení prostorové představivosti, kombinatorika). Schody. Objem. Algebrogramy. Mince.	Modeluje ze dřívek útvary, upravuje zadaný obrazec, kombinuje. Přidáváním dřívek vytváří posloupnost tvarů, hledá pravidelnosti, formuluje slovně, eviduje tabulkou. Pokrývá čtvercovou síť různými tvary parket, umísťuje různé tvary do obdélníků, čtverců, porovnává různá řešení, hledá všechny možnosti, argumentuje. Určuje počet šipek při krokování na schodech, hledá různá řešení, kombinuje, vyhodnocuje. Hledá různé tvary kvádrů složených z daného počtu krychlí, porovnává jejich povrch a objem. Řeší algebrogramy.

Organizace učebnice

Učebnice, kterou otvíráte, se od klasických učebnic v mnohém liší. Učitelé si zajisté hned povšimnou, že nikde není žádný výklad a že učebnice nabízí pouze úlohy. Na začátku kapitol je nadpis, který označuje hlavní téma, k němuž se úlohy vztahují. Řešením úloh žáci získávají zkušenosti, které je vedou k poznávání nových matematických pojmů a souvislostí. Poznatek vycházející z vlastní zkušenosti není prázdným pojmem. Nestává se pak, že by žáci naučené věci tak často zapomínali. Spíše naopak se stává, že po jisté době žáci do daného učiva vidí dokonce lépe než v době, kdy se probíralo. Je to proto, že při probírání se ve vědomí žáka vytvořily nové pojmy a spoje a tyto se pak přirozeně dále „domestikovaly" v existující struktuře jeho znalostí.

Na některých stranách najdete kromě úloh vztahujících se k hlavnímu tématu i úlohy s odlišnou tematikou. Ty umožňují činnosti v hodinách střídat a zabránit monotónnosti výuky. Zároveň jsou to často úlohy, které buď žáky připravují na další téma, nebo navazují na již probrané, ale ukazují v něm nové souvislosti. Proto není vhodné tyto úlohy zcela vynechávat. Některé úlohy jsou náročnější, a proto se nemusejí probírat s celou třídou. Jsou vhodné pro rozvíjení nadaných žáků, případně pro gymnaziální třídy. V této příručce najdete k úlohám poznámky, které pro vás budou vodítkem při rozhodování, kterým žákům dát které úlohy.

Jestliže učitel při hodinách respektuje vlastní postupy a tempo jednotlivých žáků, velice často potřebuje zaměstnat další činností žáky, kteří mají zadané úlohy již vyřešené, a naopak jiní žáci ještě potřebují na úlohy delší čas. Učebnice se snaží umožnit potřebnou diferenciaci pomocí:

- rozdělení některých úloh na části a), b), c) atd.;
- úloh přidaných k hlavnímu tématu na konci některých stran;
- úloh, které není nutné dělat s celou třídou (ty nejsou v učebnici označeny, ale jsou okomentovány v této příručce).

Ve srovnání s klasickými učebnicemi se obsahové uspořádání učebnice jeví na první pohled jako neuspořádané. Skáče se od jednoho tématu k druhému. Například zlomkům se věnuje strana 21, objeví se na straně 32, dále se jim věnují strany 44 a 45 a najdete je ještě na dalších a dalších stranách. Někteří učitelé upřednostňují probrat celé téma najednou. Zdá se jim, že si tak žáci učivo lépe osvojí a zapamatují. Autoři této učebnice ale zvolili jiný postup, který lépe odpovídá tomu, jakým způsobem se děti novým poznatkům nejsnáze učí. Úlohy v učebnici jsou uspořádány tak, aby se žáci s daným pojmem setkávali postupně po dávkách, opakovaně s určitým odstupem a aby nové zkušenosti a nabyté poznatky mohli v klidu zpracovat. Pro děti jsou vyvozené poznatky většinou úplně nové, a proto se jejich mozek unaví mnohem dříve než mozek učitele a potřebuje změnu tématu či změnu činnosti. Při probírání celého tématu najednou dochází k přečerpání kognitivní kapacity dítěte, především u slabších žáků. Snad každý z nás někdy během krátké doby, například na poznávacím zájezdu, navštívil několik hradů a zámků v jednom dni. Vzpomeňte si, jak postupně váš mozek vypínal a vy jste přestávali vnímat výklad průvodce. Na čtvrtém hradu v pořadí vás už téměř nic nebavilo. Pokud navštívíte jeden hrad a za delší čas zase jiný, uchováte v paměti mnohem více informací a mnohem lépe si celou návštěvu užijete.

Úrovně obtížnosti

Většina úloh v učebnici má více částí – podúloh a), b), c), někdy i více, například a) až e). Tyto části vycházejí ze stejné úvodní situace, ale nenavazují na sebe. Mají stupňovanou obtížnost, a tím žáci postupně nabývají zkušenosti. Nejjednodušší je část a), nejobtížnější část poslední – například e). Zdůrazňujeme, že jednotlivé části – podúlohy – fungují v celé učebnici jako samostatné úlohy (až na několik málo výjimek, které vždy zmíníme). Na toto je třeba žáky upozornit. Například hned v první úloze s dřívky se v každé části vychází z původního obrázku nakresleného v učebnici. Nedorozuměním by bylo, pokud bychom v části b) pracovali s obrázkem, který vznikl vyřešením

Žáci si mohou sami volit obtížnost a řešit jen některé z nabízených variant. Nemusejí všichni stihnout všechno. Někdo vyřeší a) až e), pomalejší žáci stihnou jen a) či b) a je to úplně v pořádku. Většinou rychlí žáci řeší všechny úlohy, mohou však jednodušší varianty přeskočit a rovnou řešit jen obtížnější úlohy. Některé úlohy jsou koncipovány tak, že poslední část vyřeší jen špičkoví žáci. V textu pro učitele používáme označení rychlejší, šikovnější žáci, popřípadě pomalejší nebo slabší žáci. Tím ale v žádném případě nechceme žáky nálepkovat. Běžně se stává, že jeden žák se jeví v jednom tématu jako velmi šikovný a v jiném zase jako pomalejší. Tím jen chceme učiteli pomoci diferencovat přístup k žákům. Učitel by se těchto hodnotících slov ve vztahu k žákům měl vyvarovat. Spíše by měl mluvit o jednodušších a obtížnějších úlohách. Osvědčilo se nám, když jsme označovali úlohu pro špičkové žáky (v daném tématu) jako „zabiják" pro dobrovolníky.

Může se stát, že nějakou úlohu nikdo nevyřeší (třeba ani její první část). Pak učitel úlohu buď zadá třídě jako výzvu například na nástěnku, nebo zadá úlohu lehčí či jinak návodnou. Jedna z možností je zadat návodnou úlohu až další hodinu bez toho, aby učitel upozorňoval na souvislost s původním problémem. Je možné, že někdo z žáků na souvislost přijde a k původní úloze se spontánně vrátí.

Ve třídě mohou být pomalejší žáci, kteří u některé úlohy nevyřeší ani část a), zatímco ostatní žáci mají spočítané třeba všechny části. Pak je třeba těmto žákům dodat větší množství o trochu lehčích úloh. Zároveň je potřeba být připraven na situaci, kdy některý žák problém rychle prohlédne a má řešení všech podúloh hotovo ve chvíli, kdy si průměrní žáci teprve přečetli zadání. V takové situaci je možné odkázat ho na jiné úlohy v učebnici nebo mít na papírku připravené zadání velmi těžké úlohy k tomu tématu. Někdy takového žáka můžeme vyzvat, ať zkusí vymyslet podobnou úlohu pro ostatní spolužáky. Motivovat přiměřenými úkoly k vlastní intelektuální aktivitě žáky rozdílné úrovně je velká výzva a vyžaduje od učitele jak vnímavost k žákům během hodiny, tak přípravu před hodinou. Při zadávání úloh, které nejsou v učebnici, je možné využít předlohy na konci této příručky, kterou je možné kopírovat – například šablony hadů, šipkových grafů, součtových trojúhelníků atd.

Učebnice obsahuje četné úlohy, které se dají řešit manipulací s objekty – například s dřívky, parketami, kostkami, překládáním papíru apod. Na druhém stupni se často stává, že se manipulace nahradí pouze kreslením obrázků. To však spolehlivě zvládají jen žáci s dobrou představivostí v prostoru i rovině. Pro mnohé žáky je manipulace nezbytná, a proto je třeba, aby jim učitel manipulaci vždy umožnil. Na druhou stranu žáky, kteří „vidí", do manipulace s předměty nenutíme. Tím bychom zase brzdili rozvoj jejich schopnosti pracovat v představách.

Organizace hodiny

Na druhém stupni již někteří žáci zvládají větší celky, nepotřebují tak často střídat činnosti. To ale neplatí obecně pro všechny žáky. Záleží na tom, jak je činnost zaujme. Někdy se žáci do úloh tak zaberou, že je střídání činností vyruší. Například jim vadí, že zvoní a končí hodina, protože jsou právě blízko nějakému objevu, což bývá provázeno velkým zaujetím. Práce pak pokračuje celou přestávku. Jindy pozorujeme během hodiny únavu a nechuť pouštět se do další úlohy. Pak je lépe změnit činnost a věnovat se jinému tématu. K tomu dobře poslouží vložené úlohy s novou tematikou. Velmi záleží na učiteli, jak dokáže své žáky vnímat a citlivě na ně reagovat. Neexistuje univerzální návod, jak hodiny organizovat.

Zavádění pojmů

Učitelům se může zdát nezvyklý také způsob práce s novými pojmy. V tradičních učebnicích se nejčastěji nový pojem zavede – sdělí, případně přesně definuje a následně procvičuje. V naší učebnici se s pojmem pracuje v úlohách tak, aby žáci nejprve získali zkušenosti s řešením úloh, které se k pojmu vztahují. Pojem se používá až v konkrétních situacích a daných souvislostech. Řeší se o něm úlohy a až potom se přesně pojem vymezí, případně definuje. Například až po sérii úloh s dřívky, s překládáním papíru či mřížovými trojúhelníky, ve kterých žáci spojují středy stran trojúhelníku úsečkou a objevují různé zákonitosti, učitel žákům sdělí, že úsečka spojující středy stran v trojúhelníku se nazývá střední příčka.

Definice některých pojmů se může zpřesňovat postupně. Žáci používají nějakou prozatímní představu, ale při řešení dalších úloh může přirozeně vzniknout potřeba pojem definovat přesněji, aby třída mohla například rozsoudit spor, jestli je některé řešení úlohy správné. Diskusi vedoucí ke zpřesnění definice může také vyvolat učitel. Někdy může být zapotřebí, aby učitel doplnil další úlohy, které pomohou žákům k hlubšímu pochopení – například takové úlohy, na kterých se ukáže nedostatečnost prozatímní definice pojmu, kterou žáci vymysleli.

Někdy se může stát, že děti dají zkoumanému objektu vlastní název – za to vždy zaslouží pochvalu. Takovou situaci můžeme využít ke „polidštění" matematiky. Je vhodné pak říct, že je škoda, že Pepík nepřišel s objevem dřív, než se na stávajícím názvu matematici dohodli, možná bychom totiž dnes používali Pepíkovo názvosloví. Obecně se ukazuje, že děti potěší, jestliže občas použijeme jejich vlastní názvy v matematických souvislostech – často se dají ocenit různá řešení úlohy tak, že „porovnáme Pepíkovu a Bářinu metodu řešení".

Individualizace

Při objevování nové matematické myšlenky se využívají úlohy z různých prostředí – například řešení rovnic je připravováno v prostředí krokování, hadů, šipkových grafů, vážení na vahách, součtových trojúhelníků, mincí a mnoha dalších. Může se stát, že se najde žák, kterému určité prostředí nevyhovuje – nejde mu to, a tím ho řešení nebaví. Pokud je to možné, učitel žáka do takových úloh nenutí, ale nabídne mu odpovídající úlohy z jiného prostředí.

Role učitele

Při používání této učebnice se mění role učitele. Při organizaci práce ve třídě je třeba dodržovat jednu důležitou zásadu: **O správnosti řešení úloh nerozhoduje učitel, ale žáci.** Je dobře, když učitel činnost pouze organizuje, vyzývá žáky, aby předkládali různé návrhy, a moderuje jejich diskusi. Někdy se stane, že se třída shodne na nesprávném řešení nebo si odsouhlasí nepravdu. Učitel chybu neopravuje, ale pokusí se žáky ke správnému řešení přivést. Optimální je vytvoření a zadání úlohy, která žáky přivede k odhalení chyby. Není nutné reagovat okamžitě. V danou chvíli stačí říct, že se k úloze ještě vrátíme, a tím učitel získá čas na rozmyšlení návodných úloh, které přinese až v následujících hodinách další den.

Je třeba podotknout, že pro učitele, který je zvyklý mít předávání poznatků žákům více pod kontrolou, může být stažení se z role „garanta správnosti" či „rozhodčího" zpočátku náročné. Obecnou radou může být to, aby se pokaždé, kdy se žák obrátí na učitele s dotazem nebo žádostí o potvrzení svého názoru, učitel obrátil ke třídě se slovy: *„Tady Mirek se ptá, zda…".* Když je v tom učitel důsledný, časem se žáci začnou ptát rovnou třídy. I když se učitel při diskusi snaží o neutrální roli, může se mu stávat, že svůj názor na správnost řešení dává najevo neverbálně nebo tónem hlasu. Někdy také parafrázuje výpovědi jednotlivých žáků ve snaze, aby byly přesnější a srozumitelnější – tím diskusi mezi žáky ale spíše komplikuje. Změna sociální interakce může být náročná i pro třídu, která není na tento přístup zvyklá ani z minulosti, ani od učitelů jiných předmětů. Žáci se pak názoru učitele dožadují a když ho učitel nechce říct, mají pocit, že schválně „mlží". Pak může pomoci si s žáky o tomto přístupu otevřeně promluvit a vysvětlit jim, proč to učitel dělá. V některých třídách může být obtížné udržet klima, v kterém si žáci navzájem naslouchají, což je také třeba se s dětmi učit.

Jedním z indikátorů kvality výuky je radost – radost žáků z nalezeného řešení úlohy, z nalezených souvislostí a pochopení problému. Tato radost se přenáší i na učitele, který ji může prožívat spolu s dětmi. Sledovat žáky při vysvětlování originálního způsobu řešení, mít při naslouchání diskusím možnost do větší hloubky pochopit, jak žáci o matematických pojmech uvažují, vidět, že o problému, který je zaujal, jsou někdy ochotni z vlastní iniciativy přemýšlet i o přestávce nebo doma, to všechno může být radostí a odměnou pro učitele, který se vydal spolu s žáky na cestu dobrodružného objevování matematiky.

Cíle jednotlivých prostředí

Didaktická matematická prostředí, do nichž je matematika druhého stupně rozložena, byla z velké části zavedena již v našich učebnicích pro první stupeň. Některá prostředí z prvního stupně se na druhém stupni již neobjeví (například Biland, Barevné trojice, Střelba na cíl), ale objeví se jiná nová.

Matematika se na prvním stupni opírala o životní zkušenosti žáků, a proto hrála sémantická prostředí tak dominantní úlohu. Na druhém stupni mají žáci již mnoho matematických zkušeností, proto se těžiště výuky přesouvá do strukturálního prostředí. Objevují se zde prostředí jako Zlomek, Racionální číslo nebo Středová souměrnost, jejichž názvy se kryjí s názvy tradičních tematických celků. Rozdíl mezi tradičním výukovým celkem a didaktickým prostředím stejného jména spočívá v tom, že didaktické prostředí nepoučuje žáka, nedává mu žádná tvrzení nebo vzorečky, ale metodou gradovaných úloh vede žáky k objevům těchto zákonitostí.

Průřezové jsou zde dvě matematické oblasti, které prostupují téměř všemi prostředími. Jsou to:

- jazyk písmen jako nástroj práce se soubory jevů (tedy počátky algebry),
- zvyšování abstrakce a přesnosti úvah samotného jazyka (tedy precizace termínů a argumentace).

U obou průřezových oblastí dochází ke značné diferenciaci mezi žáky matematicky nejslabšími a nejvyspělejšími. To klade na učitele vysoké nároky z hlediska diferenciace výuky.

U každého prostředí uvádíme jeho didaktický potenciál rozdělený do tří následujících složek.

Porozumění

Objev (nového pojmu, vztahu, procesu nebo situace), který udělá jeden nebo dva žáci, si postupně osvojí i celá třída. Řešením série gradovaných úloh se žáci zdokonalují v zacházení s novou myšlenkou. Tu zvládají nikoli pouze na úrovni návodu, ale rovněž i na úrovni porozumění.

Seznámení

Žáci se seznamují s novým slovem, znakem nebo idiomem a dále také s novým pohledem, jazykem, nebo způsobem uchopení jevu. Zde častěji přichází impulz z učebnice nebo od učitele, ale další oblasti zpracovává žák již zcela sám.

Propedeutika

Propedeutika budoucí myšlenky (pojmu, vztahu, procesu nebo situace) znamená, že žák získává často jen dílčí zkušenosti, které mu později umožní komplexnější a hlubší poznání.

Prostředí	Porozumění	Seznámení se s	Propedeutika
Krokování	• číslům vyjadřujícím změnu • sčítání a odčítání v oboru celých čísel • znaménku mínus před závorkou • modelování rovnic a soustav rovnic v prostředí Krokování	• jazykem šipek jako nástrojem zaznamenávání procesů • tím, jak překládat mezi jazykem pohybů, jazykem šipek a jazykem čísel	• absolutní hodnoty • soustavy rovnic s absolutní hodnotou • Diofantických rovnic
Schody	nabízí skoro vše, co bylo u Krokování, a navíc: • vazbám mezi čísly vyjadřujícími adresy a čísly vyjadřujícími změnu • úlohám o věku i způsobu jejich řešení • modelování některých rovnic a soustav rovnic v prostředí Schodů	• se záporným číslem jako adresou, s pojmem *rozdíl*	• posloupnosti • pravděpodobnosti • kombinatoriky
Autobus	• vazbám mezi čísly vyjadřujícími stavy a čísly vyjadřujícími změnu • dohledávání scházejících dat na základě známých vazeb	• s tabulkou jako nástrojem pro záznam dat procesu • s harmonogramem jako dalším nástrojem pro záznam dat procesu • s prací s daty uvedenými v tabulce a harmonogramu	• trojčlenky • optimalizace procesu
Mince	• vztahu mezi počtem a veličinou • vazbám propojujícím číslo jako počet s číslem jako veličinou • řešení lineárních rovnic a soustav lineárních rovnic • modelování některých rovnic a soustav rovnic v prostředí Mince	• s jinými měnami a způsobem převodu mezi měnami	• kombinatoriky • dělitelnosti • práce s daty
Algebrogramy a hvězdičkogramy	• číslu zapsanému v desítkové soustavě a operacím s tímto číslem • *číslu zapsanému v dvojkové, pětkové i jiné soustavě a operacím s tímto číslem*	• se způsobem rozkladu čísla na „součet řádů“ (483 = 4.100 + 8.10 + 3)	• dělitelnosti, zejména dělitelnosti čísly 3 a 9 • kombinatoriky
Součtové trojúhelníky	• odhalování číselných zákonitostí metodou uvolňování parametru (Ar1,12) • sčítání a odčítání racionálních čísel • řešení lineárních rovnic a soustav lineárních rovnic • *sčítání a odčítání přirozených čísel zapsaných v dvojkové, pětkové i jiné soustavě*	• *s lineární funkcí (Ar1,13)*	• lineární závislosti a nezávislosti • lineárního prostoru

DÍL A

Ochutnávka

Každá úloha z úvodní „ochutnávkové“ dvoustrany je z jiného prostředí, aby žáci skutečně ochutnali různé druhy činností. Střídají se úlohy početní s úlohami geometrickými. Tyto úlohy mají podúlohy a), b), c), někdy i d). Nejjednodušší je podúloha a). Je určena žákům, kteří s Hejného matematikou začínají – nemusí ji řešit zdatnější žáci, případně ti žáci, kteří s podobnými úlohami mají zkušenost z 1. stupně – ti hned budou řešit b) a c). Slabší žáci se asi k podúloze c) nedopracují. V době, kdy část třídy bude řešit úlohy z Rozjezdů (viz dále), budou ti žáci, kteří zlomkům i desetinným číslům rozumí, řešit zbývající úlohy z Ochutnávky nebo úlohy z kapitoly Když zbyde čas.

Jednou z možností, jak uskutečnit úvodní ochutnávku úloh, je například tato. Můžete začít zatím bez učebnice. Jednotlivé úkoly namnožíte, rozstříháte a umístíte na různá místa ve třídě. Žáci individuálně chodí po stanovištích, sami si zvolí pořadí, ve kterém budou řešit jednotlivé úkoly. Sami ovlivňují i obtížnost – aby mohli jít dál, stačí, aby vyřešili kterékoli dvě ze tří (až čtyř) různě obtížných podúloh. Pokud si nebudou vědět rady, diskutují se spolužákem, který se zrovna vyskytne u stejného stanoviště, nebo mají možnost přijít za učitelem pro náhradní jednodušší úlohu. Po projití všech deseti stanovišť, jsou v cíli putování. Můžou se pak vrátit k úloze, která se jim líbila, a dořešit podúlohu, kterou předtím vynechali. Učitel nekontroluje výsledky. Žáci na papír nebo do sešitů podrobně zaznamenávají svá řešení. Je možné, že tato práce zabere více jak jednu hodinu a ke kontrole a diskusi se dostanete až další dny. Pak žáci vytvoří skupiny a navzájem konzultují svá řešení. U některých úloh budou schopní vyjasnit si správné řešení mezi sebou a nebudou se k nim potřebovat dále vracet. Po skončení této skupinové práce můžete ve třídě společně diskutovat jak o sporných úlohách, kde se žáci zatím na řešení neshodli, tak o úlohách, které žáky zaujaly a u kterých budete chtít jít víc do hloubky.

Samozřejmě můžete k úvodním úlohám přistoupit i jiným způsobem. Můžete je řešit i postupně s celou třídou třeba tak, že žáky necháte nejprve chvíli samostatně pracovat a pak společně diskutujete o výsledcích, dáváte doplňující otázky. Podrobnější informace o jednotlivých úlohách a možnostech, jak o nich vést diskusi, najdete níže.

Dřívka

Prostředí dřívek je manipulativní. Na prvním stupni rozvíjí jemnou motoriku dětí, která je potřebná například i k rýsování. Také rozvíjí poznávání geometrických tvarů jako čtverec, obdélník, kosočtverec, kosodélník, trojúhelník, lichoběžník, konvexní i nekonvexní šestiúhelník atd. Při vytváření obrazců podle obrázku se žáci učí pozorovat vlastnosti obrazce. Tvořením dalších obrazců, přidáváním, ubíráním, přemísťováním dřívek se rozvíjí kombinatorické schopnosti a „umění vidět“ neboli představivost v rovině, zejména představivost o změnách. Věk 12 let je, podle Piagetových stádií kognitivního vývoje jedince, zlomovým věkem, kdy žák přechází ze stadia konkrétních operací do stádia formálních operací. Proto je důležité se ještě věnovat konkrétním manipulativním činnostem, ale zároveň už směrovat přemýšlení žáků k mentálním operacím s abstraktními pojmy.

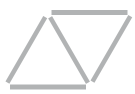
V prostředí dřívek se budují a v činnostech rozvíjejí také pojmy obvod a obsah obrazce, pracuje se s různými jednotkami obsahu („kachlíky“ – jednotkové trojúhelníky nebo jednotkové čtverce), pracuje se se zlomky jako s částmi celku. Připravují se geometrické relace jako shodnost a podobnost a geometrické transformace – otáčení, osová souměrnost, posunutí. V tomto prostředí je možné postupně odhalovat jednoduché i složitější vazby a pomalu přecházet od jejich slovního popisu k popisu algebraickému.

U každé manipulativní činnosti je důležitý slovní doprovod učitele i žáků. Tím se znalosti v činnostech posouvají do znalostí ve slovech, což zkvalitňuje žákovo poznání. Žáci komentují své činnosti a diskutují o jevech jazykem, který z hlediska matematika může být nepřesný. Důležité ale nyní je, že „nepřesným“ jazykem popisují dobré myšlenky. Tím, že učitel sice žáky neopravuje, ale sám mluví jazykem pokud možno přesným, který od něj žáci postupně přebírají, kultivuje postupně i jazyk žáků. Učitel při popisu činností může zavádět pojmy, které nemusí nijak vysvětlovat, protože žáci vidí, co a jak učitel dělá a nazývá. Proto je důležité, aby učitel používal správnou geometrickou terminologii. V prostředí dřívek v 6. ročníku by měl učitel frekventovat tyto termíny: čtverec, obdélník, kosočtverec, rovnoběžník, (rovnoramenný, pravoúhlý) lichoběžník, (rovnoramenný, rovnostranný, tupoúhlý, ostroúhlý, pravoúhlý) trojúhelník, pravidelný šestiúhelník, nekonvexní šestiúhelník, mnohoúhelník, vrchol, úhlopříčka, strana, délka strany, obsah, obvod.

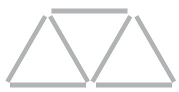
V dřívkách je možné „řemeslně“ vymodelovat tvar, který teoreticky neexistuje. Například „trojúhelník“ se stranami 2, 1, 1. Určitě se najde žák, který takový trojúhelník pomocí dřívek vymodeluje. Je pravděpodobné, že některý spolužák s tím nebude souhlasit. Do diskuze učitel zasahovat nemusí, ale může přispět otázkami. Například první otázka může být: „Tedy existuje, nebo neexistuje trojúhelník o stranách 2, 1, 1?“
V případě kladné odpovědi na předchozí otázku učitel položí otázku: „Umíte ten trojúhelník přesně narýsovat?“ Cílem této a možná několika dalších podobných diskuzí je vyjasnění rozdílu mezi „řemeslným“ a teoretickým chápáním geometrie. To se týká všech pojmů, bodem počínaje, prostorem konče. Přesné rýsování zde slouží jako mezistupeň obou zmíněných vnímání geometrie.

Učitel se žáky diskutuje, jaké obrazce jsou z dřívek vytvořeny, a klade další otázky, jako „Který z těchto tvarů je rovnoběžník?“, „Kolik nejméně dřívek potřebuješ na vytvoření nekonvexního útvaru?“ apod.

a) Kosočtverec vznikne odebráním „úhlopříčky“. Někteří žáci řeknou, že ani není potřeba „úhlopříčku“ odebírat.

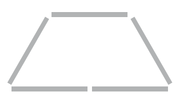


b) Jsou vytvořeny tři rovnostranné trojúhelníky a 3 čtyřúhelníky – jeden rovnoramenný lichoběžník a dva kosočtverce, jejichž průnik je rovnostranný trojúhelník.

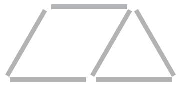


c) Je pravděpodobné, že někdo ve třídě bude termín lichoběžník znát. Když ne, řekne učitel, že je to takový čtyřúhelník, který má dvě strany rovnoběžné a druhé dvě nerovnoběžné. (Přesné zavedení je na straně 53.)

Rovnoramenný lichoběžník



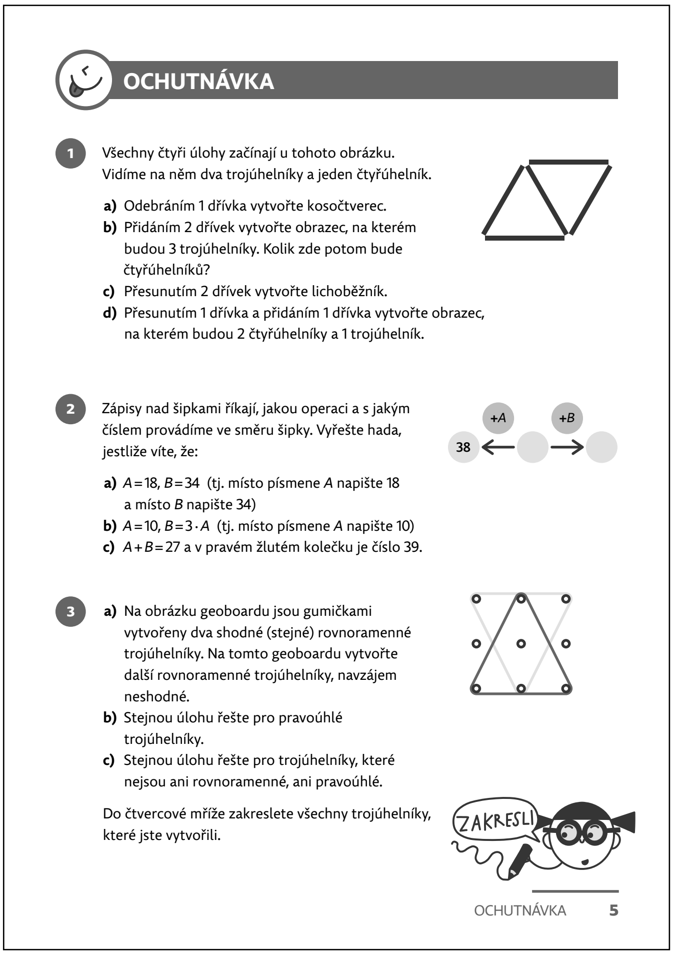
d) Rovnostranný trojúhelník, kosočtverec a rovnoramenný lichoběžník.



Většinou nebývá nutné říkat, že pracujeme se shodnými dřívky. Může se však stát, že díky tvořivosti žáků (která se ve zvýšené míře projevuje tam, kde mohou poukázat na nepřesnost učitelovu nebo nepřesnost v učebnici) to bude potřeba vyjasnit.
Přesnější definice dřívkového obrazce může vypadat takto: V dřívkovém obrazci je každé dřívko stranou nebo částí strany aspoň jednoho mnohoúhelníku.
Žáky podobnou definicí nezatěžujeme, ale může se stát, že bude potřeba vyjasnit, že dřívka „nesmí vyčnívat“ (jako na obrázcích).

Hadi

Ve směru šipky provádíme naznačené operace. Číslo + 19 říká, že k neznámému číslu máme přičíst 19 a výsledek bude 38. V prvním kroku v úloze a) proto odčítáme. Je to úloha s antisignálem – šipka a znaménko + naznačuje přičítání, ale my úlohu řešíme odečítáním. Úloha **b)** je obtížnější tím, že číslo B je třeba nejdříve zjistit – je to trojnásobek čísla A, některým žákům se vyjádření


OCHUTNÁVKA

1 Všechny čtyři úlohy začínají u tohoto obrázku.
Vidíme na něm dva trojúhelníky a jeden čtyřúhelník.

a) Odebráním 1 dřívka vytvořte kosočtverec.
b) Přidáním 2 dřívek vytvořte obrazec, na kterém budou 3 trojúhelníky. Kolik zde potom bude čtyřúhelníků?
c) Přesunutím 2 dřívek vytvořte lichoběžník.
d) Přesunutím 1 dřívka a přidáním 1 dřívka vytvořte obrazec, na kterém budou 2 čtyřúhelníky a 1 trojúhelník.

2 Zápisy nad šipkami říkají, jakou operaci a s jakým číslem provádíme ve směru šipky. Vyřešte hada, jestliže víte, že:

a) $A=18$, $B=34$ (tj. místo písmene A napište 18 a místo B napište 34)
b) $A=10$, $B=3 \cdot A$ (tj. místo písmene A napište 10)
c) $A+B=27$ a v pravém žlutém kolečku je číslo 39.

3 **a)** Na obrázku geoboardu jsou gumičkami vytvořeny dva shodné (stejné) rovnoramenné trojúhelníky. Na tomto geoboardu vytvořte další rovnoramenné trojúhelníky, navzájem neshodné.
b) Stejnou úlohu řešte pro pravoúhlé trojúhelníky.
c) Stejnou úlohu řešte pro trojúhelníky, které nejsou ani rovnoramenné, ani pravoúhlé.

Do čtvercové mříže zakreslete všechny trojúhelníky, které jste vytvořili.

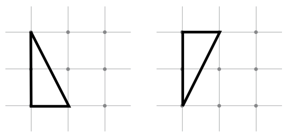
OCHUTNÁVKA 5

užitím písmen může zdát nesrozumitelné. Objasňují si to mezi sebou ve vzájemné diskusi. Úloha **c)** je skryté řešení soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. Zápis pomocí rovnice však neupřednostňujeme, a pokud bude třeba dát žákovi nějakou radu, tak nejlepší radou je: Tak si něco zkus, vezmi dvě čísla a testuj, hledej. (Tato rada je univerzální pro mnoho úloh.) Mnozí učitelé metodu „zkusmo" odsuzují, ale žáci hledáním získávají cenné zkušenosti.
V úloze **a)** žákům slovní komentář učebnice pomáhá porozumět, že zápisy A = 18 a B = 34 jsou substituce. V úloze **b)** je tato rada skromnější, v úloze **c)** schází.

Výsledky: **a)** 20, 54; **b)** 28, 58, B = 30; **c)** 25, A = 13, B = 14.

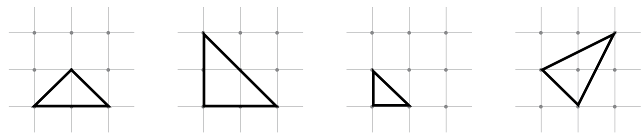
Mříž

Pokud učitel nesežene pro žáky geodesku (také se říká geoboard), je to sice škoda, neboť žáci přijdou o manipulaci, ale není to důvod tuto úlohu vynechat. Žáci mohou použít čtvercovou mříž a vyznačí si na ní 33 mřížových bodů – to jsou průsečíky mříže. Tento termín je důležitý a budeme jej dále hodně používat. Geoboard s devíti hřebíky se ještě několikrát využije, ale budeme rychle směřovat do čtvercové mříže.

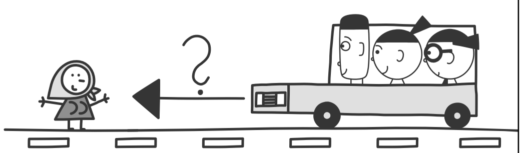


Učitel nechá vystavit na tabuli žákovská řešení a pravděpodobně se vyskytnou i řešení, která budou otočená nebo osově souměrná. Kromě připomenutí terminologie tím, že ji učitel správně používá, se bude diskutovat i o shodných zobrazeních, tedy o tom, zda trojúhelníky osově souměrné nebo otočené o 90° nebo 180° jsou shodné. Obvykle bývá nejednotný názor u trojúhelníků nepřímo shodných, jako například u těchto dvou na obrázku. Učitel nechá na žácích, jak rozhodnou. Nic se nestane, když nyní rozhodnou například tak, že dva nepřímo shodné trojúhelníky nejsou shodné. Důležité je, aby žáci formulovali pro svá rozhodnutí argumenty. Argument, který by mohli žáci vyslovit pro neshodnost (žáci mohou říkat, i že nejsou stejné) trojúhelníků je, že je nelze na sebe přemístit tak, aby se kryly. Nic se nestane, když část třídy tento argument přijme a část ne. Ale ti, co jej nepřijmou, budou muset i v dalších úlohách své vymezení shodných trojúhelníků zohlednit. Časem se nejspíše stejně přikloní k druhému názoru, neboť úlohy pak budou mít méně různých řešení.

Řešení: **a)**



Podle našich zkušeností poslední trojúhelník svému nalezení odolává nejdéle. Bývá to obvykle tím, že žáci mají ve svém repertoáru modelů trojúhelníků takové, které mají jednu stranu vodorovnou. U posledního trojúhelníku je důležité formulovat argument, proč je rovnoramenný, což je u prvních tří snadné. Zde uvítáme argument: Dvě strany jsou stejně dlouhé, neboť jsou úhlopříčkami stejných (raději shodných) obdélníků. Tento argument se nám v budoucnu bude hodit. Často se také stává, že žáci prohlásí o trojúhelníku na obrázku ze zadání, že je rovnostranný. Obvykle někteří žáci přesvědčí ostatní tím, že strana obdélníku je kratší než jeho úhlopříčka a ukáží to měřením nebo překládáním papíru. Později si vybudujeme další přesvědčivé argumentační nástroje využívající čtvercovou mříž, které nejsou závislé na našich vjemech. (Budeme porovnávat délky úseček pomocí obsahů čtverců nad uvažovanými úsečkami.)


4 Jedeme k babičce. Zbývá nám ještě 24 km.
Jak daleko bydlí babička, jestliže jsme z celkové vzdálenosti již urazili:

a) polovinu **b)** třetinu **c)** pětinu?

5 Z krychlí vytvořte krychlové těleso, jehož portrét je na obrázku. Umístěte ho tak, aby v prvním podlaží byly:

a) dvě **c)** čtyři
b) tři **d)** jedna krychle.

Svá řešení nakreslete.

6 Na obrázku je součtový trojúhelník.
Vyřešit součtový trojúhelník znamená doplnit čísla do všech polí tak, aby platilo, že součet čísel ve dvou sousedních polích je zapsán v poli pod nimi (viz obrázek s čísly 5, 3 a 8).

Vyřešte součtový trojúhelník na obrázku, když:

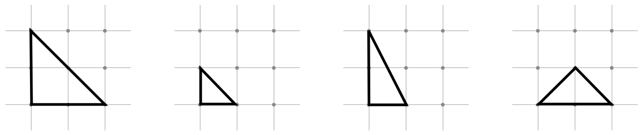
a) v šedém poli bude číslo 5
b) součet čísel v druhém řádku je 37
c) součet čísel ve třetím řádku je 48
d) součet všech 10 čísel je 124.

7 Doplňte scházející čísla.

a) Desetinásobek čísla 0,2 je ___. **c)** Trojnásobek čísla 0,45 je ___.
b) Desetina čísla 0,3 je ___. **d)** Pětinásobek čísla ___ je 0,45.

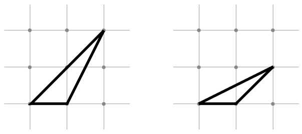
6 OCHUTNÁVKA

b)



Každé řešení je třeba odůvodnit. Důležité argumentace asi zazní u posledního. Např: Ramena trojúhelníku jsou na sebe kolmá, neboť jsou to dvě úhlopříčky čtverce a ty jsou na sebe kolmé.

c)



U těchto řešení může dát učitel doplňující otázku, jak se liší obvody těchto trojúhelníků, nebo co mají ty trojúhelníky společné. Dvě strany se shodují (jedna dvojice jsou úhlopříčky obdélníku 21, druhá dvojice jsou strany jednotkových čtverců) a třetí strana je u prvního trojúhelníku dvakrát delší než u druhého (u prvního jsou to dvě úhlopříčky jednotkových čtverců a druhého jenom jedna). Tedy jejich obvody se liší o jednu úhlopříčku jednotkového čtverce. Takovými diskusemi si opakujeme pojem obvod obrazce. Důležité je, že s ním pracujeme bez vazby na vzorec.
Další úloha pro šikovné žáky může být, aby všechny nalezené trojúhelníky nějak uspořádali. Žáci si sami najdou kritérium pro uspořádání.
Když učitel nechá nalezené trojúhelníky (je jich 7) na nástěnce, budou se hodit v dalších hodinách ke hře SOVA. Ta bude vysvětlena později.

Zlomky

Slovní úloha na dělení celku na části. V úloze a) žáci zřejmě snadno odhalí, že 24 km je polovina cesty, proto celá cesta je 48 km. Úloha b) vyžaduje objevení, že zbývají do cíle dvě třetiny cesty a výpočet velikosti jedné třetiny cesty. K tomu dovede žáka například dobrý obrázek úsečky rozdělené na třetiny, kde každá třetina je 12 km. Výsledek je 36 km. Úloha c) je ještě obtížnější. Úsečka znázorňující cestu je rozdělena na 5 shodných částí a u každé je číslo 6 km. Výsledek 30 km. Ve všech případech je při vysvětlování řešení vhodnější, když obrázek na tabuli nakreslí třeba nedokonalým způsobem některý z žáků (ostatní ho můžou zpřesnit), než když obrázky kreslí učitel.

Úloha pro experty: Ve všech třech úlohách **a)** až **c)** byl výsledek celé číslo. Bude výsledek celé číslo i pro zlomky **d)** čtvrtinu, **e)** šestinu, **f)** sedminu, **g)** osminu? Jak musíme změnit v zadání číslo 24, aby výsledek této nové úlohy byl celé číslo pro všechny případy **a)** až **g)**?

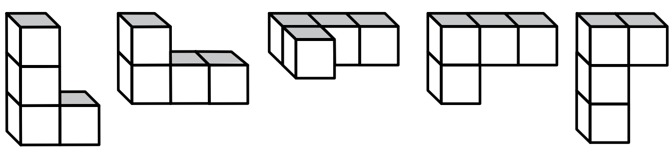
Výsledky: d) ano, 32 km; **e)** ne, 28,8 km; **f)** ano, 28 km; **g)** ne, 27,429 km. Jednou z úvah může být, že v úlohách **e)** a **g)** dělíme 24 pětkou nebo sedmičkou. Abychom zachovali dělitelnost v ostatních případech a zaručili dělitelnost v zbylých dvou případech, lze vynásobit čísla 24, 5 a 7. Dostaneme číslo 840. Existuje, ale i menší číslo. To může být pro žáky výzvou *Nalezněte nejmenčší takové číslo, pro které to platí.* Hledaným číslem je 420, ale to bude potřeba dokázát, obhájit.

Krychlová tělesa

Úloha je zaměřená na to, aby žáci poznali, že když mluvíme o tělese, nejenom krychlovém, jeho poloha není jeho geometrickou vlastností. Učitel nechá žákům volnost, aby si těleso v různých polohách zobrazili, jak to umí. Žáci, kteří prošli metodou VOBS na prvním stupni, se pravděpodobně budou snažit pořídit plán stavby s puntíky, nebo s čísly. (Této zobrazovací metodě se na druhém stupni věnovat nebudeme, neboť je omezená pouze na *krychlové stavby*, a my zde budeme pracovat již pouze s tělesy a pojem stavba již nebudeme používat.) Tito žáci se dostanou do problému při kreslení tělesa v poloze, ve které je v prvním podlaží jedna krychle, a tím pádem některá krychle bude „viset ve vzduchu“. Ostatní žáci budou asi těleso zobrazovat portrétem, tedy ve volném rovnoběžném promítání, pravděpodobně v nadhledu zprava. Některé šikovné žáky můžeme vyzvat, aby každý obrázek pořídili v jiném pohledu – nadhledu zleva, podhledu zprava a zleva. Jiní žáci budou mít zatím velký problém portrét tělesa jakkoli nakreslit. Může jim pomoci odkoukávat postup od spolužáků, případně jim můžeme přidělit pomocníka. Pokud jim to nejde, netlačíme na ně. Úloha připravuje žáky na přijetí nové a velmi pohodlné, technicky nenáročné metody zobrazování krychlových těles.
Všechny části úlohy mají řešení, pokud se těleso vhodně umístí.

Řešení:

a) **b)** **c)** **d)** dvě řešení



Součtové trojúhelníky

Součtové trojúhelníky jsou prostředí účinné na procvičování kalkulativních dovedností žáků. Mnohé počítání však není cílem, ale prostředkem k objevování účinných řešitelských strategií a odhalování různých vazeb od nejjednodušších k docela komplikovaným. Metoda pokus-omyl je velice vítaná. Odhalení jakékoliv vazby umožní žákovi rychlejší řešení a méně rutinního počítání, což je pro žáky motivující.

Jak uvidíme později, v tomto prostředí se otevírají dveře i zlomkům a záporným číslům, je mnoho příležitostí k proniknutí do oblasti kombinatoriky, což se neobejde bez práce s daty. V neposlední řadě se zde řeší rovnice i soustavy rovnic s více neznámými.

Řešení:

a)

5 | 7 | 5 | 9
12 | 12 | 14
24 | 26
50

b)

4 | 7 | 5 | 9
11 | 12 | 14
23 | 26
49

c)

3 | 7 | 5 | 9
10 | 12 | 14
22 | 26
48

d)

–5 | 7 | 5 | 9
2 | 12 | 14
14 | 26
40

d) V oboru přirozených čísel úloha nemá řešení, v oboru celých čísel je v šedém poli v prvním řádku číslo –5.
Úloha **a)** je celkem snadná, žák v každém okamžiku ví, co má dělat.

Úloha **d)** je náročná, je to úloha pro experty. Zřejmě se rozvine diskuse, jestli do trojúhelníku „pustíme" i záporná čísla. Učitel nechá rozhodnout žáky – je možné řešit úlohu pouze pro čísla přirozená i v oboru celých čísel. Metodou pokus omyl je cesta k řešení zdlouhavá, ale může přinést objevení souvislostí. Pokud žáci řeší postupně úlohy **a)**, **b)** i **c)**, případně, když vidí řešení vedle sebe, mohou odhalit zákonitost, že se čísla v šedém poli zmenšují o jednu a celkový součet se zmenšuje o čtyři. Z toho už pak mohou odvodit, že pro součet 124 musí v šedém poli být číslo –5. Učitel ale žákům nic nenapovídá, ani je nijak nenavádí. Žáci mohou jít úplně jinou cestou, kterou by nápověda zavřela. Úlohu **d)** budou řešit jen někteří žáci, v některé třídě ji nevyřeší nikdo. Může zůstat nevyřešená jako výzva.

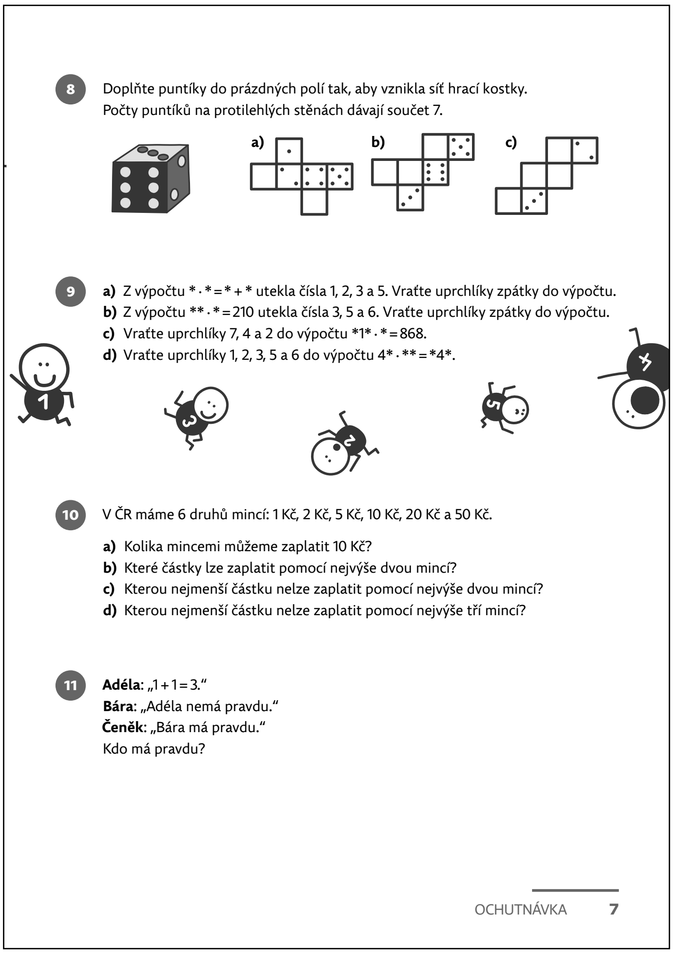
Desetinná čísla

S destinnými čísly se někteří žáci setkávají už na prvním stupni, jiní až v šestém ročníku. Pokud žáci desetinná čísla neznají, učitel vynechá tuto úlohu a zařadí ji později.

Řešení: **a)** 2; **b)** 0,03; **c)** 1,35; **d)** 0,09.

Sítě

Doporučujeme, aby učitel, pokud tomuto tématu nyní může věnovat trochu času, nejdříve nechal žáky samostatně vytvořit nějaké sítě krychle a zjistil, jaké zkušenosti z prvního stupně žáci již mají. Obvykle u těchto úloh není problém s porozuměním, ale s představivostí. Je důležité nechat žákům možnost, aby si síť vytvořili, vystřihli a pomocí opakovaného skládání a rozkládání sítě doplnili znaky na stěny. Tímto je řešení úloh dostupné každému žákovi. Jen někomu to bude trvat déle. Manipulaci sami odloží, až ji nebudou potřebovat. Z prvního stupně žáci budou pravděpodobně nazývat sítě krychle metaforicky jako oblek pro paní Krychli.


8 Doplňte puntíky do prázdných polí tak, aby vznikla síť hrací kostky.
Počty puntíků na protilehlých stěnách dávají součet 7.

a) b) c)

9 **a)** Z výpočtu * · * = * + * utekla čísla 1, 2, 3 a 5. Vraťte uprchlíky zpátky do výpočtu.
b) Z výpočtu ** · * = 210 utekla čísla 3, 5 a 6. Vraťte uprchlíky zpátky do výpočtu.
c) Vraťte uprchlíky 7, 4 a 2 do výpočtu *1* · * = 868.
d) Vraťte uprchlíky 1, 2, 3, 5 a 6 do výpočtu 4* · ** = *4*.

10 V ČR máme 6 druhů mincí: 1 Kč, 2 Kč, 5 Kč, 10 Kč, 20 Kč a 50 Kč.

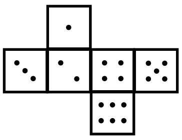
a) Kolika mincemi můžeme zaplatit 10 Kč?
b) Které částky lze zaplatit pomocí nejvýše dvou mincí?
c) Kterou nejmenší částku nelze zaplatit pomocí nejvýše dvou mincí?
d) Kterou nejmenší částku nelze zaplatit pomocí nejvýše tří mincí?

11 **Adéla**: „1 + 1 = 3."
Bára: „Adéla nemá pravdu."
Čeněk: „Bára má pravdu."
Kdo má pravdu?

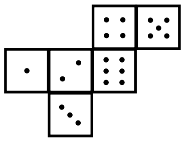
OCHUTNÁVKA 7

Řešení úlohy lze urychlit tím, že žáci si kostky nebudou vytvářet, ale dostanou je do ruky. Úloha je pro mnohé žáky velice těžká, pokud nemají možnost ji řešit manipulativně.

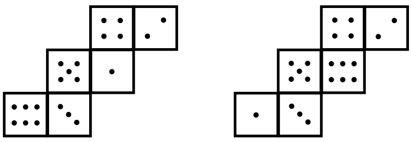
a)



b)



c) dvě řešení



Uprchlíci

Úloha **a)** pracuje s malými čísly a má dvě řešení $2 \cdot 3 = 1 + 5$; $5 \cdot 1 = 2 + 3$. Žáci mohou nalézt jen jedno řešení a hned přejít na další úlohu. Většinou se pak při sdílení výsledků ve skupině objeví obě řešení.
b) je snadná – stačí dosadit čísla v nabízeném pořadí $35 \cdot 6 = 210$. Odůvodněním řešení se zviditelní vazba mezi nulou na místě jednotek čísla 210 a součinem 56.
Úloha **c)** je náročnější, vyžaduje nalezení správného pořadí čísel. Výsledek: $217 \cdot 4 = 868$.
Úloha **d)** je nejtěžší a může se stát, že ji vyřeší jen někteří žáci. Výsledek: $42 \cdot 13 = 546$. Možnosti řešení: $4A \cdot BC = D4E$. Součin $A \cdot C = E$ (mod 10) je realizovatelný pouze pro trojici 2, 3, 6. Odtud $B = 1$, $D = 5$. Žáci mohou využít strategii pokus-omyl opřenou o představu, že číslo 4* lze násobit jen malým dvojciferným číslem, abychom dostali číslo pouze trojciferné (které navíc začíná nejvýše šestkou).

Mince

Prostředí Mince pracuje s číslem jako počtem i veličinou současně. Například sumu 7 Kč lze vytvořit ze dvou mincí 5 Kč + 2 Kč. Dvě mince (počet) tvoří sumu 7 Kč (veličina).
V úloze je důležité slovo „nejvýše“.

Řešení:
Sumu 1 Kč, 2 Kč, 5 Kč, 10 Kč a 20 Kč lze zaplatit jedinou mincí. Sumu 3 Kč, 4 Kč, 6 Kč, 7 Kč, 11 Kč, 12 Kč, 15 Kč, 21 Kč, 22 Kč, 25 Kč a 30 Kč lze zaplatit dvěma mincemi. Sumu 8 Kč, 9 Kč, 13 Kč, 14 Kč, 16 Kč, 17 Kč, 23 Kč, 24 Kč, 26 Kč, 27 Kč, 31 Kč, lze zaplatit třemi mincemi. Sumu 18 Kč, 19 Kč, 28 Kč, 29 Kč, 33 Kč, 34 Kč, 36 Kč a 37 Kč lze zaplatit čtyřmi mincemi. Tedy odpovědi jsou: **a)** 8 Kč, **b)** 18 Kč, **c)** 38 Kč.

Může se stát, že je úloha pro žáky moc náročná – jsou zde tři úskalí. Někteří žáci se poprvé setkávají s mincemi, obtížný pojem „nejvýše“ a ještě s tím společně zápor „nelze“. Pokud se žákům nedaří nalézt řešení, nebo nerozumí zadání, doporučujeme doplnit jednodušší úlohy:

Kterými mincemi můžete zaplatit sumu **a)** 2 Kč, **b)** 3 Kč, **c)** 4 Kč, atd? Hledejte různé možnosti. Podle reakcí a potřeb žáků pokračjeme dalšími částkami.

O řešení žáci diskutují. Ve chvíli, kdy žáci pochopí, jak lze mince kombinovat, přidáme další otázku: Lze částku **a)** 2 Kč, **b)** 3 Kč, **c)** 4 Kč zaplatit pomocí nejvýše dvou mincí? Dál se budeme ptát: Kterou částku (sumu) nelze zaplatit pomocí nejvýše dvou mincí? Nejvýše tří mincí? Podobně pokračujeme dále, až nakonec přijde otázka z učebnice.

Rozjezdy – zlomky

Kapitola **Rozjezdy** má dvě části: **zlomky** a **desetinná čísla**. Žáci, kteří se na prvním stupni s některou z těchto oblastí ještě nesetkali, zde mají možnost doplnit si své zkušenosti a vědomosti. Naopak žáci, kteří se s těmito oblastmi již setkali, si mohou své vědomosti prověřit. Těm žákům, pro které jsou úlohy z Rozjezdů příliš jednoduché, nabídneme nedořešené úlohy z kapitoly Ochutnávka nebo úlohy z kapitoly Když zbyde čas, kterou najdete na konci učebnice.

1 Předpokládáme, že si žák zatím nevytvořil správnou představu o zlomcích. Ze života určitě zná pojem poloviny a pravděpodobně i třetiny a čtvrtiny. Velký rozdíl je ale v tom, jestli si v obchodě žák polovinu chleba kupuje, nebo jestli chleba na poloviny sám krájí. Právě činnost půlení přispívá k výrazně hlubšímu porozumění pojmu poloviny než její samotný obraz. Tato vazba mezi manipulací a produktem hraje při pochopení zlomků klíčovou roli. Vidět (např. třetinu) je daleko méně než (ji) tvořit.

Tuto úlohu žák vyřeší jednoduchou manipulací s předmětem. Stává se, že žák příkazu „rozdělte na poloviny" rozumí ve smyslu „rozdělte na dvě části". Neuvědomí si ovšem, že tyto části musí být stejné. Podobně je tomu i u dalších zlomků. K problému spravedlivosti při dělení se vrátíme v úloze RD07 o dělení kruhu na třetiny.

2 Nestačí prověřit, zda žák rozumí znakům $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, je potřeba zjistit, zda žák umí vytvořit polovinu, třetinu a šestinu. Zda mu je jasné, že obě poloviny musí být stejně velké a všechny tři třetiny též stejně velké. Považujeme za rozumné (alespoň slabším) žákům dát k dispozici například 12 kostiček, aby dělení provedli manipulací.

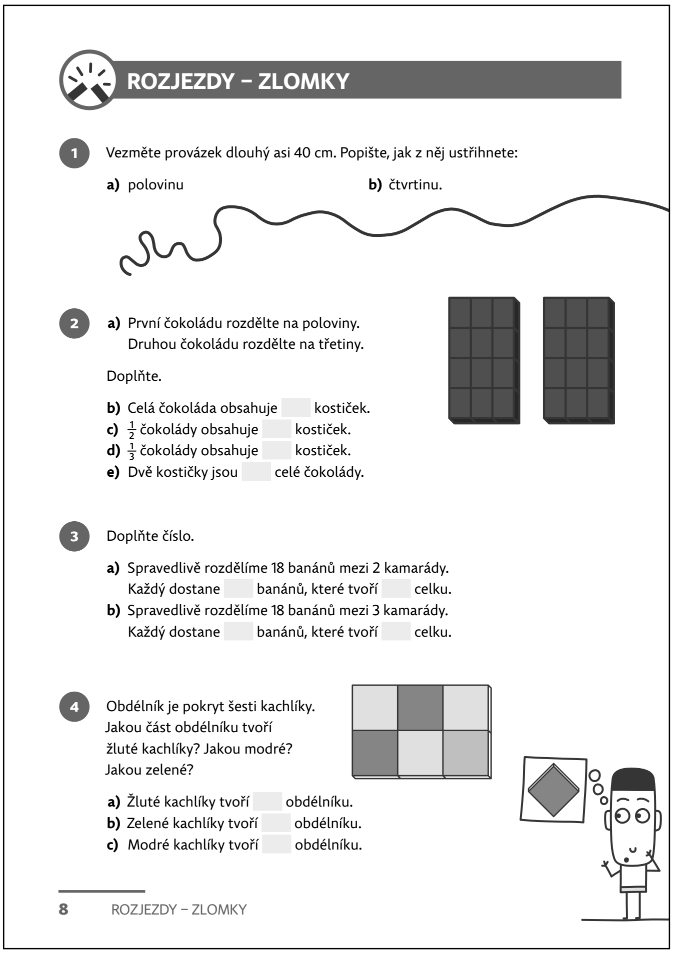
Důležité je, že objekt ☐☐ má zde dvě číselná jména: jsou to 2 kostičky (počet) a je to $\frac{1}{6}$ čokolády (část). Někteří žáci mají problém s porozuměním textu. Neví, zda mají uvést počet nebo část. Zde se gramotnost matematická prolíná s gramotností jazykovou.

3 V obou výrocích se ptáme jak na počet (banánů), tak na část ($\frac{1}{2}$ celku, resp. $\frac{1}{3}$ celku). Slovem „spravedlivě" zdůrazňujeme, že jednotlivé části, na které je celek dělen, jsou stejné. Žák sám píše znaky $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ a buduje zkušenost, že když celek dělím na n stejných částí, tak každý díl je $\frac{1}{n}$ (jedna n-tina) celku. Zde pro $n = 2$ (úloha **a**) a pro $n = 3$ (úloha **b**)

4 Slovo „část" v první větě říká, že odpověď bude dána zlomkem. Žák píše zlomky $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$. Tentokrát v kontextu délky nebo obsahu. Může se objevit i zlomek nekmenový. Jestliže v úloze a) vyplní některý žák „polovinu" a jiný „tři šestiny", ptáme se třídy, kdo má pravdu. Žáci dojdou k rozhodnutí, že obě odpovědi jsou správné, a ukáží, proč to tak je. Učitel to pak zapíše $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$. To je zde první setkání žáků se zlomkem nekmenovým. Stejná situace se objeví v úloze RD06.

5 Opakujeme situaci z úlohy 4. Klíčový rozklad celku na polovinu, třetinu a šestinu, tj. rovnost $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$, dáváme do různých kontextů. V tom pokračuje i následující úloha.

Výsledky: Modrých je polovina, červených je třetina, zelených je šestina.


ROZJEZDY – ZLOMKY

1 Vezměte provázek dlouhý asi 40 cm. Popište, jak z něj ustřihnete:

a) polovinu **b)** čtvrtinu.

2 **a)** První čokoládu rozdělte na poloviny.
Druhou čokoládu rozdělte na třetiny.

Doplňte.

b) Celá čokoláda obsahuje ☐ kostiček.
c) $\frac{1}{2}$ čokolády obsahuje ☐ kostiček.
d) $\frac{1}{3}$ čokolády obsahuje ☐ kostiček.
e) Dvě kostičky jsou ☐ celé čokolády.

3 Doplňte číslo.

a) Spravedlivě rozdělíme 18 banánů mezi 2 kamarády.
Každý dostane ☐ banánů, které tvoří ☐ celku.
b) Spravedlivě rozdělíme 18 banánů mezi 3 kamarády.
Každý dostane ☐ banánů, které tvoří ☐ celku.

4 Obdélník je pokryt šesti kachlíky. Jakou část obdélníku tvoří žluté kachlíky? Jakou modré? Jakou zelené?

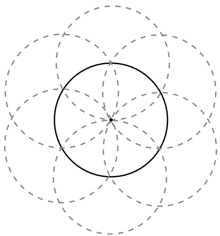
a) Žluté kachlíky tvoří ☐ obdélníku.
b) Zelené kachlíky tvoří ☐ obdélníku.
c) Modré kachlíky tvoří ☐ obdélníku.

8 ROZJEZDY – ZLOMKY

6 Objevuje se i zlomek nekmenový. Učitel může přidat otázku: „Jaká část čtverce je zabarvena?“ Odpovědí je nekmenový zlomek $\frac{3}{4}$.

Výsledky: Na žluto je zabarvena polovina, na modro čtvrtina.

7 Prezentujeme dvě dosti časté chyby, kterých se žáci dopouští. Dělení Ralfa je evidentně chybné, protože není spravedlivé. Řešení Olafa je pro diskuzi s dětmi náročnější. Prostřední část je větší a je možné, že někdo k přijde s tím, že použije osovou souměrnost k důkazu, že krajní kruhová úseč se vejde do prostředního pásu. Žák, který doporučí zúžit prostřední pás, má sice dobrou myšlenku, ale přesněji nebude schopen ji zformulovat. Hlavní argument proti tomuto dělení zní: Jak se přesvědčím, že ten (zúžený) prostřední a krajní kus jsou stejně velké? Když podobným způsobem napadneme řešení Irmy, může některý žák ukázat konstrukci pravidelného šestiúhelníku. V případě, že k tomu nedojde, učitel nechá žáky narýsovat „kytičku“ sedmi kružnic, pomocí které je pravidelný šestiúhelník již patrný.



Je možné tento obrazec podepřít úlohou: Z dvanácti dřívek sestrojte 6 rovnostranných trojúhelníků.

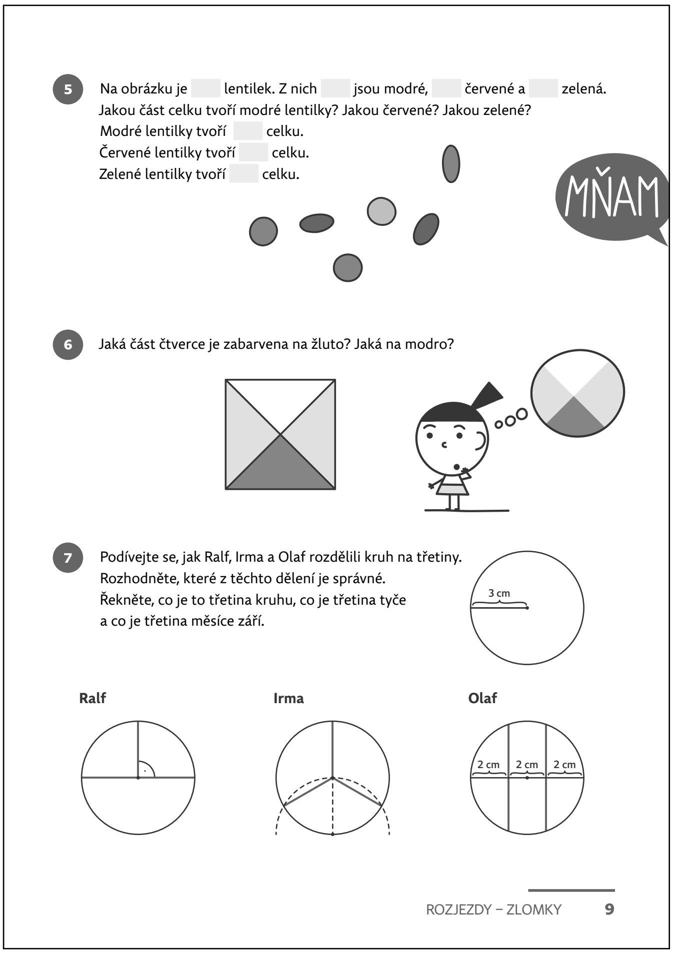
Výsledky: Dělení Irmy je správné. Třetina kruhu je třetinou jeho obsahu, třetina tyče je třetinou její délky, třetina září je 10 dní.

8 V prostředí, které je žákovi dobře známé, opakujeme zlomky $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ a zavádíme zlomek $\frac{1}{5}$. Pro některé žáky je důležité uvědomit si, že běžné slovo „půlhodina“ je totéž jako naše polovina hodiny nebo zápis $\frac{1}{2}$ hod.

Výsledky: **a)** 60, **b)** $\frac{1}{2}$, **c)** $\frac{1}{4}$, **d)** 20, **e)** 10, **f)** 12.

9 Přesné rýsování je přidaná hodnota této didaktické úlohy. Žákovi, který zde má problémy, doporučíme rozdělit úsečku *AB* na 6 stejných částí, tj. vyznačit si na úsečce body, jejichž vzdálenost od bodu *A* je postupně 12 mm, 24 mm, 36 mm, 48 mm a 60 mm. Žák si označí druhý z bodů jako *C* a pátý jako *D*. Tím je úsečka *AB* rozdělena na šestiny a úloha je pak v podstatě převedena na úlohu 4. V případě nejasností je dobré vzít opravdu provázek, nechat žáky ustřihnout 72 mm a body *C*, *D* na něm hledat.

Výsledky: **a)** $\frac{1}{3}$, **b)** $\frac{1}{2}$, **c)** $\frac{1}{6}$, **d)** $\frac{1}{4}$.

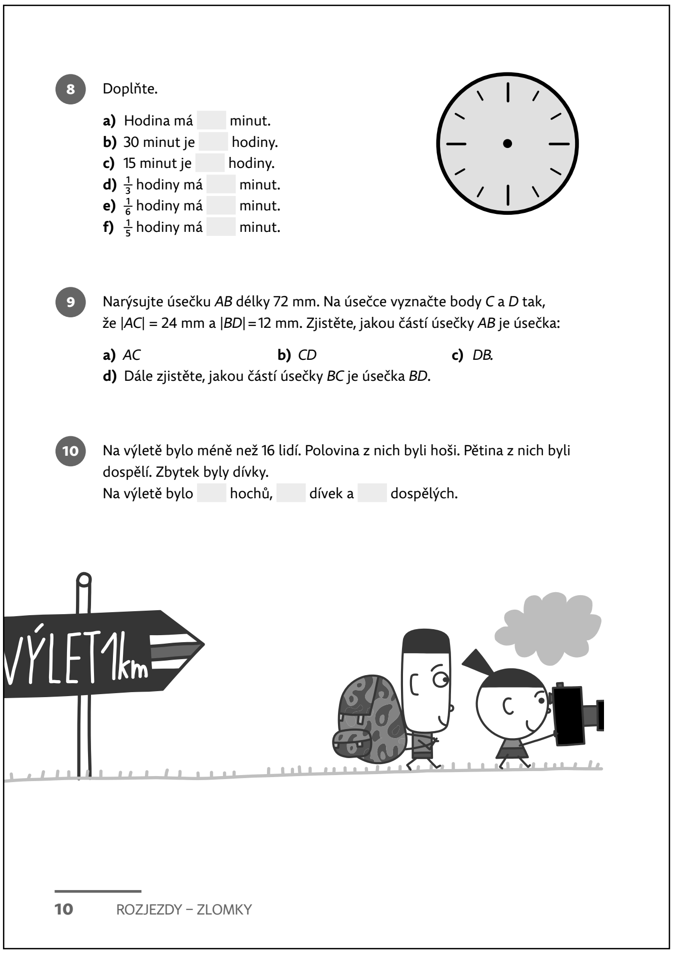


5 Na obrázku je lentilek. Z nich jsou modré, červené a zelená.
Jakou část celku tvoří modré lentilky? Jakou červené? Jakou zelené?
Modré lentilky tvoří celku.
Červené lentilky tvoří celku.
Zelené lentilky tvoří celku.

6 Jaká část čtverce je zabarvena na žluto? Jaká na modro?

7 Podívejte se, jak Ralf, Irma a Olaf rozdělili kruh na třetiny.
Rozhodněte, které z těchto dělení je správné.
Řekněte, co je to třetina kruhu, co je třetina tyče
a co je třetina měsíce září.

ROZJEZDY – ZLOMKY 9



8 Doplňte.

a) Hodina má minut.
b) 30 minut je hodiny.
c) 15 minut je hodiny.
d) $\frac{1}{3}$ hodiny má minut.
e) $\frac{1}{6}$ hodiny má minut.
f) $\frac{1}{5}$ hodiny má minut.

9 Narýsujte úsečku *AB* délky 72 mm. Na úsečce vyznačte body *C* a *D* tak, že $|AC| = 24$ mm a $|BD| = 12$ mm. Zjistěte, jakou částí úsečky *AB* je úsečka:

a) *AC* b) *CD* c) *DB*.
d) Dále zjistěte, jakou částí úsečky *BC* je úsečka *BD*.

10 Na výletě bylo méně než 16 lidí. Polovina z nich byli hoši. Pětina z nich byli dospělí. Zbytek byly dívky.
Na výletě bylo hochů, dívek a dospělých.

10 ROZJEZDY – ZLOMKY

10 První náročnější úloha. Žáci si uvědomí, že počet výletníků nemůže být 15, protože pak by hochů bylo 7 a půl, což je nemožné. Výletníků nemůže být ani 14, protože pak by počet dospělých nebyl celé číslo. Tedy počet výletníků je číslo, které je dělitelné číslem 2 i číslem 5. Z toho plyne, že výletníků bylo 10.

Výsledky: 5 hochů, 3 dívky a 2 dospělí.

11 Žák si nenatřenou část tyče rozdělí na poloviny. Vidí, že tyč je rozdělena na tři stejné části a každá je dlouhá 30 cm. Tedy jedna třetina je 30 cm, a tedy celá tyč je dlouhá 90 cm. Pro některé žáky může být vhodné ukázat zelenou třetinu tyče na zlomkové zdi.

Výsledky: 90 cm.

12 Náročnost úlohy je dána tím, že celek, z něhož bereme část, je překvapivě pouze 45 minut, nikoli celá hodina. Pro mnohé žáky to je překvapení. 15 minut, tj. čtvrthodina, je tedy třetina vyučovací hodiny. Závislost zlomku na celku je klíčový didaktický problém.

Žákům k řešení pomůže ciferník hodin. Na něm si ukáží výseč 15 minut a vidí, že tato výseč se do vybarvených 45 minut vejde třikrát. Podobně i další úlohy. Jmenovatel zlomků narůstá. Úloha **f)** je náročná (úroveň [3]).

Výsledky: **a)** $\frac{1}{3}$, **b)** $\frac{1}{9}$, **c)** $\frac{1}{5}$, **d)** $\frac{1}{15}$, **e)** $\frac{1}{45}$, **f)** $\frac{1}{90}$.

Následujících 7 úloh dává žákům zkušenosti se zlomky nekmenovými.

13 Úloha je podobná úloze RD04. Liší se prostředím a uspořádáním částí. Tři výseče náležející Zuzce jsou přerušeny částí, která náleží Davidovi. Je možné očekávat odpovědi: Zuzka má $\frac{1}{2}$ nebo $\frac{1}{6}$ a $\frac{1}{3}$ nebo $\frac{3}{6}$ nebo též $\frac{1}{6}$ a $\frac{2}{6}$. Když k tomu dojde, je vhodné vyvolat diskuzi. Žáci sami vysvětlí, v čem se výpovědi liší, které jsou správně (všechny) a že ta první je „nejlepší". Při diskuzi může dojít k vyjasnění toho, že $\frac{3}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$. Ve slovní formulaci je tento vztah ještě přirozenější „tři šestiny jsou šestina a šestina a šestina". Stejně tak je pro dítě přirozené, že „tři jablka jsou jablko a jablko a jablko".

Výsledky: Martinovi náleží 2 kousky, což je $\frac{1}{3}$, Zuzce 3 kousky, což je $\frac{1}{2}$ a Davidovi 1 kousek, což je $\frac{1}{6}$.

14 První dvě úlohy vedou k odhalení rovností $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ a $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Druhé dvě úlohy uvádí na scénu zlomky $\frac{2}{5}$ a $\frac{3}{5}$.

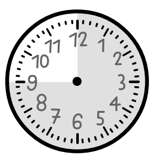
Výsledky: **a)** $\frac{2}{3}$, **b)** $\frac{1}{3}$, **c)** $\frac{3}{5}$, **d)** $\frac{2}{5}$.

---

11 Třetina tyče je natřena na zeleno, zbylých 60 cm na bílo. Jak dlouhá je tyč?

12 Vyučovací hodina trvá 45 minut.
Zjistěte, jakou část vyučovací hodiny tvoří:

a) 15 minut
b) 5 minut
c) 9 minut
d) 3 minuty
e) 1 minuta
f) 30 sekund.



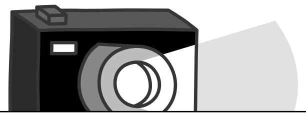
13 Pizza na obrázku je rozdělená na 6 stejných kousků.
Kolik kousků si vzal Martin (M)?
Kolik Zuzka (Z)?
Kolik David (D)?
Jakou část pizzy si vzal Martin?
Jakou Zuzka?
Jakou David?

14 Na výletě bylo 6 spolužáků: Aleš, Boris, Cyril, Dana, Eva a Filip.

a) Jaká část z nich byli hoši?
b) Jaká část z nich byly dívky?

Filip svých 5 spolužáků vyfotil.

c) Jakou část žáků na fotce tvoří hoši?
d) Jakou část žáků na fotce tvoří dívky?



15 Pomocí tabulky porovnejte zlomky $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{12}$.

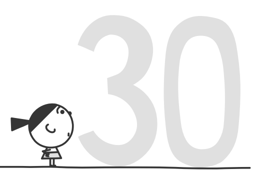
$\frac{1}{1}$						
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$				
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$			
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$		
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	
$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$

16 **a)** Kolik dnů v týdnu je pracovních? Jaká je to část týdne?
b) Kolik z 12 měsíců roku má v názvu písmeno „e"?
Jakou část roku tyto měsíce tvoří?

17 Ve třídě máme 21 žáků. Třetina z nich nosí brýle, $\frac{2}{3}$ dojíždí do školy autobusem, $\frac{1}{7}$ navštěvuje matematický kroužek a $\frac{4}{7}$ jsou chlapci.
Zjistěte, kolik žáků naší třídy:

a) nosí brýle
b) dojíždí do školy autobusem
c) navštěvuje matematický kroužek
d) jsou chlapci.

18 Kolik přirozených čísel je větších než 20 a současně menších než 30?
Jaká část z této množiny čísel je sudých a jaká část lichých?



15 Může nastat diskuze žáků o tom, zda $\frac{3}{6}$ (ukáže na tři dílky v řádku šestin) jsou totéž jako $\frac{1}{2}$ (ukáže jeden dílek v řádku polovin). V takovém případě se učitel zeptá, zda je více $\frac{1}{2}$, nebo $\frac{3}{6}$.

V úloze se objevuje i $\frac{1}{12}$, kterou nelze najít na zlomkové zdi. Žáci zjistí, že $\frac{1}{12}$ je ze všech zlomků nejmenší, protože je ještě menší než $\frac{1}{7}$, což je nejmenší nakreslený dílek zlomkové zdi. Někteří žáci přijdou na to, že $\frac{1}{12}$ je polovina $\frac{1}{6}$.

Výsledky: $\frac{3}{5} > \frac{1}{2} = \frac{3}{6} > \frac{2}{5} > \frac{1}{3} > \frac{2}{7} > \frac{1}{12}$.

16 Vyskytují se další nekmenové zlomky.

Výsledky: **a)** 5 dnů, tedy $\frac{5}{7}$ týdne; **b)** 9 měsíců, tedy $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ roku.

Žáci mají možnost zlomek krátit na $\frac{3}{4}$. Lze očekávat, že některý žák uvedený výsledek zpochybní poukázáním na to, že se zde jedná o část roku a tu nutno počítat na dny. V takovém případě je hledaný zlomek $\frac{277}{365}$ a u přestupného je to $\frac{277}{366}$.

17 Známe celek a část, která je vyjádřena zlomkem. Hledáme, jaký je to počet. V případě nekmenového zlomku $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$ je možné žákovi ukázat na nějakém modelu (např. zlomkové zdi), z kolika kmenových zlomků (třetin nebo sedmin) se skládá. Tato modelace je vhodná, pokud žáci přijímají bez porozumění postup spolužáka: „vyděl třemi a vynásob dvěma". To se u těchto úloh může stát.

Výsledky: **a)** 7, **b)** 14, **c)** 3, **d)** 12.

18 V úloze se objevují slova množina, sudé číslo a liché číslo. Jde o to zjistit, zda všichni žáci těmto slovům rozumí. V případě potřeby učitel vyzve žáky, aby tato slova vysvětlili spolužákům, kteří zde nemají jasno. Slovo množina lze nahradit slovem soubor.

Výsledky: Těchto čísel je 9 a z nich je $\frac{5}{9}$ lichých a $\frac{4}{9}$ sudých.

Rozjezdy – desetinná čísla

1 Diskuze umožní učiteli zjistit, jaké představy o desetinných číslech mají jednotliví žáci a jak rozumí vztahům 1 m = 10 dm = 100 cm, 1 mm = 0,1 cm, případně i vztahům 1 kg = 1 000 g a 1 l = 10 dl.

Je velice pravděpodobné, že žáci budou číslo 15,3 číst zkráceně „patnáct celých tři“. Je důležité, aby učitel sám mluvil přesně, tj. „patnáct celých tři desetiny“.
Ke každému výroku je možné dát doplňující otázky. Například k **a)** „Jaká bude teplota, když se venku ochladí o půl stupně?“, k **b)** „Jak dlouhá je polovina této tyče?“, ..., k **h)** „Kolik sklenic (2 dl) jsem vypil, než jsem vypil celý litr?“ apod.

2 Cílem úlohy je zlepšit představu žáků o délce 1 metr a vztahu 1,5 metru. Tato činnost žáky baví, protože vnímají její smysluplnost. K podobným úlohám je nutné se vracet vždy, když se u některého žáka projeví výrazné neporozumění délkám.

Tuto úlohu jsme kdysi dali žákům šestého ročníku na výletě. Jedna skupina využila toho, že měla žáka, jehož výška byla přesně 140 cm. Ostatní skupiny, když viděly spolužáka ležícího na zemi, použily stejnou metodiku měření. Emotivní angažovanost dětí výrazně přispěla k jejich porozumění délkovým mírám. Na jiném výletě odhadovali žáci čas. Na stopkách držených za zády měli zmáčknout přesně 10 s. Zjistili, že pomocí rytmické chůze je tuto úlohu možné zvládnout s velkou přesností. Žák, jehož 14 kroků odpovídalo přesně 10 vteřinám, dostal úkol odhadnout 15 s. Úloha tohoto typu je propedeutikou trojčlenky.

3 S velikou pravděpodobností někteří žáci řeknou, že délky jsou stejné a zdůvodní, že je to 1 dm (nebo 10 cm). Doporučujeme, aby zejména slabší žáci měli možnost s délkou 1 dm manipulovat (velmi dobrý je např. krejčovský metr). Je možné to propojit s předchozí úlohou a zjistit, kolikrát se 1 dm vejde do jejich metru vytvořeného na zemi. Pro některé žáky může být těžší vidět u veličin spojitost mezi „vejde se desetkrát“ a „to je jedna desetina“. Rovnost 0,1 m = $\frac{1}{10}$ m napsaná žákem na tabuli je klíčová pro porozumění vztahu mezi dekadickými zlomky a desetinnými čísly. Je rozumné stejný vztah, který je zde pro metry, diskutovat pro dm, cm, l, kg apod. Určitě nestačí jediná zkušenost k tomu, aby všichni žáci už vztahu mezi dekadickými zlomky a desetinnými čísly rozuměli.

4 Předpokládáme, že otázka **a)** nebude dělat problémy. Ty se objeví až u dalších dvou otázek. U otázky **b)** lze očekávat odpověď „$\frac{1}{10}$“. V takovém případě se učitel může zeptat: „Jedna desetina cihličky?“. Tím otevře diskuzi o tom, zda jednotkou v těchto úvahách je „milion korun“. Navíc slovo „korun“ v otázkách neuvádíme, protože to považujeme za zbytečné ztížení textu. Z diskuze vyplyne, že 0,1 milionu = $\frac{1}{10}$ milionu. Úloha připravuje žáky k řešení následující úlohy.

Výsledky: **a)** 100 000, **b)** $\frac{1}{10}$, **c)** 0,1.

5 Cílem úlohy je znakové a jazykové propojení zlomků (především dekadických) a desetinných čísel. Lze očekávat, že se při vyplňování některých okének budou názory lišit. Například $\square = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ a podle toho se bude lišit i pojmenování. Nejspíše dojde k rozrůznění

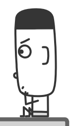
1,2 **ROZJEZDY – DESETINNÁ ČÍSLA**

1 Jinými slovy nebo obrázkem vysvětlete, co věty znamenají.

a) Teplota vzduchu je 15,3 °C.
b) Tyč je dlouhá 1,7 m.
c) Rohlík stojí 3,90 Kč.
d) Vážím 37,9 kg.
e) Denně vypijeme asi 2,5 litru vody.
f) Sto metrů zaběhl za 10,32 s.
g) Berlín má 3,4 milionu obyvatel.
h) Z litrové lahve kofoly jsem upil 2 dcl.

2 Odhadněte šířku okna ve třídě. Pak šířku změřte. Dále se rozdělte do skupin. Každá skupina pouze odhadem (bez měřítka) vyznačí na podlaze délku 1 m a délku 1,5 m. Nakonec měřením zjistíte, které skupině se to povedlo nejlépe.

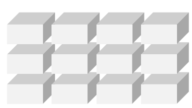
3 Je více 0,1 m nebo $\frac{1}{10}$ m?



Čísla, se kterými jsme se potkali v předchozích úlohách, se nazývají **desetinná**. Číslo 1,7 m čteme *jedna celá sedm desetin metru*. Někdy se stručně říká *jedna celá sedm metru*. To ale někdy může vést k nedorozumění. Považujeme za rozumné číst ze začátku desetinná čísla předpisově, protože to pomůže lepšímu porozumění.

4 Na obrázku je 12 stejných zlatých cihliček, které představují hodnotu 1,2 milionu Kč.

a) Kolik Kč představuje jedna cihlička?
b) Jaká část (zapište zlomkem) milionu je jedna cihlička?
c) Jaká část (zapište desetinným číslem) milionu je jedna cihlička?



ROZJEZDY – DESETINNÁ ČÍSLA 13

Zapište, jaká je to část milionu.	obrázek	|	||	□	□||	□□	□□|||
	slovem	jedna desetina	dvě desetiny	pět desetin	sedm desetin	deset desetin	třináct desetin
	zlomkem	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{10}{10}$	$\frac{13}{10}$
	desetinným číslem	0,1	0,2	0,5	0,7	1,0	1,3

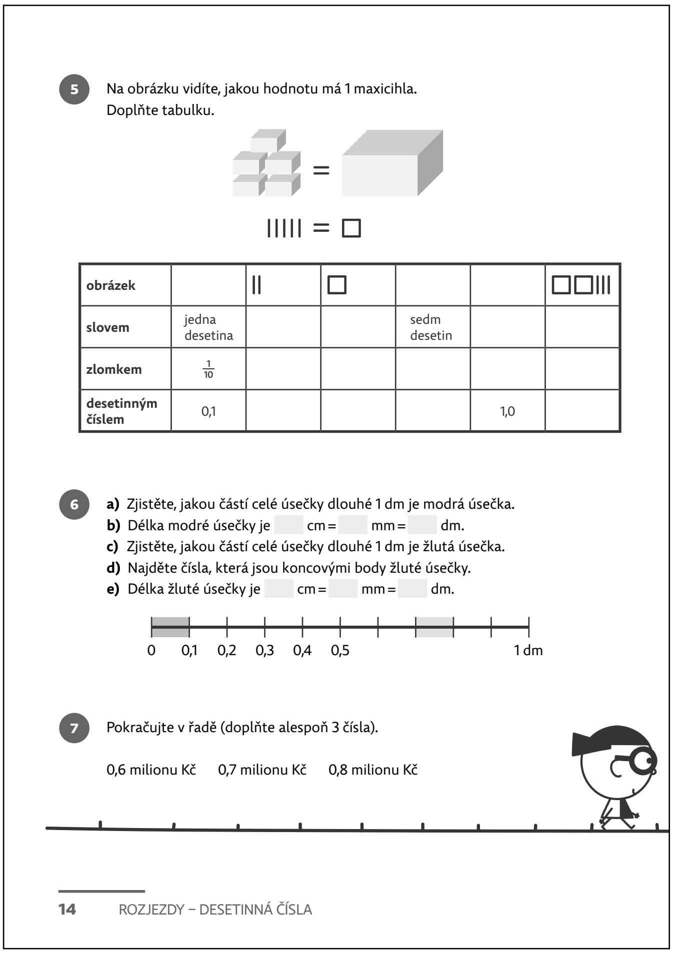
Tabulka č. 1

názoru ve sloupci □□ = $\frac{10}{10}$ = 1. Následná diskuze mezi žáky výrazně pomáhá upozornit na důležitost vztahů prezentovaných tabulkou a žáci se k těmto vztahům vrací u jiných příležitostí i ve svém běžném životě.

Výsledky v tabulce č. 1.

Je možné k tabulce přikreslit i „číselnou osu" a na ní znázorňovat jednotlivé obnosy.

6 Cílem této úlohy je dát sémantické propojení desetinných čísel a délkových jednotek. Žáci si mohou do obrázku dopsat popisky všech rysek od 0,6 do 0,9. Udělají-li tak, mají vyřešenu úlohu **d)**.


5 Na obrázku vidíte, jakou hodnotu má 1 maxicihla.
Doplňte tabulku.

||||| = □

obrázek		||	□			□□|||
slovem	jedna desetina			sedm desetin		
zlomkem	$\frac{1}{10}$					
desetinným číslem	0,1				1,0	

6 **a)** Zjistěte, jakou částí celé úsečky dlouhé 1 dm je modrá úsečka.
b) Délka modré úsečky je ___ cm = ___ mm = ___ dm.
c) Zjistěte, jakou částí celé úsečky dlouhé 1 dm je žlutá úsečka.
d) Najděte čísla, která jsou koncovými body žluté úsečky.
e) Délka žluté úsečky je ___ cm = ___ mm = ___ dm.

0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 1 dm

7 Pokračujte v řadě (doplňte alespoň 3 čísla).

0,6 milionu Kč 0,7 milionu Kč 0,8 milionu Kč

14 ROZJEZDY – DESETINNÁ ČÍSLA

V úloze **a)** je pořadí cm, mm, dm voleno záměrně tak, aby žák musel uvažovat u každého čísla zvlášť a nevedlo jej to jen k formálnímu řešení (připisování nul nebo posouvání čárky). Úloha **c)** poukazuje na odlišnost adresy koncových bodů úsečky a délky úsečky. Modrá i žlutá úsečka jsou stejně dlouhé (1 cm), ale koncové body jsou různé.

Výsledky: **a)** $\frac{1}{10}$, **b)** 1 cm = 10 mm = 0,1 dm, **c)** $\frac{1}{10}$, **d)** 0,7 a 0,8, **e)** 1 cm = 10 mm = 0,1 dm.

Poznámka: Bohužel při sazbě učebnice došlo k nepřesnosti a úsečka nemá přesně 1 dm (modrá úsečka nemá přesně 1 cm). To může být pro některé žáky matoucí. Doporučujeme na nepřesnost předem upozornit a žáky, pro které je nepřesnost matoucí, nechat úsečku délky 1 dm přerýsovat do sešitu.

7 Cílem úlohy je předcházet dosti časté chybě vnímání desetinných čísel jako „svět před desetinnou čárkou" a „svět za desetinnou čárkou". U takového vnímání žáci v posloupnosti čísel 0,7; 0,8; 0,9 pokračují číslem 0,10; 0,11 atd. Ukotvení této řady čísel v kontextu financí pomůže žákům propojit oba uvedené „světy" a správně uvést, že po čísle 0,9 následuje 1 (nebo 1,0).

Výsledky: 0,9 milionu Kč, 1,0 milionu Kč, 1,1 milionu Kč. Následující úloha sleduje stejný cíl.

8 Do kontextu financí je vložena úloha o narůstající řadě čísel. (Správně bychom měli mluvit o posloupnosti, nikoliv o řadě. Nicméně považujeme slovo řada za srozumitelnější pro žáky.)

Výsledky:

měsíc	květen	červen	červenec	srpen	září	říjen
stav konta [v milionech Kč]	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3	2,5

K tabulce učitel může dát další otázky, například: Jaký bude stav konta o Vánocích, nebo za jak dlouho přibude milion Kč?

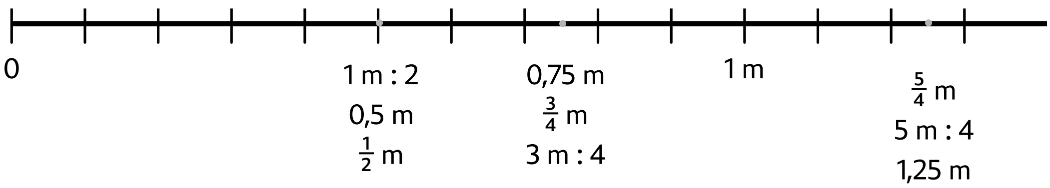
9 Většina žáků již má s eury jisté zkušenosti. Přesto téma diskutujeme a někteří žáci řeknou své osobní zkušenosti. Může vzniknout debata, proč na jídelníčku zbytečně píší nulu v cenách. Není nutno psát 1,50, stačí 1,5. Žáci již sčítají desetinná čísla pouze na základě sémantiky.

Výsledky: **a)** 7 €, **b)** 5,2 €, **c)** 4,5 €, **d)** 1,3 €.

10 Žákům, kteří mají problémy s rovností typu $\frac{1}{2} = 0{,}5$, může učitel zadat úlohy typu:

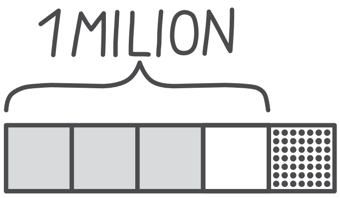
Co je víc 0,5 m, nebo 50 cm, nebo $\frac{1}{2}$ m? Co je víc 0,5 l nebo nebo $\frac{1}{2}$ l? Co je víc 0,5 kg nebo nebo $\frac{1}{2}$ kg? Taková úloha ukazuje, že stejnou délku můžeme vyjádřit jak desetinným číslem, tak zlomkem. Totéž u objemu a hmotnosti. Z těchto případů většina žáků již vidí, že $0{,}5 = \frac{1}{2}$ bez ohledu na to, k jaké jednotce se rovnost vztahuje.

Výsledky na ose níže.



Úlohu doporučujeme řešit s provázkem nebo krejčovským metrem (alespoň pro slabší žáky).

11 Úloha je záměrně numericky stejná jako předchozí. Jiné je pouze sémantické kotvení (místo metrů jsou zde miliony). Žáci, kteří poukáží na stejnost obou úloh, prokazují vhled do racionálních čísel a dostanou prostor k osvětlení svého pohledu spolužákům. Cílem úlohy je vést žáky ke komplexní představě racionálního čísla. Představa obsahuje 4 objekty vázané šesticí rovností.



0,75
3 : 4
$\frac{3}{4}$

8 Pokladník charitativní společnosti si v červenci udělal tabulku, aby viděl, kolik peněz přibývá na konto každý měsíc. Řekl si: „Věřím, že to půjde tak dál," a dopsal do tabulky další tři čísla. Jaká?

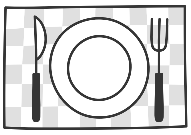
měsíc	květen	červen	červenec	srpen	září	říjen
stav konta [v milionech Kč]	1,5	1,7	1,9			

9 Byli jsme na výletě v Bratislavě. Na Slovensku se platí eury. 1 euro = 100 centů. V restauraci, kam jsme zašli na oběd, byla následující nabídka.

0,40 l	Domáca slepačia polievka so zeleninou, rezance	1,50 €
0,40 l	Zeleninová jarná polievka s krupicovými haluškami	1,90 €
150 g	Telací rezeň „Richard", majonézový šalát	5,50 €
200 g	Zapečené rybie filé so šampiňónmi a syrom	3,30 €
150 g	Kuracie soté v zemiakovej placke, syr	4,50 €
250 g	Špagety s nivovou omáčkou, paradajka	3,50 €

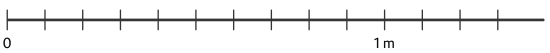
Táta si dal slepičí polévku a řízek „Richard", máma jarní polévku a rybí filé a já si dala kuřecí soté. Bylo moc dobré. Táta dal vrchnímu 20 € a ten mu vrátil 2 €.

a) Kolik utratil za oběd táta?
b) Kolik utratila máma?
c) Kolik jsem utratila já?
d) Jaké dýško dal táta číšníkovi?



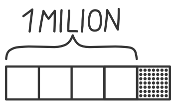
10 Od nejmenšího k největšímu uspořádejte 9 délek. Zakreslete je do obrázku číselné osy.

1 m : 2 $\quad$ $\frac{3}{4}$ m $\quad$ 5 m : 4 $\quad$ $\frac{5}{4}$ m $\quad$ 3 m : 4
0,5 m $\quad$ 0,75 m $\quad$ 1,25 m $\quad$ $\frac{1}{2}$ m



11 Zjistěte, které obnosy jsou stejné.

$\frac{3}{4}$ milionu	5 milionů : 4	3 miliony : 4
0,5 milionu	1,25 milionu	$\frac{5}{4}$ milionu
3 000 000 : 4	0,75 milionu	$\frac{1}{2}$ milionu



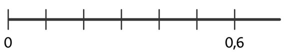
12 Pomocí kalkulačky porovnejte čísla:

a) $\frac{2}{5}$ a 2,5 $\quad$ **b)** $\frac{3}{2}$ a 1,5 $\quad$ **c)** $\frac{1}{5}$ a 0,5.

13 Pomocí kalkulačky uspořádejte čísla od nejmenšího k největšímu.

0,3 $\quad$ $\frac{2}{5}$ $\quad$ 0,5 $\quad$ $\frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{1}{4}$

Nakreslete čísla na číselnou osu.



14 **a)** Odhadněte a desetinným číslem zapište čísla $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{11}{10}$ a $\frac{3}{2}$.
b) Odhady prověřte na kalkulačce.

15 Pomocí kalkulačky napište každé z následujících desetinných čísel ve tvaru zlomku.

0,3 $\quad$ 0,8 $\quad$ 0,1 $\quad$ 1,5 $\quad$ 1,2

Další podobná skupina čísel (5 : 4; 1,25; $\frac{5}{4}$) přesahuje číslo 1. Všechna čísla jsou v „polosémantickém“ kontextu. Není přímo zmíněno, že se jedná o miliony korun, ale slovo „obnos“ tomu napovídá.

Výsledky: $\frac{3}{4}$ milionu = 3 000 000 : 4 = 3 miliony : 4 = 0,75 milionu, 0,5 milionu = $\frac{1}{2}$ milionu, 5 milionů : 4 = 1,25 milionu = $\frac{5}{4}$milionu.

12 Doposud jsme pracovali bez kalkulaček (i když jsme je žákům nezakazovali). Teď naopak chceme, aby žáci při práci s racionálními čísly rozumně kalkulačky používali. Na základě předchozích úloh o metrech a milionech je pravděpodobné, že žáci budou nacházet čísla jako $\frac{2}{5}$ dělením 2 : 5.

V úloze **a)** je dvojice čísel, která dosti často žáci považují za stejná. Je možné se ptát na rozdíl čísel.

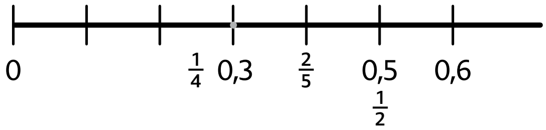
Poznámka: V učebnici nepoužíváme archaický výraz kalkulátor.

Výsledky: **a)** $\frac{2}{5}$ < 2,5, **b)** $\frac{3}{2}$ =1 ,5, **c)** $\frac{1}{5}$ < 0,5.

13 Může se stát, že číslo $\frac{1}{2}$ bude žák interpretovat „polovina z úsečky od 0 do 0,6“ a zapíše ji k rysce 0,3. Tím vznikne nepravdivý vztah 0,3 = $\frac{1}{2}$. I když žák kalkulačkou zjistí, že to tak není, je rozumné ptát se ho na příčinu té chyby. Následná diskuze třídy objasní dvojí chápání zlomků. V tomto případě tedy zlomek $\frac{1}{2}$ byl nejprve chápán jako „polovina z něčeho“ a až pak jako racionální číslo, jehož pozice na číselné ose je totožná s pozicí 0,5.

Číslo 14 se zde poprvé objevuje bez sémantického kotvení.

Výsledky:



14 Úloha b) je velice lehká a jejím cílem je připravit úlohu následující, kterou nelze vyřešit pouhým mačkáním tlačítek kalkulačky. Na základě úloh o metrech a milionech by žáci měli dojít k tomu, že zlomek na kalkulačce najdou pomocí dělení.

Výsledky: $\frac{1}{2}$= 0,5; $\frac{7}{10}$ = 0,7; 15 = 0,2 ; $\frac{11}{10}$ = 1,1; $\frac{3}{2}$ = 1,5.

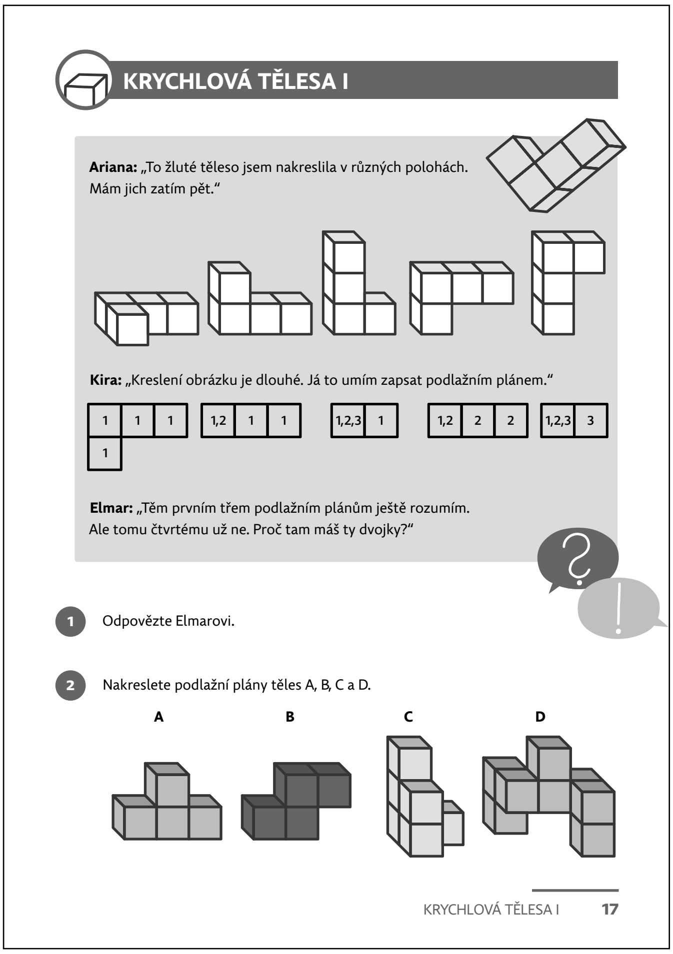
15 Zkušenosti z předchozí úlohy využije žák k řešení této úlohy. Bude hledat taková dvě čísla, jejichž podíl je např. 0,8. Učitel má možnost vyzvat žáky, aby se zlomky snažili napsat pomocí co nejmenších čísel (např. $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$).

Výsledky: 0,3 = $\frac{3}{10}$; 0,8 = $\frac{4}{5}$; 0,1 = $\frac{1}{10}$; 1,5 = $\frac{3}{2}$; 1,2 = $\frac{6}{5}$.

Krychlová tělesa

Komentář k úvodnímu rozhovoru: Očekáváme, že žáci budou schopni vysvětlit symboliku podlažních plánů i slabším spolužákům. V případě potřeby může učitel říct: „Těmto obrázkům se říká *podlažní plány*. Těleso stojí na nějaké podložce a čísla říkají, ve kterém *podlaží* je umístěna krychle. Prvním podlažím se začíná, tedy vždycky v tom plánu bude aspoň jedna jednička.“

2 Úloha je gradována a stačí, když každý žák načrtne podlažní plán jednoho nebo více těles podle svého uvážení. Práce s tělesem D je bez modelu velmi náročná. Je důležité, aby si žáci krychlová tělesa mohli vymodelovat, nejlépe nějakou krychlovou stavebnicí, ve které lze krychle spojovat. Je možné kostky spojovat i gumičkou. Když žáci náhodou nemají k dispozici krychle a učitel dopředu ví, že je budou potřebovat, může si je se žáky v rámci jiných předmětů poskládat z papíru. Návod na skládání krychle ze 6 dílů, která je poměrně pevná, je uveden v učebnici Hejný a kol. pro 4. roč. na str. 70. Lze jej také najít v knihách o origami nebo dohledat na internetu jako Sonobova kostka nebo krychle. Jestliže nějaký žák zvládne převést těleso z jedné 2D reprezentace (portrét) do jiné 2D reprezentace (podlažní plán), a to ještě v jiné poloze, aniž by použil fyzický model, má dobře rozvinutou prostorovou představivost. V žádném případě ale nebudeme na žáky vyvíjet tlak, aby úlohy řešili bez modelu, i když tam směřujeme. Někteří žáci budou modely potřebovat déle a je důležité jim je nechat. Tím, jak kdo pracuje s modely, učitel dostává poměrně rychlou informaci o schopnosti jednotlivých žáků pracovat v představě.



Výsledky: Podle uvážení lze vybrat jedno i více těles. Úloha může vést k diskuzi o stejnosti a různosti poloh. Žáci se mohou domluvit na čemkoliv. V budoucnu budeme směřovat k tomu, že dvě polohy, které se liší pouze otočením plánu, považujeme za stejné.

Řešení:

a) A

1	1,2	1

2	1,2	2

	1	
1	1	1

1,2,3	2

b) B

1	1,2	1

	1	1
1	1	

2,3	1,2

c) C

1,2,3	1
1,2	

3	1,2,3
	2,3

1	
1,2	
1,2	1

	2
	1,2
2	1,2

1,2	2	2
2	2	

1	1	
1,2	1	1

d) D

1,2		
2	2,3	2
		1,2

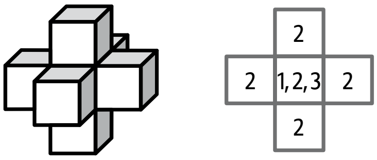
		2,3
2	1,2	2
2,3		

	1	1
2	1,2,3	
	3	3

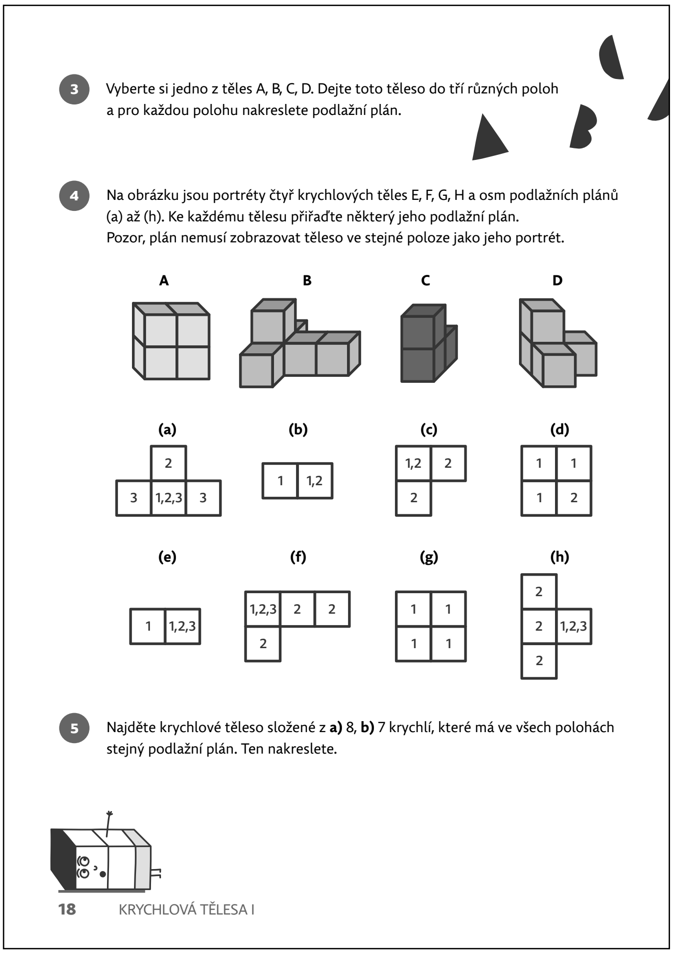
	2	
1,2	2	2,3
1		3

3 Vyzveme ty žáky, kteří si s úlohou neví rady, aby si tělesa vymodelovali jak podle portrétu, tak podle plánu. Pak již není obtížné fyzické modely porovnat a přiřadit. Pokud je málo kostek pro každého, je vhodné tyto žáky spojit do skupiny, aby tvořili tělesa dohromady. Výsledky: E-g , F-f, G-b, H-c.

4 **a)** Krychle 2 × 2 × 2; Část **b)** není vhodné řešit s celou třídou při hodině, mohlo by to zabrat příliš mnoho času a mnoho žáků by nemuselo krychlové těleso nalézt. Úloha je vhodná pro rychlé žáky v hodině nebo pro nepovinnou práci doma.



V pilotní třídě se osvědčilo zavedení knihy expertů. Žák, který těleso našel, jej nakreslil do knihy expertů (připsal své jméno a datum). Spolužáci se mohli podle svého uvážení na řešení podívat, nebo úlohu dál řešit. Cílem knihy expertů je, aby se nakonec každý žák stal expertem na nějaké prostředí nebo „typ úloh“. To je nelehká úloha pro učitele. Kniha umožňuje, aby expertů mohlo být v každém prostředí více a nezvýhodňuje rychlé žáky oproti pomalejším.


3 Vyberte si jedno z těles A, B, C, D. Dejte toto těleso do tří různých poloh a pro každou polohu nakreslete podlažní plán.

4 Na obrázku jsou portréty čtyř krychlových těles E, F, G, H a osm podlažních plánů (a) až (h). Ke každému tělesu přiřaďte některý jeho podlažní plán. Pozor, plán nemusí zobrazovat těleso ve stejné poloze jako jeho portrét.

5 Najděte krychlové těleso složené z **a)** 8, **b)** 7 krychlí, které má ve všech polohách stejný podlažní plán. Ten nakreslete.

18 KRYCHLOVÁ TĚLESA I

Mince

V úlohách 1, 2 pracujeme v propojení počet – veličina, a navíc frekventujeme logicky citlivá slova jako „nejvýše“, „právě“, „nejmenší“ apod.
Úlohy 3 až6 jsou věnovány propedeutice rovnic a korespondenci prostředí mincí, vah a algebraického zápisu.

2 Důležité je slovo „právě“, které zdůrazňuje, že počet mincí nesmí být ani větší ani menší než 3. V běžném životě toto slovo použijeme zřídka. Když v běžném životě řekneme, že ve slově MATEMATIKA je 5 písmen, tak se to považuje za chybu, byť matematicky vzato, to chyba není. Pět písmen v tom slově je. Je tam dokonce 10 písmen. Slovo „právě“ zde používáme proto, aby si žák na něj zvykal.

Pro některé žáky může být úloha obtížná, doplníme motivační, přípravnou úlohu – například: Vyberete si své úspory z kasičky, ve které jsou jen mince. Jaké mince můžete použít na zaplacení částky 3 Kč, 5 Kč, 9 Kč, 15 Kč atd. Hledejte různá (všechna) řešení.

Výsledky (jednotku „Kč“ vypouštíme): **a)** 2 + 2 + 2; **b)** 5 + 1 + 1; **c)** 10 + 1 + 1 nebo 5 + 5 + 2; **d)** 10 + 10 + 1; **e)** nelze.

3 Zdůrazníme, že mince na pravé straně jsou stejné. Některým žákům pomůže situaci pochopit modelování pomocí skutečných mincí. Uvítáme, když nějaký žák vytvoří podobnou úlohu pro spolužáky.

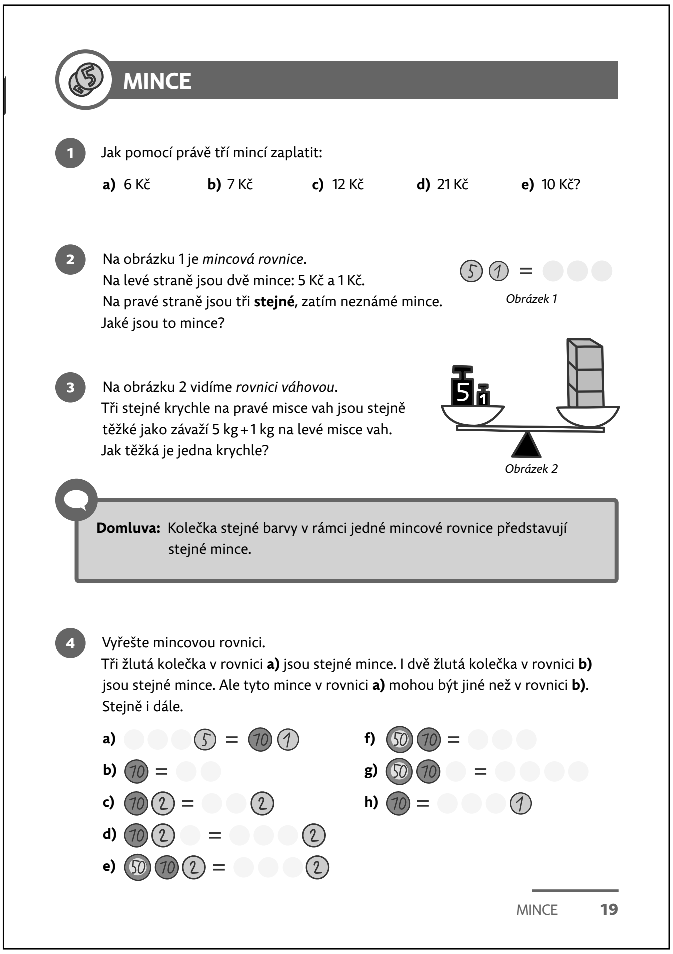
Řešení: mince je 2 Kč.

4 Rovnice z úlohy 3 modelovaná pomocí vah. Žáci sami upozorní na to, že obě úlohy jsou stejné. Učitel žádá upřesnění. Žáci řeknou, že 1 Kč a 5 Kč z úlohy 3 je totéž, co 1 kg a 5 kg v úloze 4.

Řešení: 2 Kč je stejné jako řešení 2 kg. Tedy mincovou rovnici převedeme na váhovou, když místo Kč dáme kg.

5 Čtyři úlohy slouží jako propedeutika úpravy rovnic. Očekávaný řešitelský postup: **a)** Někteří žáci mohou řešit úlohu metodou pokus – omyl. Začnou třeba 1 Kč, a pokud to nevychází, zkusí 2 Kč. Jiní mohou vidět, kolik Kč jim chybí, doplatit k 5 Kč, aby měli 11 Kč, a pak si těchto 6 Kč rozdělí mezi tři stejné mince. Řešení je tedy 2 Kč. Další mohou úlohu řešit přímo vhledem. V úloze **b)** si rozmění 10 Kč na dvě stejné mince, řešení je tedy 5 Kč. **c)** Z obou stran žák odebere 2 Kč, rozmění 10 = 5 + 5 a vidí, že x = 5 Kč. **d)** Myšlenka z úlohy **c)** se opakuje. Žák z obou stran odebere 2 Kč i neznámou minci. Úvahy o přidávání, případně odebírání, mincí uplatní žáci i v úlohách **e)** až **g)**. V poslední úloze **h)** žáci zjistí, že neznámá mince by musela mít hodnotu 3 Kč. Taková mince ovšem neexistuje. To je podobná situace, jako když úlohu řešíme v určitém oboru (např. v celých číslech, nebo v kladných reálných číslech) a na závěr je nutné zkontrolovat, zda nalezené řešení do oboru patří.

Někteří žáci řeší tyto úlohy rychle vhledem. Ty můžeme vyzvat, ať úlohy namodelují pomocí vah. Pak jim dáme dvě náročné otázky: **1)** Lze každou mincovou úlohu namodelovat jako váhovou a každou váhovou jako mincovou? **2)** Odpovídají si potom i řešení těchto rovnic? Žáci zjistí, že například úloha 5 kg + 1 kg = x + x má řešení x = 3 kg, ale analogická úloha mincová 5 Kč + 1 Kč = x + x řešení nemá, protože mince 3 Kč neexistuje. Toto poznání


MINCE

1 Jak pomocí právě tří mincí zaplatit:

a) 6 Kč **b)** 7 Kč **c)** 12 Kč **d)** 21 Kč **e)** 10 Kč?

2 Na obrázku 1 je *mincová rovnice*.
Na levé straně jsou dvě mince: 5 Kč a 1 Kč.
Na pravé straně jsou tři **stejné**, zatím neznámé mince.
Jaké jsou to mince?

Obrázek 1

3 Na obrázku 2 vidíme *rovnici váhovou*.
Tři stejné krychle na pravé misce vah jsou stejně těžké jako závaží 5 kg + 1 kg na levé misce vah.
Jak těžká je jedna krychle?

Obrázek 2

Domluva: Kolečka stejné barvy v rámci jedné mincové rovnice představují stejné mince.

4 Vyřešte mincovou rovnici.
Tři žlutá kolečka v rovnici **a)** jsou stejné mince. I dvě žlutá kolečka v rovnici **b)** jsou stejné mince. Ale tyto mince v rovnici **a)** mohou být jiné než v rovnici **b)**. Stejně i dále.

a) ○ ○ ○ 5 = 10 1
b) 10 = ○ ○
c) 10 2 = ○ ○ 2
d) 10 2 ○ = ○ ○ ○ 2
e) 50 10 2 = ○ ○ ○ 2
f) 50 10 = ○ ○ ○
g) 50 10 ○ = ○ ○ ○ ○
h) 10 = ○ ○ ○ 1

MINCE 19

dává žákům zkušenost, že z hlediska řešitelnosti rovnic jsou prostředí vah a mincí různé.

Výsledky: **a)** 2 Kč; **b)**, **c)**, **d)** 5 Kč; **e)**, **f)**, **g)** 20 Kč; **h)** nemá řešení, 3 Kč neexistuje.

6 Výsledky: **a)** $x + x + x + 5 = 10 + 1$, **b)** $10 = x + x$, **c)** $10 + 2 = x + x + 2$, **d)** $10 + 2 + x = x + x + x + 2$, **e)** $50 + 10 + 2 = x + x + x + 2$, **f)** $50 + 10 = x + x + x$, **g)** $50 + 10 + x = x + x + x + x$, **h)** $10 = x + x + x + 1$.

---

1 Úloha na představu velkých čísel a na dělení se zbytkem. Odhad může být pro děti zajímavý a motivační pro výpočet. Výsledek: AH byl odsouzen na 11 dnů, 13 hodin, 46 minut a 40 s. MK byl odsouzen na 31 let, 259 dnů, 1 hodinu, 46 minut a 40 s, pokud nepočítáme přestupné roky. Pokud ano, bylo by to o 8 nebo 7 dnů méně (v 31 letech může být přestupný rok 8krát nebo 7krát v závislosti na roce nástupu do vězení). K řešení může pomoci kalkulačka.

V případě slabších žáků je možné zadat 100 s nebo 1 000 s. Případně jim učitel položí otázky jako například „Kolik je to minut/hodin?“.

2 Cílem úlohy je porozumět předponě kilo.

Didaktická chyba, které se v této souvislosti často dopouštíme, je snaha vytvořit pro převod délkových jednotek tabulku, ve které jsou jednotky od milimetru po kilometr přehledně zachyceny. Jestliže ji žák nácvikem vloží do své paměti, bude rychle a spolehlivě řešit standardní úlohy, ale nemusí těmto vztahům rozumět. Když mu náhodou vypoví paměť, bude bez možnosti úlohu řešit. Navíc převody jednotek se nevztahují pouze na délky, ale na mnoho dalších veličin. Žák bude lépe rozumět jednotkám, když uvidí souvislost mezi 1 000 m = 1 km a 1000 g = 1 kg. Testem, zda do těchto vazeb žák vidí, je například úloha „Co je víc? 1 hodina, nebo 1 ‚kilo-sekunda‘?“

Výsledek: 83 a $\frac{1}{3}$ roku.

Vrátíme se k obrázku 1 z úlohy 2. Když označíme neznámou minci písmenem x, můžeme obrázek 1 zapsat pomocí **rovnice** 5 Kč + 1 Kč = $x + x + x$. Teď se již díváme jen na hodnoty, zapomeneme, že se jedná o mince, místo 5 Kč + 1 Kč píšeme jen obnos 6 Kč a místo $x + x + x$ píšeme $3 \cdot x$. Dostáváme rovnici 6 Kč = $3 \cdot x$. Odtud $x = 2$ Kč.
Podobně můžeme váhovou rovnici z obrázku 2 (úloha 3) zapsat pomocí rovnice 5 kg + 1 kg = $x + x + x$. Když u těchto rovnic vypustíme jednotku Kč, resp. jednotku kg, dostáváme stejnou rovnici $5 + 1 = x + x + x$.

5 Přepište do rovnic tři z mincových rovnic úlohy 4.

1 Obviněný AH byl odsouzen k milionu sekund vězení. Obviněný MK k miliardě sekund vězení. Odhadněte, kolik to může být let. Pak vypočítejte, kolik je to let a kolik dnů.

2 Děda letos oslaví „kilo-měsíc“. Kolik mu je let?

20 MINCE

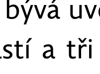
Egyptské dělení

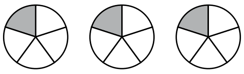
Náročnou představu zlomku budujeme ve dvou krocích. Nejprve se z historie učíme, že po více než 1 000 let lidé používali pouze tzv. kmenové zlomky, tj. zlomky typu $\frac{1}{n}$ a jejich znalosti vycházely z manipulace – z krájení chlebů. Právě toto je první úroveň porozumění zlomkům, ke které žáky orientujeme. Druhá úroveň pak začíná v kapitole Zlomky a pojednává o zlomcích tak, jak je tradičně ve škole učíme.

Žáci, kteří se se zlomky ještě nesetkali, nebo s nimi mají potíže, budou dělení chlebů modelovat tím, že papírové kruhy stříhají. Idiom „úplně stejné" zdůrazňuje, že nejen obsah, ale i tvar částí je stejný.

Mnozí žáci si neuvědomují klíčový vztah $\frac{a}{b} = a : b$, ke kterému se budeme mnohokrát vracet. Jako didakticky úspěšné se ukazuje řešení, které navrhla a odzkoušela spolupracující učitelka Jitka Michnová. Doporučuje, aby učitel při každém výskytu zlomku použil idiom „spravedlivé dělení". Například zlomek $\frac{3}{5}$ komentuje jako spravedlivé dělení 3 chlebů mezi 5 lidí. Protože tento idiom je ve vědomí žáků vázán na dělení, připravuje se na intuitivní úrovni spontánní porozumění vztahu $\frac{a}{b} = a : b$. Úlohy zaměřené na tento vztah najdete v kapitole Rozjezdy – desetinná čísla (úlohy 10 a 11).

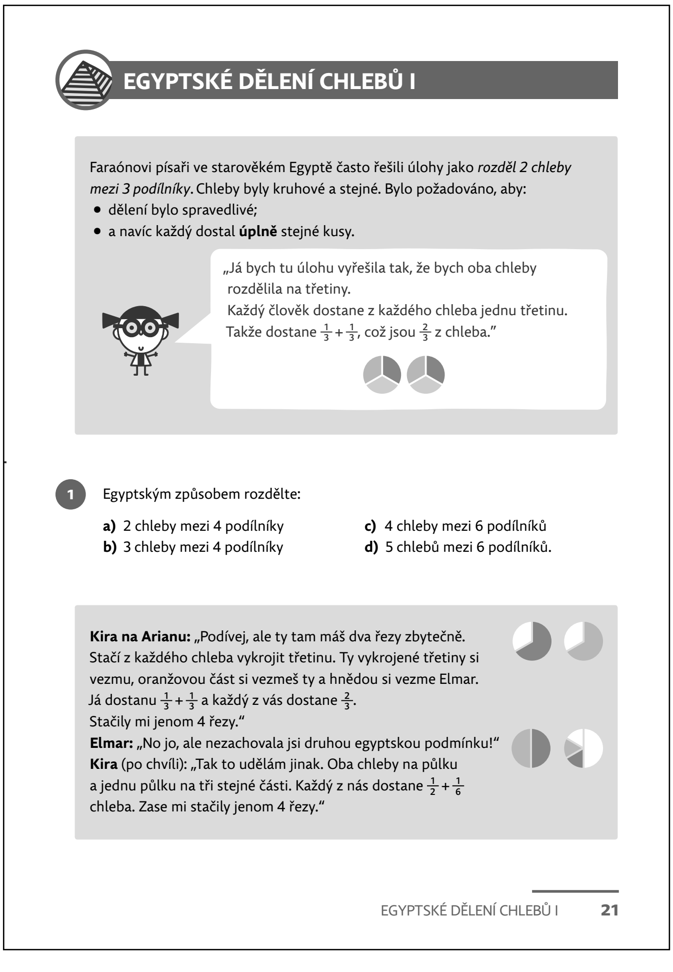
Komentář k rozhovoru: U prvního dělení Kiry se učitel zeptá, zda nebyla porušena i první egyptská podmínka. Žáci ukáží, že nebyla a vyjasní se, že $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Další otázka učitele je, co Elmar namítal, tedy jak byla porušena druhá egyptská podmínka. V diskuzi by se mělo vyjasnit, že druhý návrh Kiry je správný. Jestliže nějaký žák zde ukáže, že $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$, dáme mu prostor. Jeho vysvětlení pochopí třeba jen část třídy.

Někteří žáci v dnešní době preferují místo o krájení chleba mluvit o krájení pizzy, což je zcela v pořádku.
V mnoha učebnicích je zlomek např. $\frac{3}{5}$ znázorněn obrázkem 

K tomu bývá uveden text: „Kruh rozdělíme na pět stejných částí a tři z nich vybarvíme." Pilotáž ukázala, že tato představa nestačí k tomu, aby bylo žákům jasné, že „rozdělit 3 chleby mezi 5 lidí" znamená, že každý dostane $\frac{3}{5}$ chleba. Představa, která toto porozumění podpoří, je na obrázku 

Proto doporučujeme, aby se v diskuzích u zlomků učitel snažil dát prostor tomu žákovi, který s takovýmto výkladem zlomků přijde. V případě, že zde žádný žák s tímto nepřijde, vyčkáme na další setkání s egyptskými zlomky.

1 **a)** Žáci, kteří řešení Ariany vezmou jako vzorové, rozdělí každý chleba na 4 části a každému podílníkovi dají 2 čtvrtiny. Mohou tedy zapsat výsledek tohoto dělení jako $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$. Lze očekávat i dělení každého chleba na půlky a každý podílník dostane $\frac{1}{2}$. Učitel se poté ptá, co je více, zda $\frac{1}{2}$ nebo $\frac{2}{4}$. Žáci napíší na tabuli rovnost $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.
b) Lze očekávat, že se objeví řešení podle Ariany, tedy $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ i řešení sofistikovanější $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Opět diskutujeme, co je více. Učitel se může ptát, zda a proč žáci považují některý způsob za lepší. Lze očekávat, že některý žák bude považovat za lepší to řešení, které lze realizovat na menší počet řezů. V budoucnu tuto podmínku přidáme k dvěma v učebnici uvedeným podmínkám.



EGYPTSKÉ DĚLENÍ CHLEBŮ I

Faraónovi písaři ve starověkém Egyptě často řešili úlohy jako *rozděl 2 chleby mezi 3 podílníky*. Chleby byly kruhové a stejné. Bylo požadováno, aby:

- dělení bylo spravedlivé;
- a navíc každý dostal **úplně** stejné kusy.

„Já bych tu úlohu vyřešila tak, že bych oba chleby rozdělila na třetiny.
Každý člověk dostane z každého chleba jednu třetinu.
Takže dostane $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, což jsou $\frac{2}{3}$ z chleba."

1 Egyptským způsobem rozdělte:

a) 2 chleby mezi 4 podílníky
b) 3 chleby mezi 4 podílníky
c) 4 chleby mezi 6 podílníků
d) 5 chlebů mezi 6 podílníků.

Kira na Arianu: „Podívej, ale ty tam máš dva řezy zbytečně. Stačí z každého chleba vykrojit třetinu. Ty vykrojené třetiny si vezmu, oranžovou část si vezmeš ty a hnědou si vezme Elmar. Já dostanu $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ a každý z vás dostane $\frac{2}{3}$. Stačily mi jenom 4 řezy."
Elmar: „No jo, ale nezachovala jsi druhou egyptskou podmínku!"
Kira (po chvíli): „Tak to udělám jinak. Oba chleby na půlku a jednu půlku na tři stejné části. Každý z nás dostane $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ chleba. Zase mi stačily jenom 4 řezy."

EGYPTSKÉ DĚLENÍ CHLEBŮ I 21

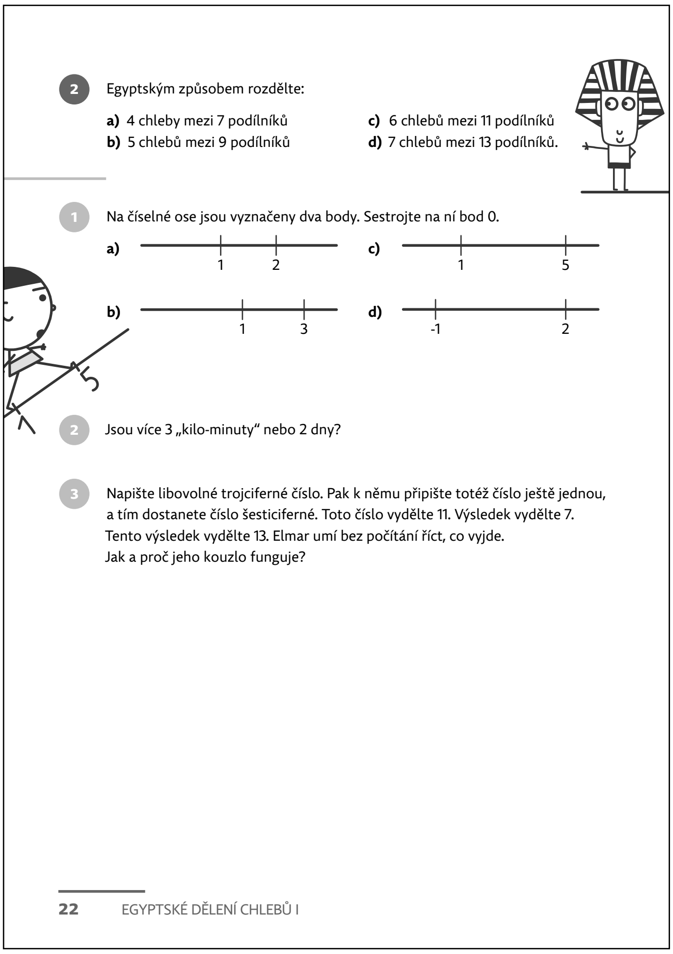
c) Lze očekávat řešení $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}$ nebo $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ nebo $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$. Opět se učitel ptá, co je více a které řešení považují žáci za lepší.

d) Očekávaná řešení jsou $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ nebo $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$ nebo $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. K poslednímu řešení vede cesta přes dělení tří chlebů na poloviny a zbývajících dvou chlebů tak, jak to udělala Ariana.

Při řešení těchto úloh je důležité, aby se na tabuli objevovaly výše uvedené rovnosti a další rovnosti z nich vyplývající. Je možné, že některý žák přijde s tvrzením „umím řešit všechny tyto úlohy“. Učitel mu dá úlohu rozdělit 5 chlebů mezi 13 podílníků a žák rozdělí každý chleb na 13 dílů. Každý podílník dostane z každého chleba 1 díl.

Žáci, kteří u předchozích úloh našli řešení s menším počtem řezů, asi budou namítat, že takové řešení není hezké. V tom případě učitel organizuje diskuzi třídy s cílem dospět k závěru, že za hezčí považujeme řešení s menším počtem řezů. V případě, že k této diskuzi nedojde, pokračujeme řešením úlohy druhé a zmíněnou diskuzi vyvolá učitel po vyřešení druhé úlohy.

2 Výsledky (uvádíme jen jednu z více možností): $\frac{4}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$; $\frac{5}{9}=\frac{1}{2}+\frac{1}{18}$; $\frac{6}{11}=\frac{1}{2}+\frac{1}{22}$; $\frac{7}{13}=\frac{1}{2}+\frac{1}{26}$.


2 Egyptským způsobem rozdělte:

a) 4 chleby mezi 7 podílníků
b) 5 chlebů mezi 9 podílníků
c) 6 chlebů mezi 11 podílníků
d) 7 chlebů mezi 13 podílníků.

1 Na číselné ose jsou vyznačeny dva body. Sestrojte na ní bod 0.

a) 1, 2
b) 1, 3
c) 1, 5
d) -1, 2

2 Jsou více 3 „kilo-minuty“ nebo 2 dny?

3 Napište libovolné trojciferné číslo. Pak k němu připište totéž číslo ještě jednou, a tím dostanete číslo šesticiferné. Toto číslo vydělte 11. Výsledek vydělte 7. Tento výsledek vydělte 13. Elmar umí bez počítání říct, co vyjde. Jak a proč jeho kouzlo funguje?

22 EGYPTSKÉ DĚLENÍ CHLEBŮ I

Žák, který odhalí zákonitost této série izolovaných modelů, uvede generický model, například $\frac{35}{69}=\frac{1}{2}+\frac{1}{138}$. Učitel navrhne obecnější zápis, například $\frac{čit}{jme}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot jme}$, kde $jme = 2\cdot čit - 1$. Když pak místo „čit“ žák napíše n, dostane abstraktní poznatek zapsaný písmeny $\frac{1}{2n-1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot(2n-1)}$. Někteří žáci mohou poznatek nejprve formulovat slovy – například: Počet podílníků je o jednu menší než dvojnásobek chlebů. Každý podílník pak dostane $\frac{1}{2}$ a 1/(dvojnásobek počtu podílníků).

1 Existují dvě cesty, jak úlohu řešit: pomocí měřítka a pomocí kružítka a pravítka. Je dobré, když se objeví oba dva způsoby.

Řešení:

a) Číslo 1 je středem úsečky 02, takže stačí přenést jednu vzdálenost.

b) Středem úsečky 13 je 2. Poté zbývá přenést jednu vzdálenost stejně jako v předchozí úloze.

c) Středem úsečky 15 je číslo 3 a dále postupujeme stejně jako v předchozí úloze. Žáci díky tomu mohou získat zkušenost s tím, že v matematice se velmi často využívá princip převedení na „již známý“ případ.

d) Je potřeba najít třetinu úsečky (–1) 2. Žáci ji pravděpodobně naměří.

V úloze **d)** se vyskytne záporné číslo. Domníváme se, že pro více žáků to nebude problém a tito to případně vysvětlí ostatním. Úloha má diagnostický potenciál – ukáže učiteli, kteří žáci mohou mít se zápornými čísly problémy.

2 Řešení: Dva dny mají 48 hodin, což je 4860=2 880 minut, a jsou proto méně než 3 „kilo-minuty“.

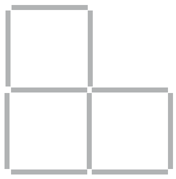
3 Řešení: Napsáním čísla dvakrát za sebe vlastně napíšeme 1001násobek trojciferného čísla. Dělení 11, 7 a 13 je totéž jako dělení 11 · 7 · 13 = 1001, proto vyjde vždy původní trojciferné číslo. Žáci většinou celkem rychle zjistí, že tomu tak je, ale mnohem náročnější je argumentace, proč tomu tak je.

Pro některé žáky jsou podobná „kouzla“ velmi motivační. Někteří z nich nad úlohou přemýšlejí doma, někdy i s rodiči.

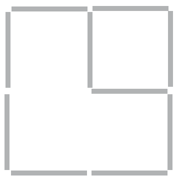
2 Na obrázku jsou 4 obdélníky a 5 čtverců, což některé žáky překvapí.

3 Řešení:

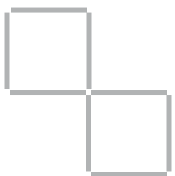
a) Odebereme 4 vnitřní dřívka.
b) Odebereme 2 „rohová“ dřívka. Například:



c) Odebereme 1 vnitřní dřívko.
d) Odebereme 2 vnitřní dřívka. Například:



e) Odebereme dva protilehlé páry „rohových dřívek“. Například:



Učitel může pokládat doplňující otázky. Například: Je některý z obrazců, který jsme vytvořili, šestiúhelník? (v úlohách **b)** a **d)**) Mají některé dva z vytvořených obrazců stejný tvar? Idiom „mít stejný tvar“ může být chápán ve smyslu „shodnosti“ nebo „podobnosti“. Je to typická situace vedoucí k upřesňování terminologie. Předpokládáme dva žáky, z nichž jeden výrazem „mít stejný tvar“ rozumí, že jeden z obrazců je zvětšením druhého (v úloze **d)**). Druhý žák výrazem „mít stejný tvar“ rozumí, že obrazce se dají jeden na druhý přesně přiložit. Učitel pak řekne, že matematici používají v prvním případě slovo „podobný“ a ve druhém případě slovo „shodný“. Původně vágní vyjádření „mít stejný tvar“ je diferencováno do dvou termínů – „být shodný“ a „být podobný“. Pokud žáci k tomuto rozlišení nedojdou, učitel vyčká na další příležitost k podobné diskuzi.

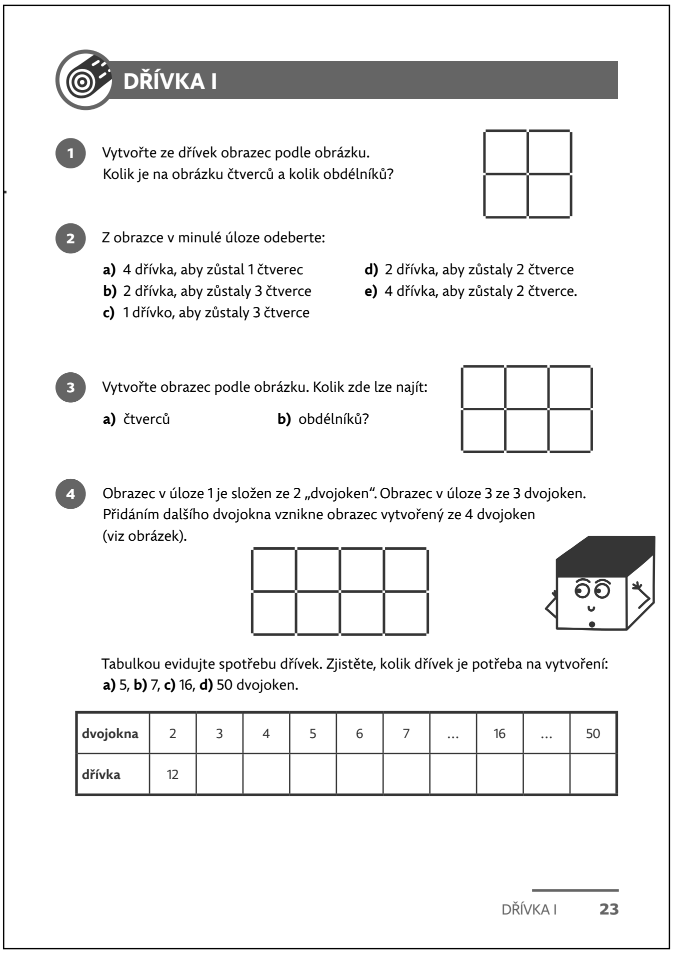
4 Výsledky: **a)** 8 čtverců (6 malých, 2 velké),
b) 10 obdélníků (7 obdélníků 2 × 1, 2 obdélníky 3 × 1, 1 obdélník 3 × 2)

5 Označíme-li počet dvojoken jako n a počet dřívek d, je $d = 5n + 2$. Tedy

dvojokna	2	3	4	5	6	7	16	50
dřívka	12	17	22	27	32	37	82	252

Žáci na základě několika prvních výsledků vypozorují, že „dole je pětinásobek toho nahoře plus dva“. Toto je přesná formulace závislosti, kterou učitel může zavedením jazyka písmen posunout do abstraktnější podoby. Učitel řekne: „Číslo nahoře označíme n, číslo dole označíme d. Když vám řeknu číslo n, jak najdete číslo d?“

6 Při tvorbě trojúhelníku ze 6 dřívek pravděpodobně někteří žáci vytvoří trojúhelník se stranami 1, 2 a 3 řívka. Zde je důležitá diskuze, zda je toto řešení možné. K podobnému problému jsme se vyjadřovali již v Ochutnávce.



DŘÍVKA I

1 Vytvořte ze dřívek obrazec podle obrázku.
Kolik je na obrázku čtverců a kolik obdélníků?

2 Z obrazce v minulé úloze odeberte:

a) 4 dřívka, aby zůstal 1 čtverec
b) 2 dřívka, aby zůstaly 3 čtverce
c) 1 dřívko, aby zůstaly 3 čtverce
d) 2 dřívka, aby zůstaly 2 čtverce
e) 4 dřívka, aby zůstaly 2 čtverce.

3 Vytvořte obrazec podle obrázku. Kolik zde lze najít:
a) čtverců **b)** obdélníků?

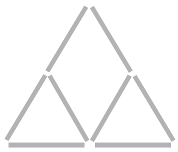
4 Obrazec v úloze 1 je složen ze 2 „dvojoken“. Obrazec v úloze 3 ze 3 dvojoken. Přidáním dalšího dvojokna vznikne obrazec vytvořený ze 4 dvojoken (viz obrázek).

Tabulkou evidujte spotřebu dřívek. Zjistěte, kolik dřívek je potřeba na vytvoření:
a) 5, **b)** 7, **c)** 16, **d)** 50 dvojoken.

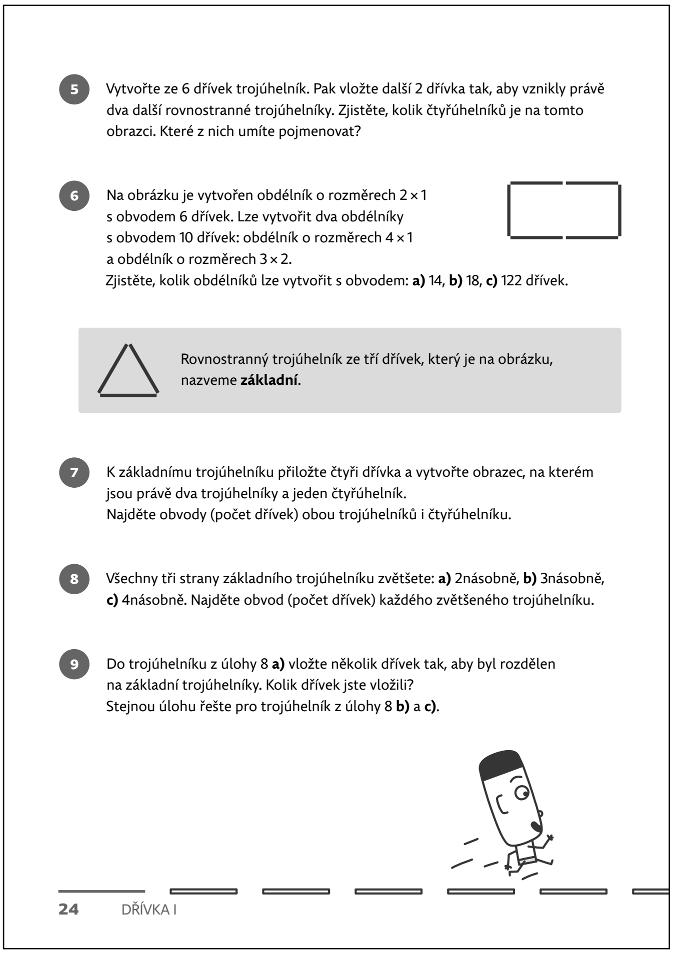
dvojokna	2	3	4	5	6	7	…	16	…	50
dřívka	12									

DŘÍVKA I 23

Žáky, kteří se domnívají, že trojúhelník o stranách 1, 2, 3 sestrojit lze, požádáme, aby narýsovali takový trojúhelník ze 6 úseček, z nichž každá je dlouhá přesně 30 mm. Žáci narýsují „trojúhelník“ *ABC*, u něhož je $|AB| = 90$ mm, $|BC| = 30$ mm, $|CA| = 60$ mm. Učitel v obrázku dokreslí výšku z vrcholu *C*, její patu označí *D* a řekne, že *BCD* je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník. Třída vyvrátí existenci takového „trojúhelníku“.



Tedy ze 6 dřívek lze vytvořit jen rovnostranný trojúhelník. Další dvě dřívka se přiloží tak, že jsou to **střední příčky** daného trojúhelníku (například tak jako na obrázku). Učitel začne používat termín střední příčka. Zatím ho však od žáků nevyžaduje. Žáci najdou 3 čtyřúhelníky, z nichž jeden je kosočtverec. S tím se už setkali v první úloze Ochutnávky. Další dva shodné čtyřúhelníky jsou lichoběžníky. Toto slovo učitel žákům řekne i s vysvětlením, že lichoběžník má dvě strany rovnoběžné a další dvě nemá rovnoběžné. Další zkušenosti s lichoběžníkem získají žáci v prostředí Mříž.



5 Vytvořte ze 6 dřívek trojúhelník. Pak vložte další 2 dřívka tak, aby vznikly právě dva další rovnostranné trojúhelníky. Zjistěte, kolik čtyřúhelníků je na tomto obrazci. Které z nich umíte pojmenovat?

6 Na obrázku je vytvořen obdélník o rozměrech 2 × 1 s obvodem 6 dřívek. Lze vytvořit dva obdélníky s obvodem 10 dřívek: obdélník o rozměrech 4 × 1 a obdélník o rozměrech 3 × 2.
Zjistěte, kolik obdélníků lze vytvořit s obvodem: **a)** 14, **b)** 18, **c)** 122 dřívek.

Rovnostranný trojúhelník ze tří dřívek, který je na obrázku, nazveme **základní**.

7 K základnímu trojúhelníku přiložte čtyři dřívka a vytvořte obrazec, na kterém jsou právě dva trojúhelníky a jeden čtyřúhelník.
Najděte obvody (počet dřívek) obou trojúhelníků i čtyřúhelníku.

8 Všechny tři strany základního trojúhelníku zvětšete: **a)** 2násobně, **b)** 3násobně, **c)** 4násobně. Najděte obvod (počet dřívek) každého zvětšeného trojúhelníku.

9 Do trojúhelníku z úlohy 8 **a)** vložte několik dřívek tak, aby byl rozdělen na základní trojúhelníky. Kolik dřívek jste vložili?
Stejnou úlohu řešte pro trojúhelník z úlohy 8 **b)** a **c)**.

24 DŘÍVKA I

7 Učitel žákům doporučí, aby si dělali evidenci tabulkou, například touto:

počet dřívek	6	10	14	18	…	122
(kratší strana, delší strana)	(1, 2)	(1, 4) (2, 3)	(1, 6) (2, 5) (3, 4)	(1, 8) (2, 7) (3, 6) (4, 5)		…
počet obdélníků	1	2	3	4		30

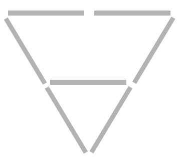
Při doplňování tabulky si žáci zvědomují výpočet obvodu obdélníka. Někteří po chvíli převedou geometrický problém na aritmetický, který lze formulovat takto: Kolika způsoby lze přirozené číslo *n* rozložit na součet dvou různých přirozených čísel (větších než 0), přičemž rozklady $a + b$ a $b + a$ považujeme za stejné?

Žáci mohou odvodit vztah mezi počtem obdélníků (*O*) a počtem dřívek (*D*). Tento vztah je $D = 4 \cdot O + 2$, resp. $O = (D - 2) : 4$. V případě, že číslo *D* je dělitelné 4, je vztah mírně odlišný ($O = \frac{D}{4} - 1$, např. pro $D = 12$ máme obdélníky (1, 5) a (2, 4), případ (3, 3) je čtverec).

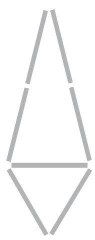
Při řešení úlohy žáci získávají zkušenost s různými obdélníky se stejným obvodem. Nabízí se další výzva pro experty: Pozorujte, jak se mění obsah různých obdélníků při zachování stejného obvodu.

8 Tuto úlohu je možné přeskočit (nebo jí například zaměstnat rychlejší žáky). Úloha má překvapivě více řešení (viz obrázky). Lze diskutovat o vzniklých tvarech, například použít slovo lichoběžník, deltoid nebo nekonvexní čtyřúhelník podle toho, která řešení se objeví.

Výsledky:
Obr. 1: dva rovnostranné trojúhelníky (obvody 3 a 6) a rovnoramenný lichoběžník (obvod 5);
Obr. 2: rovnostranný trojúhelník (obvod 3), rovnoramenný trojúhelník (obvod 5), deltoid (obvod 6);
Obr. 3: rovnostranný trojúhelník (obvod 3), rovnoramenný trojúhelník (obvod 5), nekonvexní čtyřúhelník (obvod 6).



(Obr. 1)



(Obr. 2)

(Obr. 3)

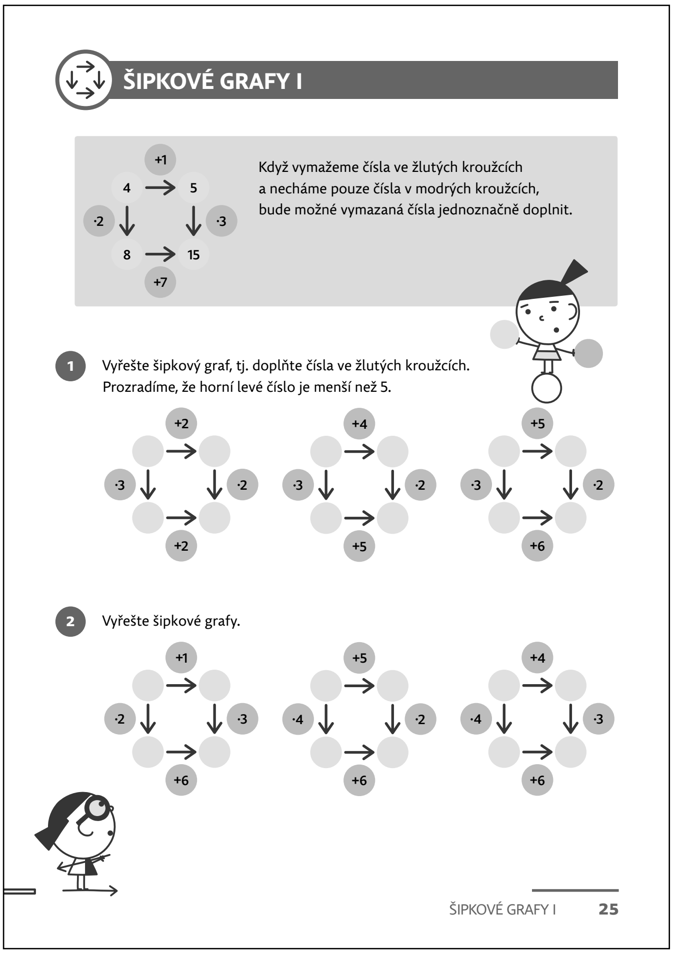
9 Žáci zjistí, že při n-násobném zvětšení strany se n-násobně zvětší obvod trojúhelníku.

Výsledky: **a)** 6; **b)** 9; **c)** 12.

10 Žáci se potkávají s posloupností (přirozeně lze trojúhelníky zvětšovat), která není ani aritmetická, ani geometrická. Pro experty lze zadat úlohu objevit zákonitost, jak posloupnost pokračuje. Přírůstky tvoří aritmetickou posloupnost (3, 6, 9, 12,...). Obecně platí $a_n = 3\,\frac{n}{2} = \frac{3n\,(n-1)}{2}$, což ale žáci asi neobjeví.

Šipkové grafy I

Šipkový graf je dvojice hadů se stejným začátkem a stejným koncem. Z výchozího pole (vlevo nahoře) ke koncovému poli (vpravo dole) vedou dvě cesty: západojižní (Z-J) a severo-východní (S-V). Když v grafu z úlohy **1a)** napíšeme do výchozího pole písmeno x, tak cestou S-V dojdeme k číslu $2x + 4$ a cestou Z-J k číslu $3x + 2$. Protože čísla mají být stejná, dostáváme rovnici $2x + 4 = 3x + 2$. Její řešení je $x = 2$. Tedy šipkové grafy jsou vizualizací jednoduchých lineárních rovnic. Tato vizualizace nabízí řešení metodou pokus – omyl. Žák zapíše do výchozího pole číslo 1 a zjistí, že cestou S-V dojde k číslu 6 a cestou Z-J k číslu 3. Tento pokus se nezdařil. Žák zvolí tedy $x = 2$ a zjistí, že obě cesty davají stejný výsledek 8. Tím je úloha vyřešena. U složitějších grafů je nutno hledat řešení metodou pokus – omyl déle. Zde ale žákovi pomůže evidence výsledků. Například když u úlohy **2c)** použije žák k evidenci výsledků tabulku, zjistí pomocí prvních dvou pokusů, že rozdíl výsledků obou cest je pro $x = 1$ roven 5 (rozdíl čísel 15 a 10), pro $x = 2$ roven 4 (rozdíl čísel 18 a 14).


ŠIPKOVÉ GRAFY I

Když vymažeme čísla ve žlutých kroužcích a necháme pouze čísla v modrých kroužcích, bude možné vymazaná čísla jednoznačně doplnit.

1 Vyřešte šipkový graf, tj. doplňte čísla ve žlutých kroužcích. Prozradíme, že horní levé číslo je menší než 5.

2 Vyřešte šipkové grafy.

ŠIPKOVÉ GRAFY I 25

Z toho žák usoudí, že zvýšením čísla x o 1 se rozdíl výsledků cest S-V a Z-J sníží o jedničku. Tedy pro $x = 6$ bude tento rozdíl 0. Žák tedy zvolí $x = 6$ a najde výsledek.

x	1	2	...	6
S-V	15	18	...	30
Z-J	10	14	...	30

Podívejme se teď na to, co se žák učí výše popsaným postupem. Určitě se tím učí řešení lineárních rovnic typu $ax + b = cx + d$. Lze namítat, že tuto dovednost získá žák rychleji, když jej naučíme řešit lineární rovnice tradičním způsobem. To je pravda, ale u výše popsaného postupu získává žák více zkušeností, a to hned ve třech důležitých oblastech:

- učí se rozumět lineární funkci, tj. například tomu, že tato je jednoznačně určena, když známe její hodnoty ve dvou různých bodech;
- učí se pracovat s diferencí dvou funkcí, což je ná-

stroj, který pomáhá řešit některé náročné matematické problémy;

- učí se používat tabulku jako účinný nástroj evidence dat.

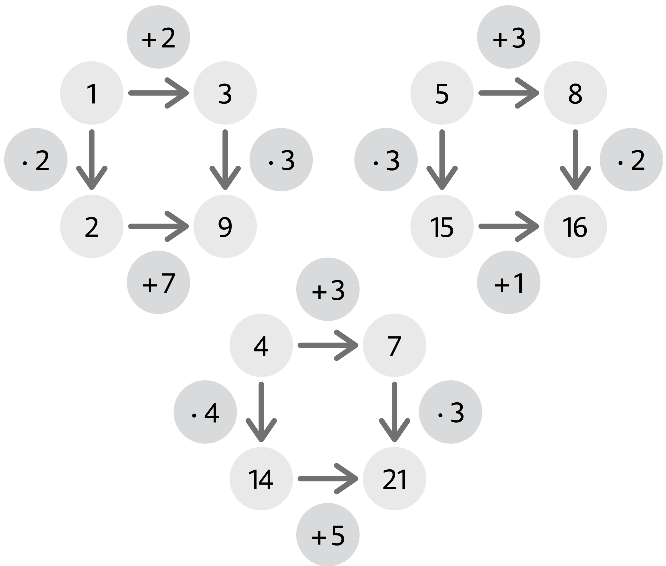
Jestliže tedy žáci řeší šipkové grafy, učí se podstatně více než jen řešení lineárních rovnic jistého typu.

Poznámka: Pokud nehrozí nedorozumění, vypouštíme u graficky zadaných úloh (jako je např. úloha 1) označení a), b), c). V této příručce budeme na úlohy stále odkazovat jako na úlohy a), b), c). K úloze a) patří vždy obrázek nejvíce vlevo, následuje obrázek k úloze b) atd.

1 Výsledky: V horním levém poli je číslo **a)** 2; **b)** 3; **c)** 4.

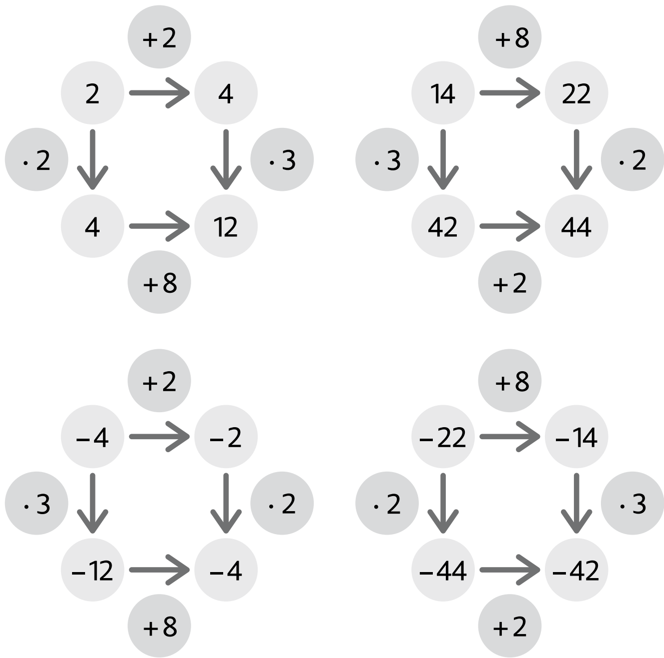
2 Výsledky: V horním levém poli je číslo **a)** 3; **b)** 2; **c)** 6.

3 Výsledky: Je možno najít více řešení. Ta nejsnažší jsou na obrázku na další straně. V dalších řešeních je většinou potřeba použít násobení necelým číslem, nebo přičtení záporného čísla. Je tedy poměrně málo pravděpodobné, že s dalšími řešeními přijdou žáci sami.

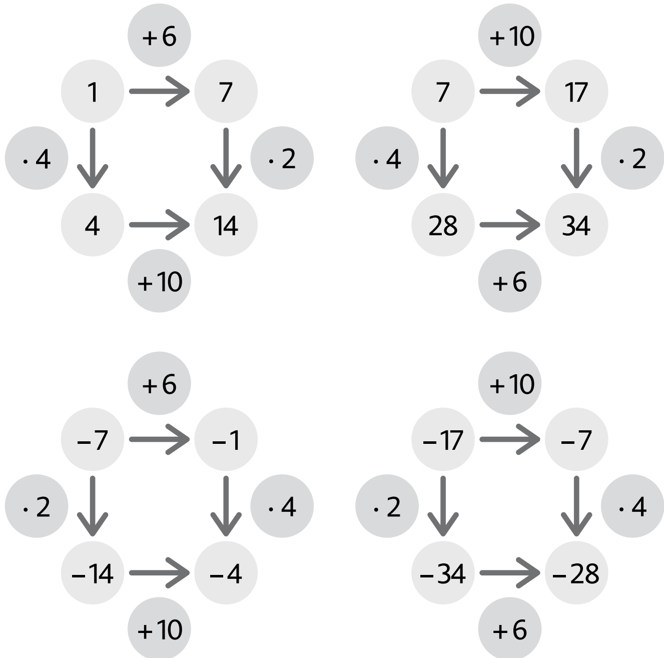


4 Každá úloha má 4 řešení. Dvě z nich vycházejí s kladnými čísly, dvě s čísly zápornými. Předpokládáme, že většina žáků najde u každé úlohy jediné řešení. Několik žáků najde řešení dvě a pokud některý žák objeví i řešení se zápornými čísly, zasluhuje odměnu a uznání. V osmém ročníku pak žáci objeví vztahy mezi druhým a čtvrtým řešením. Stejně je tomu u úlohy **b)** i **c)**.

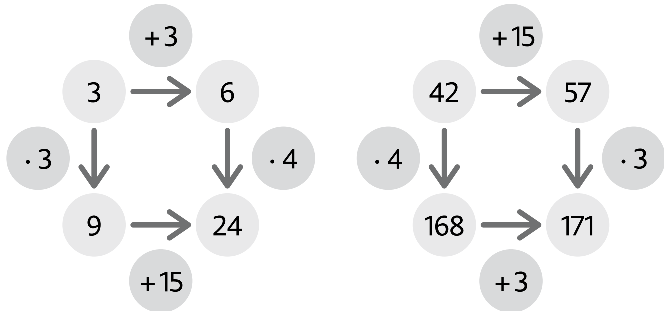
Řešení úlohy **a)** – všechny čtyři možnosti:

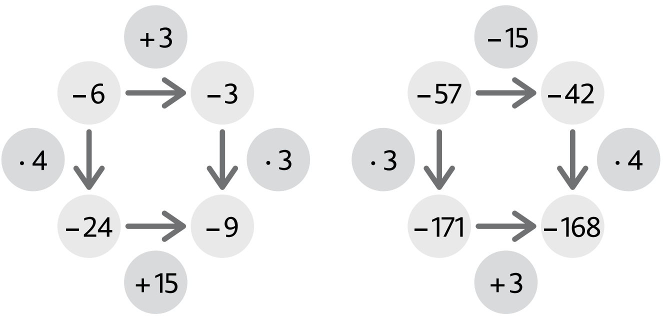


Řešení úlohy **b)** – všechny čtyři možnosti:



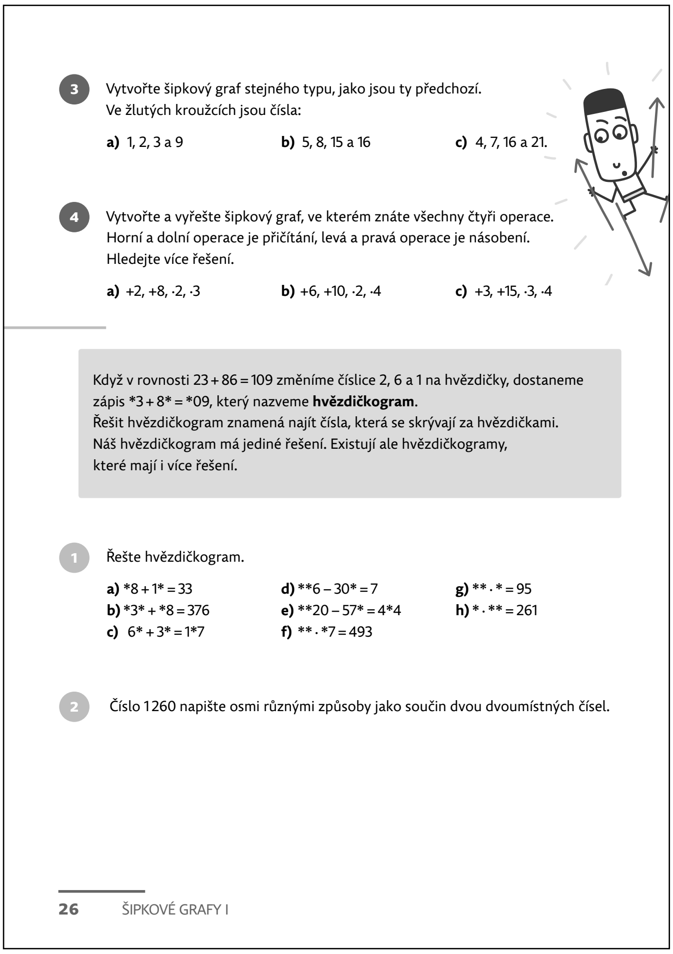
Řešení úlohy **c)** – všechny čtyři možnosti:





Hvězdičkogramy

Pojmenování hvězdičkogramy vychází z názvu algebrogramy. Nejde o termín, který by se objevoval v jiných učebnicích. Hvězdičkogramy jsou obdobou algebrogramů. Hvězdička zde zastupuje libovolnou číslici (vždy právě jednu). Pod každou hvězdičkou se může skrývat jiná číslice. To by měl učitel jasně říci. Hvězdičkogramy řeší žáci metodou pokus – omyl. Postupně tím nabývají hlubší vhled do desítkové soustavy a dělitelnosti. Žáci mohou použít kalkulačky.


3 Vytvořte šipkový graf stejného typu, jako jsou ty předchozí.
Ve žlutých kroužcích jsou čísla:

a) 1, 2, 3 a 9 **b)** 5, 8, 15 a 16 **c)** 4, 7, 16 a 21.

4 Vytvořte a vyřešte šipkový graf, ve kterém znáte všechny čtyři operace.
Horní a dolní operace je přičítání, levá a pravá operace je násobení.
Hledejte více řešení.

a) +2, +8, ·2, ·3 **b)** +6, +10, ·2, ·4 **c)** +3, +15, ·3, ·4

Když v rovnosti 23 + 86 = 109 změníme číslice 2, 6 a 1 na hvězdičky, dostaneme zápis *3 + 8* = *09, který nazveme **hvězdičkogram**.
Řešit hvězdičkogram znamená najít čísla, která se skrývají za hvězdičkami.
Náš hvězdičkogram má jediné řešení. Existují ale hvězdičkogramy, které mají i více řešení.

1 Řešte hvězdičkogram.

a) *8 + 1* = 33
b) *3* + *8 = 376
c) 6* + 3* = 1*7
d) **6 – 30* = 7
e) **20 – 57* = 4*4
f) ** · *7 = 493
g) ** · * = 95
h) * · ** = 261

2 Číslo 1260 napište osmi různými způsoby jako součin dvou dvoumístných čísel.

26 ŠIPKOVÉ GRAFY I

1 Úloha slouží jako potrava pro rychlejší žáky nebo jako zásoba úloh, které jsou kdykoliv k dispozici.

Výsledky: **a)** 18 + 15 = 33, **b)** 338 + 38 = 376, **c)** 68 + 39 = 107 nebo 69 + 38 = 107, **d)** 316 – 309 = 7, **e)** 1020 – 576 = 444, **f)** 29 · 17 = 493, **g)** 19 · 5 = 95 nebo 95 · 1 = 95, **h)** 9 · 29 = 261 nebo 3 · 87 = 261.

2 Úloha žákům ukazuje význam rozkladu čísla na prvočísla. Ti žáci, kteří ve svých řešeních rozklad zmíní, mají do situace velmi dobrý vhled. Více žáků ale asi využije jen dělitelnost 10 nebo 5 a budou úlohu řešit metodou pokus – omyl.

Řešení: Z rozkladu čísla 1 260 = 2 · 2 · 5 · 7 · 9 najdeme všech osm možností:
14 · 90 = 15 · 80 = 18 · 70 = 20 · 63 = 21 · 60 = 28 · 45 = 30 · 42 = 35 · 36 = 1 260.

Desetinná čísla

K popisu části celku používáme zejména zlomky a desetinná čísla. Zlomky jsou názorné a opírají se o proces spravedlivého dělení, které lze realizovat v mnoha případech manipulací. Nevýhodou zlomků je skutečnost, že různé zlomky mohou označovat stejné číslo ($\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$) a jejich náročnost rychle narůstá s velikostí přirozených čísel, která v daném zlomku vystupují.

Výhodou desetinných čísel je jejich dobré propojení na čísla celá a na veličiny délky, obsahu, objemu, hmotnosti, teploty apod. U desetinných číslech se lépe zaokrouhluje než u zlomků. Nevýhodou desetinných čísel je to, že někteří žáci nemají potřebné představy o těchto číslech a vidí v nich dva nesouvisející světy čísel oddělených desetinnou čárkou. Projeví se to například u operací typu 3,7 + 8,5 = 11,12. Proto je důležité věnovat dostatečnou pozornost budování správných představ o tom, co je to desetinné číslo. Ty nacházíme v sémantice.

Někteří žáci nejsou schopni rozumět číslu 1,2 ihned, ale jsou schopni rozumět tomu, co znamená 1,2 metru. Vědí, že je to 12 dm. Žákům, kterým desetinná čísla činí potíže, pomůže učitel nebo spolužáci jejich sémantickým ukotvením. Nejčastěji použijí metry a ukotvení poskytují tak dlouho, dokud jej žák potřebuje.

Co se týká pojmenování čísel učitelem, doporučujeme poměrně dlouho důsledně říkat *1 celá 7 desetin* nebo *1 a 7 desetin*, nikoli zkráceně *1 celá 7*.

1 Desetinná čísla vycházejí ze zkušeností žáků. Nejčastěji se s nimi přirozeně potkávají v souvislosti s délkami (většinou jedno desetinné místo) a v souvislosti s penězi (dvě desetinná místa). Počítání s penězi by žákům mělo být blízké. Pokud by přesto činilo potíže, zvolíme menší čísla.

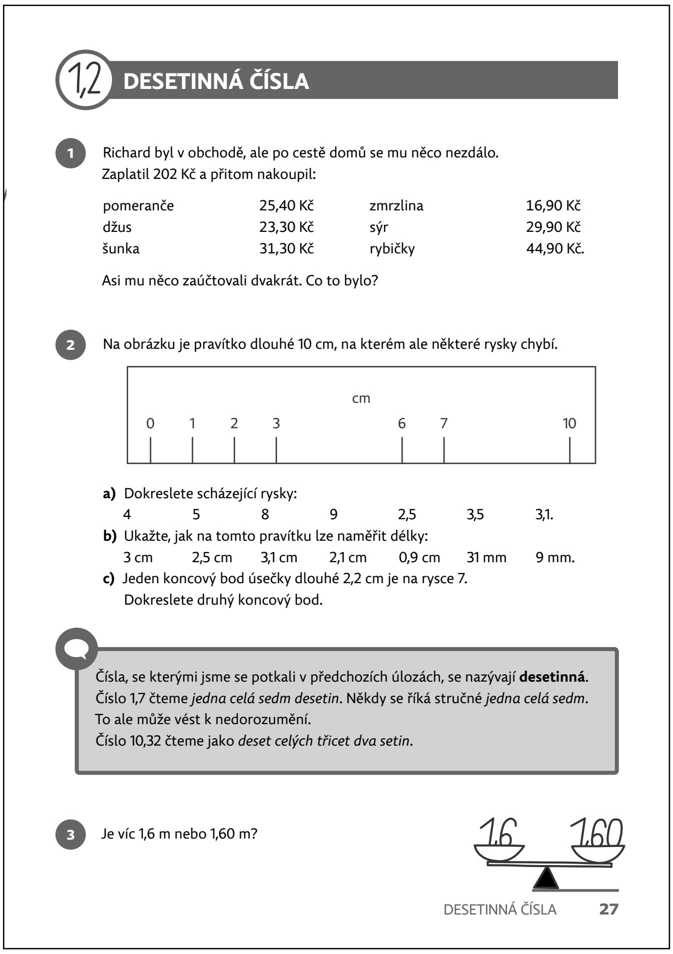
V úloze pracujeme se zaplacenou částkou tak, jak se to děje v obchodech. Nejdříve se spočte přesná částka a nakonec se zaoukrouhlí na celé koruny. To pravděpodobně vyvolá diskuzi. Přirozená je otázka, kolik by Richard platil, kdyby měl zaplatit 201,50 Kč. Pokud se žádný žák nezeptá, zeptáme se sami. Je možné rozvést diskuzi o zaokrouhlování. (Zaplatili bychom stejně, kdyby se každá položka zaokrouhlila na koruny? Co kdyby se nákupy zaokrouhlovaly na desetikoruny? Co kdyby se každá položka zaokrouhlila na desetikoruny? …)

Úloha je vhodná pro práci s kalkulačkou.

Řešení: sýr (částka se zaokrouhlila z 201,60 Kč na 202 Kč). Kdyby žáci zaokrouhlili každou položku na koruny, vyšlo by jim, že šunka byla zaúčtována dvakrát.

2 Předpokládáme, že žáci už jsou schopni samostatně řešit úlohy o desetinných číslech, které se nacházejí v kapitole Rozjezdy.

a) Pomocí pravítka žáci dokreslí scházející rysky.
b) Každou délku je možno naměřit mezi dvěma už vyznačenými ryskami. Například délku 0,9 cm mezi již dokreslenými ryskami 3,1 a 4. Důležité je zjištění, že 31 mm = 3,1 cm.
c) Jsou dvě možná řešení: koncový bod je buď na rysce 92 mm, nebo na rysce 48 mm.
Úloha zároveň rozvíjí představu o číselné ose.


1,2 DESETINNÁ ČÍSLA

1 Richard byl v obchodě, ale po cestě domů se mu něco nezdálo.
Zaplatil 202 Kč a přitom nakoupil:

pomeranče	25,40 Kč	zmrzlina	16,90 Kč
džus	23,30 Kč	sýr	29,90 Kč
šunka	31,30 Kč	rybičky	44,90 Kč.

Asi mu něco zaúčtovali dvakrát. Co to bylo?

2 Na obrázku je pravítko dlouhé 10 cm, na kterém ale některé rysky chybí.

a) Dokreslete scházející rysky:
4 5 8 9 2,5 3,5 3,1.
b) Ukažte, jak na tomto pravítku lze naměřit délky:
3 cm 2,5 cm 3,1 cm 2,1 cm 0,9 cm 31 mm 9 mm.
c) Jeden koncový bod úsečky dlouhé 2,2 cm je na rysce 7.
Dokreslete druhý koncový bod.

Čísla, se kterými jsme se potkali v předchozích úlozách, se nazývají **desetinná**.
Číslo 1,7 čteme *jedna celá sedm desetin*. Někdy se říká stručné *jedna celá sedm*.
To ale může vést k nedorozumění.
Číslo 10,32 čteme jako *deset celých třicet dva setin*.

3 Je víc 1,6 m nebo 1,60 m?

DESETINNÁ ČÍSLA 27

Poznámka: Při sazbě učebnice došlo bohužel k nepřesnosti a vzdálenost rysek 0 a 10 není přesně 10 cm. To může být pro některé žáky matoucí. Doporučujeme obrázek přerýsovat do sešitu tak, aby vzdálenost rysek 0 a 10 byla přesně 10 cm a až poté úlohu řešit.

3 Při práci s desetinnými čísly dělá většinou žákům potíže nula připsaná na konec desetinného čísla. Žáci zde mají životní zkušenosti z oblasti financí, protože ceny zboží jsou uváděny v setinách s nulou na konci. V této úloze převádíme zkušenost z oblasti korun na délky. Učitel může položit otázku, zda je více 1,6 m nebo 1,06 m. Nejpochopitelnější pro žáky je příslušné délky někde naměřit. Obrázek přikreslený vpravo dole prozrazuje odpověď. Učitel jej může zpochybnit otázkou, zda to ilustrátor nepopletl.

4 Přechod k anglickým mírám sleduje dva cíle. Prvním je obecně informovat žáky o kulturních odlišnostech, tj. existenci jiných jednotek (pravděpodobně některou jednotku jako míle, stopa či palec již mohou znát). Druhým cílem je pozměnit standardní délkové jednotky a poznat, že číselné vztahy získáné v centimetrech jsou úplně stejné i v palcích. Stejně jako dítě v první třídě porozumí vztahu 2 + 3 = 5 přes modelování pomocí autíček, panenek či prstů, tak i žák v 6. ročníku porozumí vztahu 0,2 + 0,3 = 0,5 přes jeho ukotvení do metrů, centimetrů, palců apod.

Dokreslení rysek „2 in“ a „3 in“ udělá žák přenosem úsečky od „0 in“ do „1 in“. To lze provést kružítkem, proužkem papíru, pravítkem apod. Na zvolené technice nezáleží. Vzdálenosti **b)**, **c)**, **d)** lze naměřit pomocí existujících rysek. Vzdálenost 0,2 in lze získat například pomocí středu intervalu [1,6; 2].

5 První dva trojúhelníky jsou v podstatě stejné. Žáci si toho pravděpodobně všimnou. Do budoucna jim to může poskytnout účinnou strategii, jak s desetinnými čísly pracovat – vlastně mohou pracovat s čísly celými, pokud si desetinná čísla vhodně vynásobí.

Úlohu **c)** by měla vyřešit většina žáků. Úloha **d)** je těžká, vyřeší ji asi jen nejlepší žáci. Úlohy **c)** a **d)** na sebe poukazují. Součet krajních horních čísel je v obou případech 3,4, proto jsou prostřední čísla stejná. Je to 1,4. Neočekáváme, že by si toho mnoho žáků všimlo.

Výsledky: Obrázky **a)** (3; 6; 5), (9; 11), (20) **b)** (0,3; 0,6; 0,5), (0,9; 1,1), (2) **c)** (0,8; 1,4; 2,6), (2,2; 4), (6,2) **d)** (0,9; 1,4; 2,5), (2,3; 3,9), (6,2).

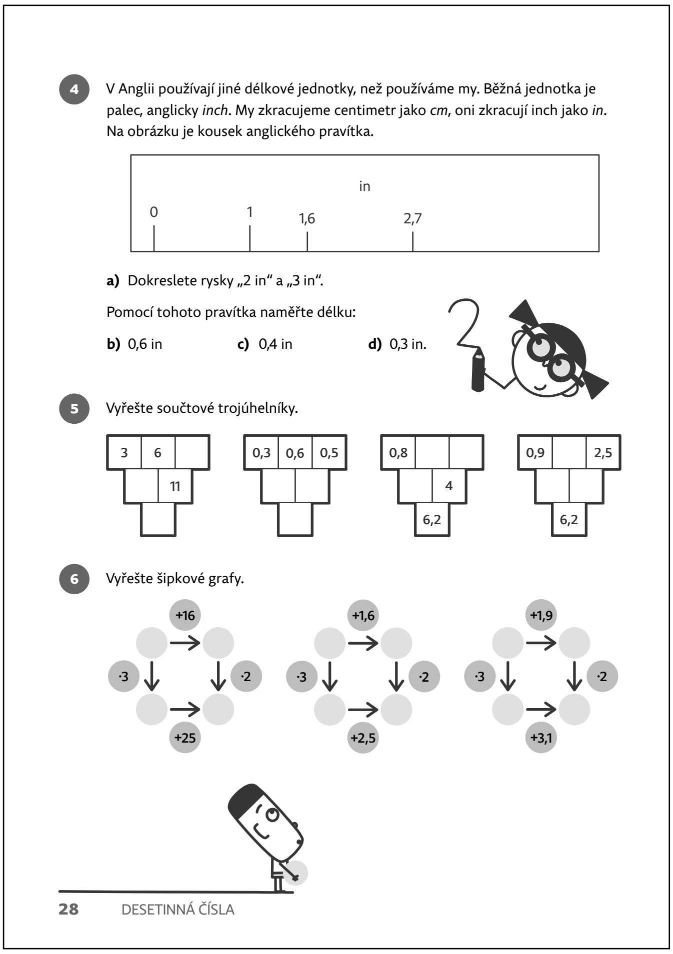
6 Úloha **a)** je přirozeným pokračováním úloh z kapitoly Šipkové grafy. Úloha **b)** je stejná jako úloha **a)** po vydělení 10. Pokud si toho žáci všimnou, jsou blízko objevu, jakým způsobem pracovat s desetinnými čísly. Vlastně s nimi můžeme pracovat stejně jako s čísly celými, pokud je všechna vhodně vynásobíme (zde deseti) a nakonec zase výsledek vhodně vydělíme (zde deseti).

Úloha **c)** je náročnější. Pokud by úlohy **b)** a **c)** byly pro některé žáky příliš náročné, učitel jim může prozradit jedno číslo ve žlutém kroužku (např. pravé horní). Jinou možností je dát nápovědu, že vstupní (levé horní) číslo je mezi 0,5 a 1.

Výsledky: Čísla v levém horním kroužku jsou **a)** 7; **b)** 0,7; **c)** 0,7.

7 Cílem úlohy je upevnit a prohloubit představy žáka o číselné ose. K tomu dochází díky jeho manipulativní činnosti. Zejména vztah mezi desetinami a setinami je zde ve všech třech podúlohách zdůrazněn.

V úloze **a)** musí žák nejprve narýsovat rysku 0,9. Bude-li to dělat odhadem, dojde při řešení podúlohy


4 V Anglii používají jiné délkové jednotky, než používáme my. Běžná jednotka je palec, anglicky *inch*. My zkracujeme centimetr jako *cm*, oni zkracují inch jako *in*. Na obrázku je kousek anglického pravítka.

a) Dokreslete rysky „2 in“ a „3 in“.

Pomocí tohoto pravítka naměřte délku:

b) 0,6 in **c)** 0,4 in **d)** 0,3 in.

5 Vyřešte součtové trojúhelníky.

6 Vyřešte šipkové grafy.

28 DESETINNÁ ČÍSLA

c) pravděpodobně ke konfliktu. Pak svůj nepřesný odhad upřesní. Učitel se může ptát, kolik milimetrů jsou od sebe vzdáleny sousední rysky (je to 2 mm) a zda ty vzdálenosti jsou stejné na celé ose (i v části, kterou žáci dokreslovali).

1 Výsledek: **a)** Maminka váží 90 kg, tatínek 110 kg. **b)** Maminka 90,5 kg, tatínek 110,5 kg.

Žáci objeví aspoň jednu z následujících dvou řešitelských strategií: (1) „začni půlením“, (2) „začni srovnáním vah“. Objeví-li se obě strategie, je dobré nechat žáky oba postupy vysvětlit. Strategie (1) je často propojená s metodou pokus – omyl. Žák napíše 200 = 100 + 100 a pokračuje „tatínek: 100 + 20, maminka: 100 – 20“. Když zjistí chybu, hledá vylepšení a (s přispěním spolužáka) najde správný výsledek. Strategie (2) nevychází z metody pokus – omyl. Je to tato úvaha: „Kdyby měl tatínek o 20 kg méně, mají oba stejně a dohromady mají 180 kg. Takže maminka má 180 : 2 = 90 kg.“

Dle uvážení může učitel zadávat i další čísla pro součet (rozdíl 20 kg se nemění). Díky tomu mohou žáci vylepšovat metodu pokus – omyl k obecněji použitelné řešitelské strategii.

Učitel může zadat i následující úlohu: Tatínek váží o 19 kg více než maminka. Oba dohromady váží 181 kg. Daná čísla poukazují na hezký součet 19 + 181 = 200. To je společná váha obou za předpokladu, že maminka váží o 19 kg více. Odtud váha tatínka je 100 kg. Tato úloha může žáky vést k objevení modifikované strategie (2).

2 Úloha je náročná (i v případě, že se využije kalkulačka). Doporučujeme tuto úlohu nechat žákům na promyšlení doma. Žáci, kteří najdou nějaká řešení, je předvedou třídě. Případně je možné úlohu řešit v rámci hodin informatiky (například pomocí tabulkového editoru).

Matematický termín pro zrcadlová čísla je palindrom. Nemusí se jednat jen o číslo, ale může jít i o slovo nebo větu, která má tu vlastnost, že se čte zleva doprava stejně jako zprava doleva (u vět se obvykle neberou v úvahu mezery a interpunkční znaménka). Nabízí se tak propojení například do češtiny. Na internetu je možné dohledat řadu nečíselných palindromů, například: kajak; Anna; Jelenovi pivo nelej!

S tímto termínem nemívají žáci problémy, a tak je na učiteli, který termín bude preferovat.

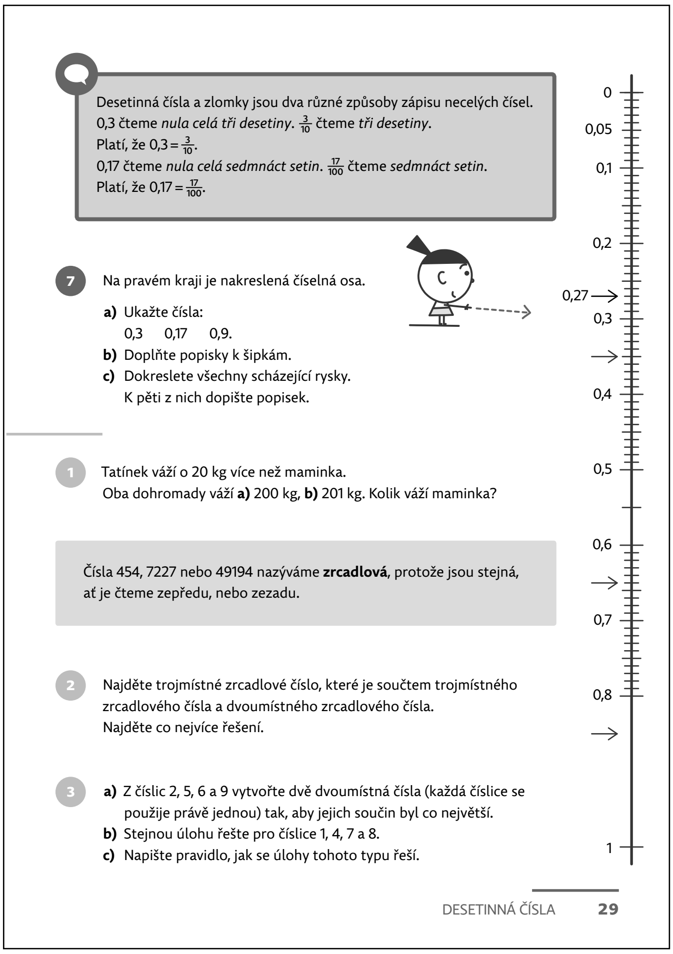
Hledáme cifry A, B, C, D, E takové, že ABA + CC = DED. Ze situace v řádu stovek je D ≤ A + 1; ze situace v řádu jedniček je D ≠ A, tedy D = A + 1 a odtud C = 1. Následně B = 9 a E = 0. Existuje 8 řešení: A9A + 11 = D0D, kde A = 1, …, 8 a D = A + 1.

3 Řešení: **a)** 92 · 65; **b)** 81 · 74; **c)** Dvě největší číslice použijeme na místa desítek. Ze zbývajících dvou číslic dáme tu větší k menším desítkám. Někteří žáci způsob, jakým se úlohy řeší, pouze vypozorují, někteří se budou pokoušet i o zdůvodnění.

Dobré zdůvodnění toho, zda je větší 92 · 65 nebo 95 · 62, by mohlo vypadat například tak, že:

- součin desítek 90 · 60 je stejný, takže tento nehraje roli;
- součin jednotek 2 · 5 je také v obou případech stejný, takže též nehraje roli;
- jde o to, zda je více 2 · 60 + 5 · 90, nebo 5 · 60 + 2 · 90. První případ dá více.

Podobné zdůvodnění žáci téměř jistě nepodají, ale mohou se o to v rámci svých možností pokusit. Učitel nepřesné zdůvodnění nemusí hodnotit, stačí se jen zeptat třídy, zda mu ostatní rozumí. Někteří možná porozumí,


Desetinná čísla a zlomky jsou dva různé způsoby zápisu necelých čísel.
0,3 čteme *nula celá tři desetiny*. $\frac{3}{10}$ čteme *tři desetiny*.
Platí, že $0,3 = \frac{3}{10}$.
0,17 čteme *nula celá sedmnáct setin*. $\frac{17}{100}$ čteme *sedmnáct setin*.
Platí, že $0,17 = \frac{17}{100}$.

7 Na pravém kraji je nakreslená číselná osa.
a) Ukažte čísla:
0,3 0,17 0,9.
b) Doplňte popisky k šipkám.
c) Dokreslete všechny scházející rysky. K pěti z nich dopište popisek.

1 Tatínek váží o 20 kg více než maminka.
Oba dohromady váží **a)** 200 kg, **b)** 201 kg. Kolik váží maminka?

Čísla 454, 7227 nebo 49194 nazýváme **zrcadlová**, protože jsou stejná, ať je čteme zepředu, nebo zezadu.

2 Najděte trojmístné zrcadlové číslo, které je součtem trojmístného zrcadlového čísla a dvoumístného zrcadlového čísla.
Najděte co nejvíce řešení.

3 **a)** Z číslic 2, 5, 6 a 9 vytvořte dvě dvoumístná čísla (každá číslice se použije právě jednou) tak, aby jejich součin byl co největší.
b) Stejnou úlohu řešte pro číslice 1, 4, 7 a 8.
c) Napište pravidlo, jak se úlohy tohoto typu řeší.

DESETINNÁ ČÍSLA 29

někteří rozumět nejspíše nebudou, což ale nevadí. Vytváří se tak později potřeba mít nástroj, který přesvědčí téměř všechny, tímto nástrojem bude algebra.

Zformulovat pravidlo v úloze **c)** je snazší, když jsou prostřední číslice stejné (např. 2, 5, 5, 9). Učitel má tak možnost úlohu **c)** zjednodušit.

Součtové trojúhelníky

2 Píšeme jen první řádek součtového trojúhelníku.

Výsledky: **b)** (19; 24; 43; 46), **c)** (2; 0,6; 0,9; 1,1), **d**) (1,9; 2,4; 4,3; 4,6).

Žáci, kteří nepoužívali naše učebnice na prvním stupni, mohou potřebovat více jednoduchých úloh („malé“ trojúhelníky s malými čísly). Žáci mají v těchto úlohách možnost objevit a diskutovat vztahy mezi trojúhelníky v úlohách **a)** a **c)** a též v **b)** a **d)**. Čísla v zadání trojúhelníku c) jsou desetinami čísel v trojúhelníku **a)**. Podobně čísla v **d)** jsou desetinami čísel v **b)**.

3 Ve výsledcích uvádíme jen první řádky.

Výsledky: **a)** (8, 9, 19) nebo symetricky (19, 9, 8), **b)** (13, 21, 14) nebo symetricky, **c)** dvě řešení: (21, 43, 38) a (26, 38, 43) a k nim symetrická, **d)** tři řešení v oboru přirozených číslech: (14, 51, 11), (51, 14, 48) a (62, 14, 37) a všechna symetrická. Lze najít ještě „řešení“ se záporným číslem: (14, 62, –11) a symetrické k němu.

Úlohy slouží zejména k mnohému počítání, proto metodu pokus – omyl podpoříme. Počítáme s tím, že již všichni žáci zde objeví, že dolní číslo je to největší. Bude-li učitel považovat řešení za příliš zdlouhavé, zadá úlohu na doma.

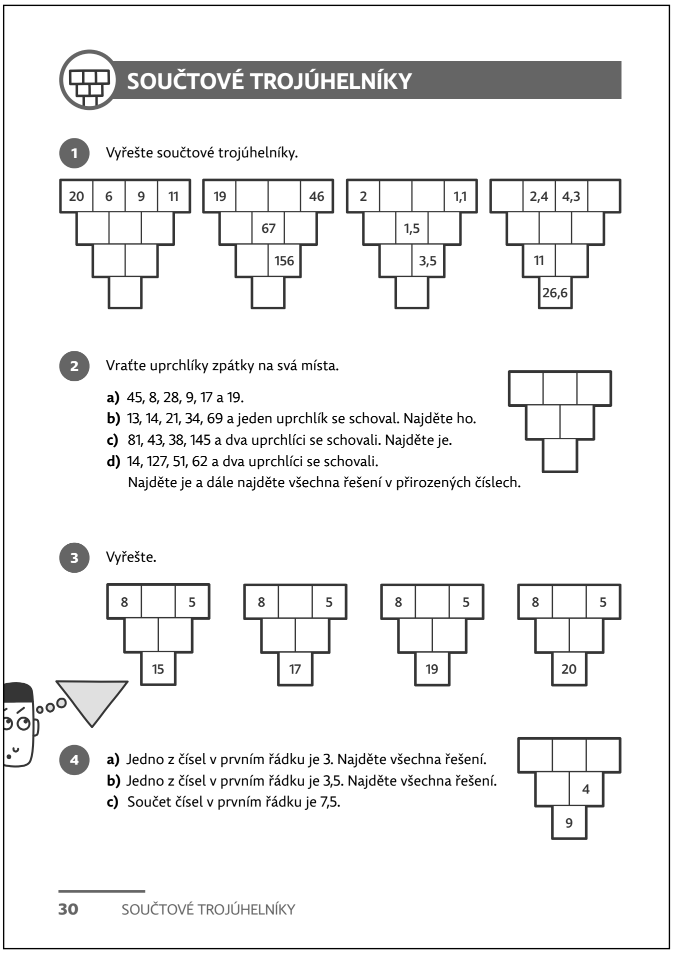
V úlohách **b)**, **c)**, **d)** může slabším žákům učitel prozradit uprchlíky. V úlohách **c)**, **d)** je možno prozradit nejdříve jednoho uprchlíka.

V části **c)** nám bude stačit, když žáci najdou aspoň jedno řešení. Při prezentaci výsledků se nejspíše obě řešení objeví na tabuli. Pokud ne, může to dát učitel jako výzvu pro individuální práci. V části **d)** se již všechna řešení v přirozených číslech vyžadují. Šikovní žáci mohou najít i řešení s jedním číslem záporným.

4 Úloha je určena především pro žáky, kteří se s prostředím Součtových trojúhelníků teprve seznamují. Série úloh vede k objevení závislosti „když horní prostřední číslo roste o 1, dolní číslo roste o 2“. V úloze **d)** se záměrně objevuje necelé číslo (případně zlomek).

Výsledky: prostřední čísla prvního řádku jsou postupně (1; 2; 3; 3,5).

5 **a)** Číslo 3 může být na jakémkoliv místě, tedy úloha má 3 řešení. První řádek: (4, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 2, 2).


SOUČTOVÉ TROJÚHELNÍKY

1 Vyřešte součtové trojúhelníky.

2 Vraťte uprchlíky zpátky na svá místa.

a) 45, 8, 28, 9, 17 a 19.
b) 13, 14, 21, 34, 69 a jeden uprchlík se schoval. Najděte ho.
c) 81, 43, 38, 145 a dva uprchlíci se schovali. Najděte je.
d) 14, 127, 51, 62 a dva uprchlíci se schovali. Najděte je a dále najděte všechna řešení v přirozených číslech.

3 Vyřešte.

4 a) Jedno z čísel v prvním řádku je 3. Najděte všechna řešení.
b) Jedno z čísel v prvním řádku je 3,5. Najděte všechna řešení.
c) Součet čísel v prvním řádku je 7,5.

30 SOUČTOVÉ TROJÚHELNÍKY

b) Oproti předchozí úloze se objeví necelá čísla. Výsledky: (3,5; 1,5; 2,5), (1,5; 3,5; 0,5), (4,5; 0,5; 3,5).
c) První řádek je (3,5; 1,5; 2,5).

6 Úlohy **a)**, **b)**, **c)** jsou voleny záměrně tak, aby na sebe poukazovaly. V úloze **d)** je nutné použít necelé číslo, čímž je rytmus **a) b) c)** narušen.

Žákovi, který zvládne i úlohu **d)** můžeme dát sofistikovaný problém změnit číslo 11 tak, aby pravé horní číslo nebyla 0. Tato úloha nemá řešení.

Výsledky: **a)** (18; 1; 0), **b)** (16; 2; 0), **c)** (14; 3; 0), **d)** (11; 4,5; 0).

7 Hlavním cílem úlohy je vést žáky k poznání, že mnohé zákonitosti lze odhalit pomocí tabulky. Učitel může tabulku nakreslit a vyzvat žáky, aby doplnili další sloupce.

	5	6	7			
	25	24				

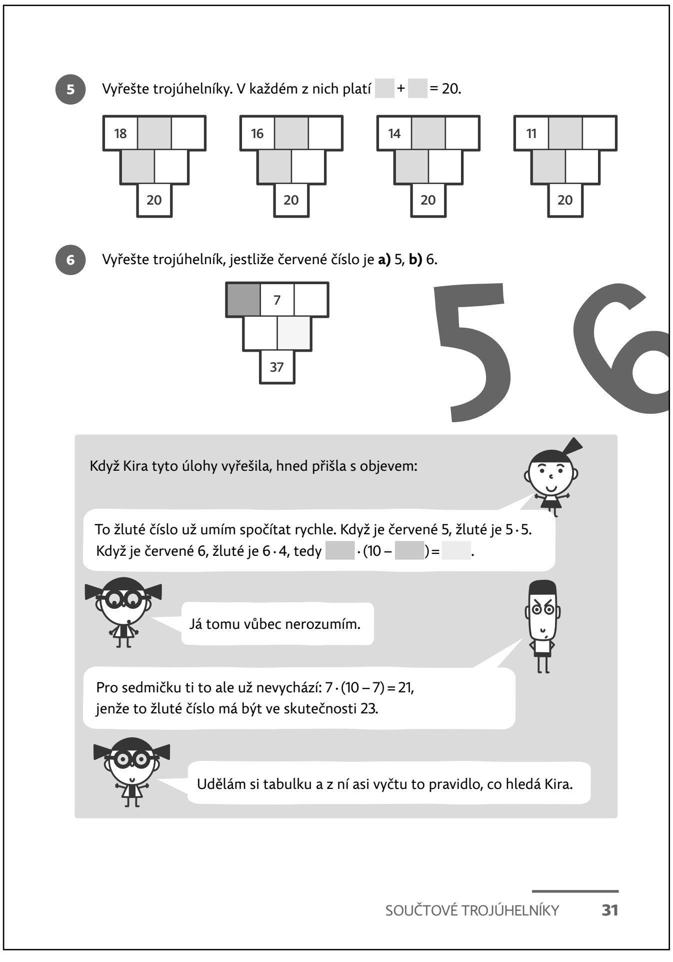
Lze očekávat, že se najde žák, který objeví vztah + = 30. Z něj je ihned vidět, jak se ze znalosti červeného čísla vypočte žluté (případně obráceně). Pokud tabulka vzniká chaoticky, učitel nechá žáky, aby sami dospěli k poznání, že pro objevování zákonitostí je výrazně lepší tabulka systematická. Pokud nikdo vztah neobjeví, může dát učitel výzvu „najděte vztah“ (např. za domácí úkol). Vyspělých žáků se může učitel zeptat, zda tento vztah platí, i když se jedná o čísla záporná, desetinná, případně i o zlomky.

1 Žákům, kteří bezpečně vyřešili všechny podúlohy může dát učitel úlohu doplňující: Kira při řešení této úlohy do některých modrých koleček dopsala násobení, ne sčítání. Víte, do kterých koleček se to tak dalo udělat?

Výsledky: dopněná čísla po řadě zleva do prava: **a)** 14, +10; **b)** 27, +54 nebo 3; **c)** +2,7, 7,9; **d)** +14,4 nebo 2, +28,8 nebo 3.

2 Řešení: Uvádíme číslo vlevo, prostřední číslo a číslo vpravo. **a)** 8, 5, 17; **b)** 9, 6, 15; **c)** 10, 7, 13; **d)** 11, 8, 11; **e)** 12, 9, 9; **f)** 13, 10, 7; **g)** 14, 11, 5.

Úloha je důležitá zejména překvapivým výskytem záporného čísla, které se přičítá. V modrém poli je napsá-


5 Vyřešte trojúhelníky. V každém z nich platí + = 20.

18, 20; 16, 20; 14, 20; 11, 20

6 Vyřešte trojúhelník, jestliže červené číslo je **a)** 5, **b)** 6.

7, 37

Když Kira tyto úlohy vyřešila, hned přišla s objevem:

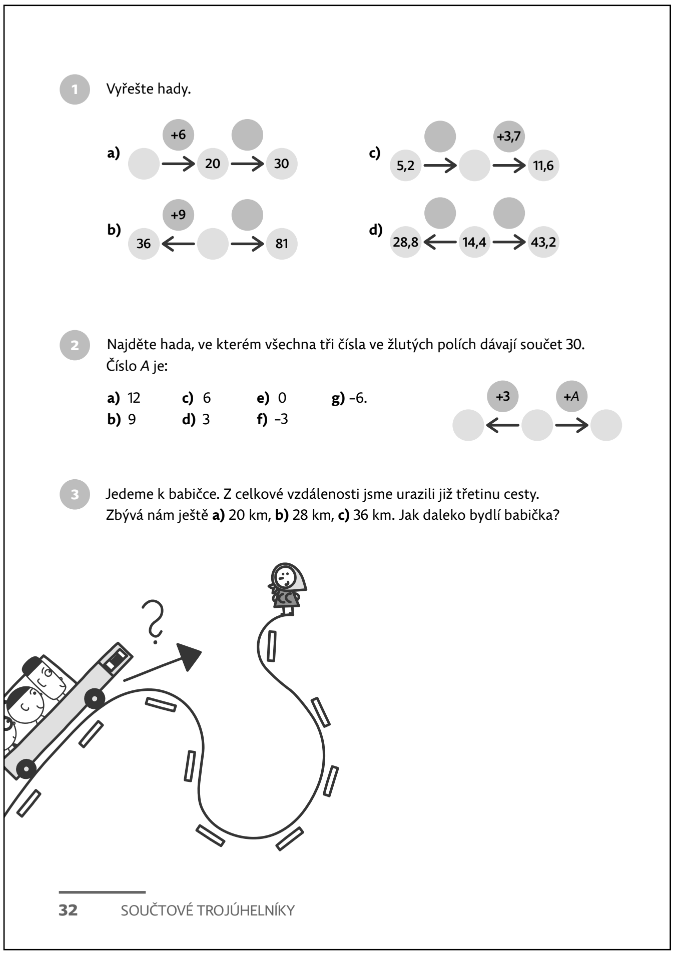
To žluté číslo už umím spočítat rychle. Když je červené 5, žluté je 5 · 5.
Když je červené 6, žluté je 6 · 4, tedy · (10 –) = .

Já tomu vůbec nerozumím.

Pro sedmičku ti to ale už nevychází: 7 · (10 – 7) = 21,
jenže to žluté číslo má být ve skutečnosti 23.

Udělám si tabulku a z ní asi vyčtu to pravidlo, co hledá Kira.

SOUČTOVÉ TROJÚHELNÍKY 31


1 Vyřešte hady.

a) +6; 20, 30
b) +9; 36, 81
c) +3,7; 5,2, 11,6
d) 28,8, 14,4, 43,2

2 Najděte hada, ve kterém všechna tři čísla ve žlutých polích dávají součet 30.
Číslo *A* je:

a) 12 **c)** 6 **e)** 0 **g)** –6.
b) 9 **d)** 3 **f)** –3

+3, +*A*

3 Jedeme k babičce. Z celkové vzdálenosti jsme urazili již třetinu cesty.
Zbývá nám ještě **a)** 20 km, **b)** 28 km, **c)** 36 km. Jak daleko bydlí babička?

?

32 SOUČTOVÉ TROJÚHELNÍKY

no + A, ale A je i záporné číslo. Někteří žáci mohou říct, že to nedává smysl. Jiní budou pokračovat ve vypozorovaném pravidle: Číslo vlevo se zvětší o 1, prostřední číslo také a číslo vpravo klesne o 2. Žáci tak získávají důležitou zkušenost, že záporné číslo lze přičíst. Tato zkušenost bude dále ještě posílena v prostředí krokování. Získané zkušenosti vyústí například v objevení řešení rovnice $5 + x = 3$ v oboru celých čísel.

Úloha je navíc i propedeutikou rovnic. Hledáme tři čísla, a to číslo prostřední (x), číslo vlevo ($x + 3$) a číslo vpravo ($x + A$). Známe jejich součet (s), dostaneme tedy rovnici $3x + 3 + A = s$. Od žáků neočekáváme, že úlohu budou řešit výše popsaným algebraickým způsobem, ale někteří ji mohou řešit způsobem nebo úvahou, která je algebraickému postupu velmi blízká.

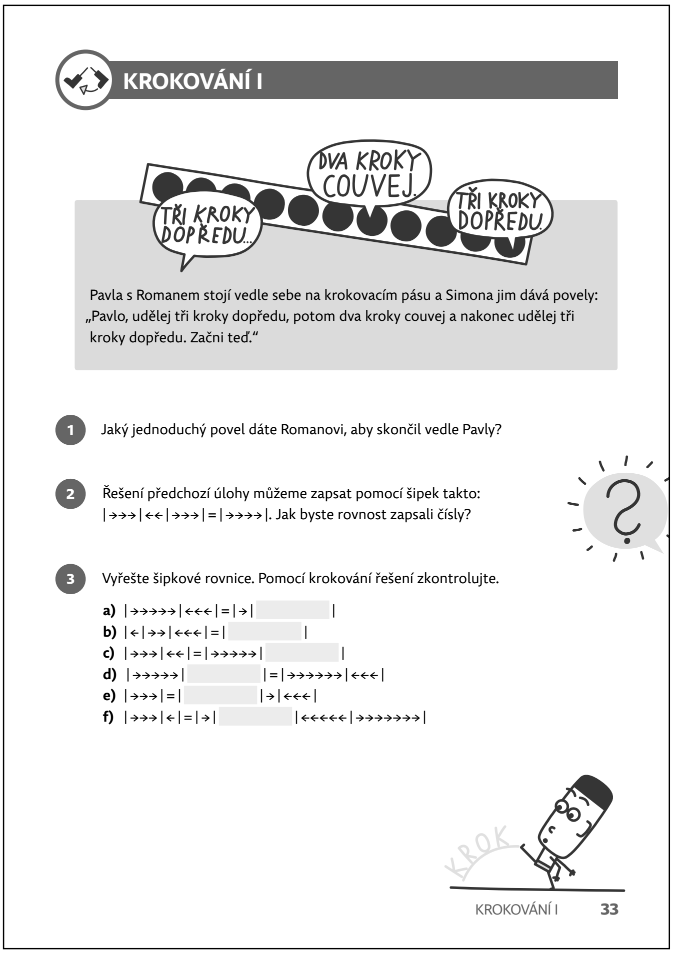
3 Úloha je stejná jako úloha o zlomcích z Ochutnávky. Pokud si toho žáci všimnou, je to dobře. Úlohy **a)**, **b)**, **c)** vedou k objevu obecně použitelného postupu „vydělím dvěma a vynásobím třema“. Učitel může podobnou úlohu zadávat opakovaně, přičemž třetinu zamění za čtvrtinu (nebo jiný zlomek). Je přitom vhodné dbát na to, aby vycházela celá čísla, a úloha tak nebyla zatížena numericky. Žákům, kteří umí pro úlohu s třetinou zformulovat obecně použitelný postup, lze úlohu vygradovat tak, aby vyšlo necelé číslo.

Výsledky: **a)** 30 km, **b)** 42 km, **c)** 54 km.

Krokování I

Na prvním stupni se zavádí prostředí krokování již od začátku první třídy. Děti používají krokování k výpočtům, k řešení rovnic s jednou i se dvěma neznámými. Největším přínosem prostředí je, že snadno buduje představy o záporném čísle (kroky pozpátku a později v krokování na schodech i záporné číslo jako označení schodu) a o operaci mínus před závorkou. Na druhém stupni již nemusíme budovat číselné představy, tedy prostředí můžeme zavést velice rychle. Není třeba věnovat tolik pozornosti práci se samotnými šipkovými zápisy a řešením jednoduchých rovnic. Pokud jde o povelovou techniku, je třeba každý povel končit příkazem „začni teď“. Když to opomeneme, často žáci během vydávání povelu začnou krokovat, což vede ke zmatku. Úlohy orientujeme rovnou tam, kam potřebujeme – práci se zápornými čísly, řešení rovnic a odčítání závorky (mínus před závorkou).

Vyzkoušejte se svými žáky, jak nejlépe realizovat proces krokování. Je možné fyzicky chodit po třídě po krokovacím pásu. Pokud není ve třídě dostatek prostoru na to, aby nějaké dítě chodilo po pásu a ostatní mohly jeho kroky sledovat, je možné nalepit či nakreslit pás na tabuli a „chodit“ po něm obrázkem, panáčkem, plyšákem. Děti mohou mít na lavici svůj malý krokovací pás a chodit po něm figurkou. Na začátku by si měli nějaký způsob krokování zkusit všichni žáci, zvlášť je to důležité pro ty, kteří s krokováním nepracovali na prvním stupni. Někteří žáci ho budou možná chtít používat ve všech úlohách, někteří už upřednostní mentální operaci, práci rovnou s čísly. Dělají-li to bez chyb, necháme je. V opačném případě je vyzýváme, aby svá řešení testovali na krokovacím páse. Ke krokování se také můžeme vracet při diskusích o správném řešení.


KROKOVÁNÍ I

Pavla s Romanem stojí vedle sebe na krokovacím pásu a Simona jim dává povely: „Pavlo, udělej tři kroky dopředu, potom dva kroky couvej a nakonec udělej tři kroky dopředu. Začni teď.“

1 Jaký jednoduchý povel dáte Romanovi, aby skončil vedle Pavly?

2 Řešení předchozí úlohy můžeme zapsat pomocí šipek takto: |→→→|←←|→→→|=|→→→→|. Jak byste rovnost zapsali čísly?

3 Vyřešte šipkové rovnice. Pomocí krokování řešení zkontrolujte.

a) |→→→→→|←←←|=|→| |
b) |←|→→|←←←|=| |
c) |→→→|←←|=|→→→→→| |
d) |→→→→→| |=|→→→→→→→|←←←|
e) |→→→|=| |→|←←←|
f) |→→→|←|=|→| |←←←←←|→→→→→→→→|

KROKOVÁNÍ I 33

Pro slabší žáky je dobré, když krokovací pás leží rovnoběžně s tabulí a na tabuli je šipkový zápis, přičemž figurant krokuje stejným směrem, jakým ukazují šipky na tabuli.

1 Věříme, že není potřeba vyjasňovat, co je jednoduchý povel. Je to například povel: udělej tři kroky dopředu, začni teď. V případě potřeby uzavřeme dohodu, že jednoduchý pokyn obsahuje jen jedno číslo. Není to úplně přesné, ale mělo by to vyjasnit případná nedorozumění. Nejčastějším nedorozuměním je to, že do jednoho boxu žák napíše šipky obou směrů.

Výsledek: „Romane, udělej čtyři kroky dopředu, začni teď.“

2 Většina žáků nejspíš povely přepíše jako $3 - 2 + 3 = 4$. To je pro tuto chvíli dobré řešení. Učitel se může zeptat na doplňující otázku, jak lze přepsat pouze povel |←←|.

Výsledek: $3 - 2 + 3 = 4$

3 Úlohy **e)** a **f)** jsou náročnější tím, že neznámé číslo není na konci zápisu. Jinak slouží tyto úlohy především pro ty žáky, kteří prostředí z prvního stupně neznají.

Výsledky: a) →, b) ←←, c) ←←←←, d) ←←, e) →→→→→, f) ←

Poznámka k rozhovoru: Termín „kork“ vymysleli kdysi dávno žáci. Jediným slovem „kork“ (které je navíc vtipně provázáno na „krok“) jsme schopni říct „jeden krok pozpátku“. Žáci, kteří toto slovo odmítají, mohou používat „krok pozpátku“ nebo „couvání“.

4 Úloha je zaměřená na pozorné čtení. Podúloha **c)** se vrací k úlohám ze cvičení 3, je tedy potřeba napsat rovnici.

Výsledky: **a)** |⇷←|→→→→→|⇷| nebo – 2 + 5 – 1;
b) ‖→→→→→‖←←←|⇷←←←|| nebo 5 – 3 – 4;
c) ‖←←←←‖   ‖ = ‖←|| nebo – 4 + *x* = – 1

5 Otevíráme důležitou oblast krokování: soustavu rovnic, z nichž jedna je s absolutní hodnotou. Jak ve vyšších ročnících žáci zjistí, můžeme úlohu **a)** přepsat do soustavy rovnic $3 + x = 1 + y$, $|x| + |y| = 2$. Taková soustava je i pro žáka 9. ročníku náročná, ale je-li schopen rovnici modelovat v prostředí krokování, nejen že rovnici vyřeší, ale pochopí funkci absolutní hodnoty, která se zde vyskytuje.

Argumentace průměrného žáka k úloze **c)** bývá: Zkoušel jsem to, to se řešit nedá. Argumentace sofistikovaná zní: Všech šipek, které nakonec v rovnosti jsou, musí být sudé číslo. Ale 3 + 2 = 5, a to je liché. Jestliže žádný žák takovou argumentaci neobjeví, je možné, že následující úloha některého žáka k tomu dovede.

Úlohy zapsané pomocí šipkových rovnic lze pro lepší představu, zejména pro žáky, kteří preferují dramatizaci, formulovat i následovně: **a)** Na krokovacím pásu se postaví vedle sebe dva žáci, pro teď A a B. A dostane povel: *Udělej tři kroky vpřed, začni teď.* B dostane povel: *Udělej jeden krok vpřed, začni teď.* Poté je ulohou žáků, aby se opět potkali vedle sebe, a to za použití právě dvou kroků dohromady. Žáci zde objevují zákonitost, že úloha může mít řešení pouze tehdy, má-li číslo udávající vzdálenost mezi danými čísly (žáky) a počet doplňovaných šipek (kroků) stejnou paritu.

Výsledky: **a)** 3 řešení: $(x, y) = (0, 2), (-1, 1), (-2, 0)$; **b)** 3 řešení: $(x, y) = (2, 0), (1, -1), (0, -2)$; **c)** nemá řešení.

6 Pro některé žáky bude překvapením, že úloha **a)** i **c)** se dá řešit pouze pomocí 3 šipek (2 řešení), úloha **b)** pouze pomocí 2 šipek (3 řešení). Toto zjištění může některého žáka dovést k poznání o paritě šipek v každém řešení. V případě, že k tomu nedojde a učitel chce žákům k objevu pomoct, dá jim úlohu: Najděte šipkovou rovnici, která půjde vyřešit doplněním právě 2 i doplněním právě 3 šipek.

Výsledky: **a)** 2 řešení: $(x, y) = (-1, -2), (2, 1)$; **b)** 3 řešení: $(x, y) = (-2, 0), (-1, -1), (0, -2)$; **c)** 2 řešení: $(x, y) = (-1, -2), (2, 1)$.

7 Úloha má celkem 6 řešení. Když použijeme 3 šipky, existují 4 řešení. Když použijeme 5 šipek, existují 2 řešení. Žák, který úlohu takto komplexně vyřeší, má již vyřešenu i úlohu následující. Očekáváme však, že většina žáků tuto úlohu až tak komplexně nevyřeší a k hlubšímu pohledu je dovede až úloha následující.

Úlohu je vhodné řešit kolektivně. Snadněji se tak objeví více řešení a rozebírá se otázka existence dalších.

Výsledky: Pro 3 šipky má úloha 4 řešení: $(x, y) = (3, 0), (2, -1), (1, -2), (0, -3)$. Pro 5 šipek má úloha 2 řešení: $(x, y) = (4, 1), (-1, -4)$.

8 Úloha je náročná na porozumění textu, a není tedy vhodná pro všechny žáky.

Řešení: Úloha má požadovaný počet řešení pouze pro 3 šipky, kdy má 4 řešení: $(x, y) = (3, 0), (2, -1), (1, -2), (0, -3)$. Pro sudá čísla a číslo 1 úloha řešení nemá, pro všechna ostatní lichá čísla má úloha pouze dvě řešení.

Žákovi, který do úloh tohoto typu dobře vidí, může dát učitel úlohu ještě náročnější: Vytvořte rovnici stejného typu tak, aby počet řešení této rovnice byl 7.

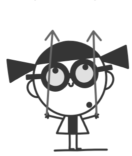
Kira začala číst úlohu **a)** takto: „Udělej 5 kroků a pak 3 korky. Začni teď."
Elmar: „Co to je za blbost ten kork?"
Kira přijde k tabuli a napíše KROK: „Přečti si to pozpátku."

4 Přepište pomocí šipek nebo čísel následující povely.

a) Udělej 2 korky, pak 5 kroků a nakonec 1 kork. Začni teď.
b) Udělej 5 kroků, pak 3 korky a pak 4 korky. Začni teď.
c) Udělej 4 korky a pak proveď ještě jeden povel tak, aby to vyšlo stejně, jako kdybys udělal rovnou 1 kork.

5 Každou šipkovou rovnici vyřešte pomocí právě 2 šipek.

a) |→→→| | = |→| |
b) |←| | = |→| |
c) |→→| | = |→| |



Hledejte více řešení.

6 Šipkovou rovnici vyřešte pomocí právě 2 nebo právě 3 šipek.

a) |→| | = |→→| |
b) |→→→| | | = |→|
c) |←←| | = |←| |

Hledejte více řešení.

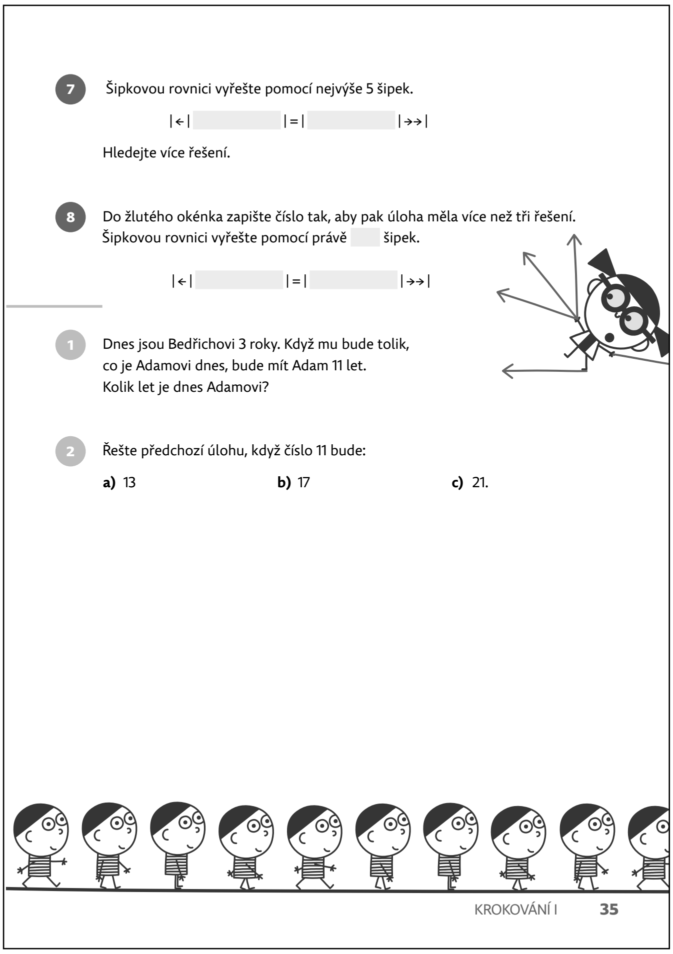
34 KROKOVÁNÍ I

Řešení: Doplňovat budeme 6 šipek. Na přesné poloze figurantů nezáleží, důležité je, že vzdálenost mezi nima je také 6. Řešení pak bude 7, a to: (x, y) = (6, 0), (5, –1), (4, –2), (3, –3), (2, –4), (1, –5), (0, –6).

1 Výsledek: Adamovi je 7 let.

Úlohy o věku je možné dramatizovat pomocí krokování (na schodech nebo na očíslovaném krokovacím pásu). Učitel dramatizaci zorganizuje – rozdělí role Adama, Bedřicha, boha času „Chrona“ a Výsledku. Bedřich se postaví na 3. schod, Adam se postaví na číslo, které žáci navrhnou (např. na 6. schod). Vedle něj se postaví Výsledek, který zůstane stát po celou dobu. Bůh času řekne „uplynul jeden rok teď“ a Adam s Bedřichem postoupí o schod výše. Toto se opakuje tak dlouho, dokud Bedřich nestojí vedle Výsledku nebo Adam na 11. schodu. Dojde-li k těmto událostem najednou, úloha je vyřešena. V opačném případě nám pokus nevyšel a žáci navrhnou změnu schodu, na kterém má stát Výsledek.

Dramatizaci lze doplnit o roli Hlasatele a Zapisovatele. Hlasatel hlásí „Adamovi jsou 4 roky, Bedřichovi je 7 let. Ještě nejsme hotovi.“ Zapisovatel píše údaje do tabulky.



7 Šipkovou rovnici vyřešte pomocí nejvýše 5 šipek.

|←| |=| |→→|

Hledejte více řešení.

8 Do žlutého okénka zapište číslo tak, aby pak úloha měla více než tři řešení. Šipkovou rovnici vyřešte pomocí právě šipek.

|←| |=| |→→|

1 Dnes jsou Bedřichovi 3 roky. Když mu bude tolik, co je Adamovi dnes, bude mít Adam 11 let. Kolik let je dnes Adamovi?

2 Řešte předchozí úlohu, když číslo 11 bude:

a) 13 **b)** 17 **c)** 21.

KROKOVÁNÍ I 35

2 Cílem je odhalit pravidlo, kterým se tato situace řeší: současný věk Bedřicha a finální věk Adama se sečtou a součet se vydělí dvěma.

Výsledky: **a)** 8, **b)** 10, **c)** 12.

Dřívka II

1 V první kapitole o dřívkách žáci odhalili, že n-násobným zvětšením útvaru se jeho obvod zvětší též n-násobně. Cílem úloh 1 a 3 je dovést žáky k poznání, že n-násobným zvětšením útvaru se jeho obsah zvětší n^2-krát. V úlohách žáci řeší pouze případy n = 2, 3, 4. Zvídavější žáci se samostatně začnou zajímat o zvětšení pro n = 5, 6,… Když k tomu nedojde, učitel je může vyzvat, aby hledali zákonitost pro větší čísla.

Výsledky: **a)** 8 ■; **b)** 18 ■; **c)** 32 ■.

2 Úloha leží mimo hlavní myšlenkový tah matematiky v 6. ročníku a je určena pouze jako náročná výzva pro špičkové žáky.

Tak jako jsme v první kapitole o dřívkách rozkládali velký trojúhelník na základní trojúhelníky, je tentokrát rozkládán obdélník na čtverce 1l. Počet dřívek, kterými se rozklad udělá, je v tabulce.

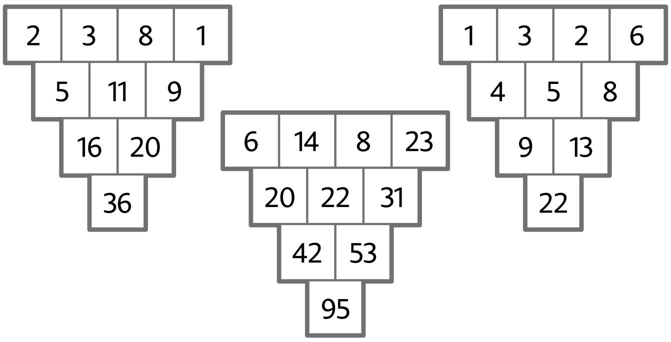
rozměry	2 × 1	4 × 2	6 × 3	8 × 4	10 × 5
počet dřívek	1	10	27	52	85

Umět předpovědět další sloupec tabulky je pro žáky hodně obtížné. Žák, který si všimne, že posloupnost diferencí 9, 17, 25, 33 je aritmetická s diferencí 8, našel způsob, jak tabulku dále prodloužit. Špičkový žák (pravděpodobně s nějakým časovým odstupem) zjistí, že pro obdélník $2n \times n$ je počet dřívek dán vztahem $n(4n-3)$. Jestliže některý žák najde v této úloze zalíbení, ale je nad jeho síly (navzdory velké námaze) vztah odhalit, poradí mu učitel, aby horní tabulku doplnil o další řádek, ve kterém bude číslo z řádku druhého vyděleno menším rozměrem obdélníku. První čísla tohoto řádku budou: 1, 5, 9, 13, 17.

3 Cílem úlohy je dát žákům další zkušenost s tím, že n-násobným zvětšením tvaru se obsah zvětšuje n^2-krát.

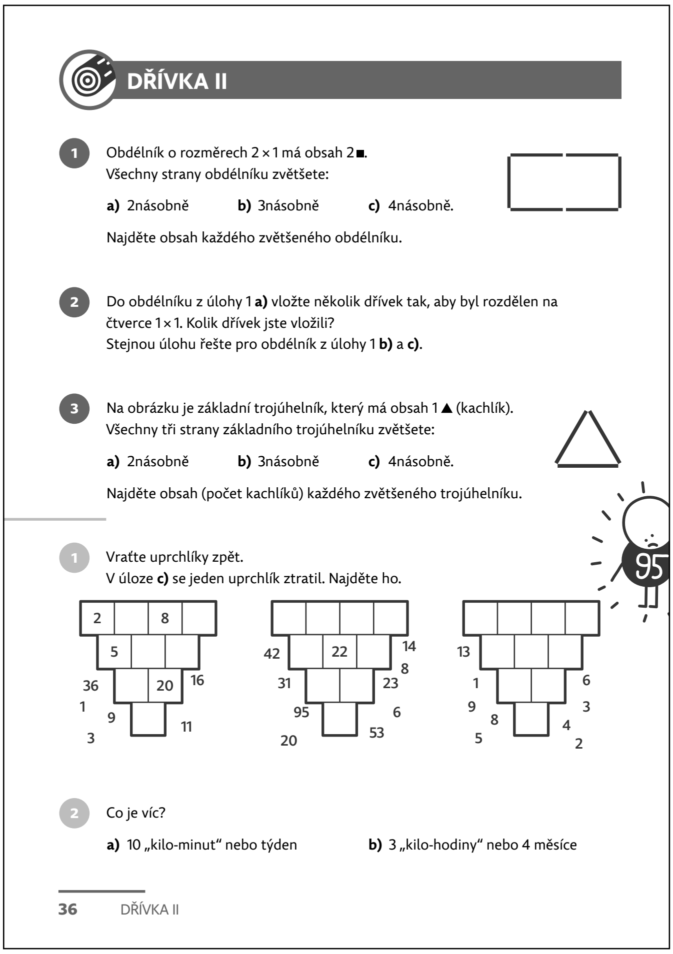
Výsledky: **a)** 4 ■, **b)** 9 ■, **c)** 16 ■.

1 Výsledky: Součtové trojúhelníky lze v případě **b)** a **c)** doplnit i zrcadlově k zde uvedeným.



2 Výsledky: **a)** Týden má 7 dní = 7 · 24 hodin = 7 · 24 · 60 minut = 10 080 minut > 10 kilo-minut.

b) Pojem měsíc není z hlediska času zcela jednoznačný. Je možné se dohodnout, že budeme počítat měsíc jako 30 dní. Nicméně i kdybychom počítali každý měsíc jako 31 dní, zjistíme, že 4 měsíce by byly 4 · 31 dní = 4 · 31 · 24 hodin = 2 976 hodin < 3 kilo-hodiny.



DŘÍVKA II

1 Obdélník o rozměrech 2 × 1 má obsah 2 ■.
Všechny strany obdélníku zvětšete:

a) 2násobně **b)** 3násobně **c)** 4násobně.

Najděte obsah každého zvětšeného obdélníku.

2 Do obdélníku z úlohy 1 **a)** vložte několik dřívek tak, aby byl rozdělen na čtverce 1 × 1. Kolik dřívek jste vložili?
Stejnou úlohu řešte pro obdélník z úlohy 1 **b)** a **c)**.

3 Na obrázku je základní trojúhelník, který má obsah 1 ▲ (kachlík).
Všechny tři strany základního trojúhelníku zvětšete:

a) 2násobně **b)** 3násobně **c)** 4násobně.

Najděte obsah (počet kachlíků) každého zvětšeného trojúhelníku.

1 Vraťte uprchlíky zpět.
V úloze **c)** se jeden uprchlík ztratil. Najděte ho.

2 8 5 36 20 16 1 9 3 11

42 22 14 8 31 23 95 6 20 53

13 1 6 9 3 8 4 5 2

95

2 Co je víc?

a) 10 „kilo-minut“ nebo týden **b)** 3 „kilo-hodiny“ nebo 4 měsíce

36 DŘÍVKA II

Rovnice

1 Výsledky: **a)** 5, **b)** 7, **c)** 3, **d)** 6, **e)** –5, **f)** –5.

Většina žáků princip rovnic chápe a tato úloha je pro ně velice jednoduchá. Nicméně pro část žáků bude zřejmě tento úvod do rovnic užitečný. Symbol obálky je zvolen záměrně proto, že připomíná písmeno *x*.

Těžší úloha je **c)**, kde se objeví záporné číslo. Velká část žáků má problém s řešením rovnice **f)** 6 + *x* = 1, protože zápis zápis + (–5) považují za nemožný. Žádají, aby bylo rovnou napsáno –5. Těmto žákům je určen rozhovor, který po úloze vedou Kira a Ariana.

Nebude překvapivé, když někteří žáci přes ujištění Kiry budou o zápisu 6 + (–5) pochybovat stejně jako Ariana. Věříme, že po jisté době ten zápis přijmou.

2 Výsledky: **a)** 6, **b)** 4, **c)** 3, **d)** –3, **e)** –3, **f)** –7.

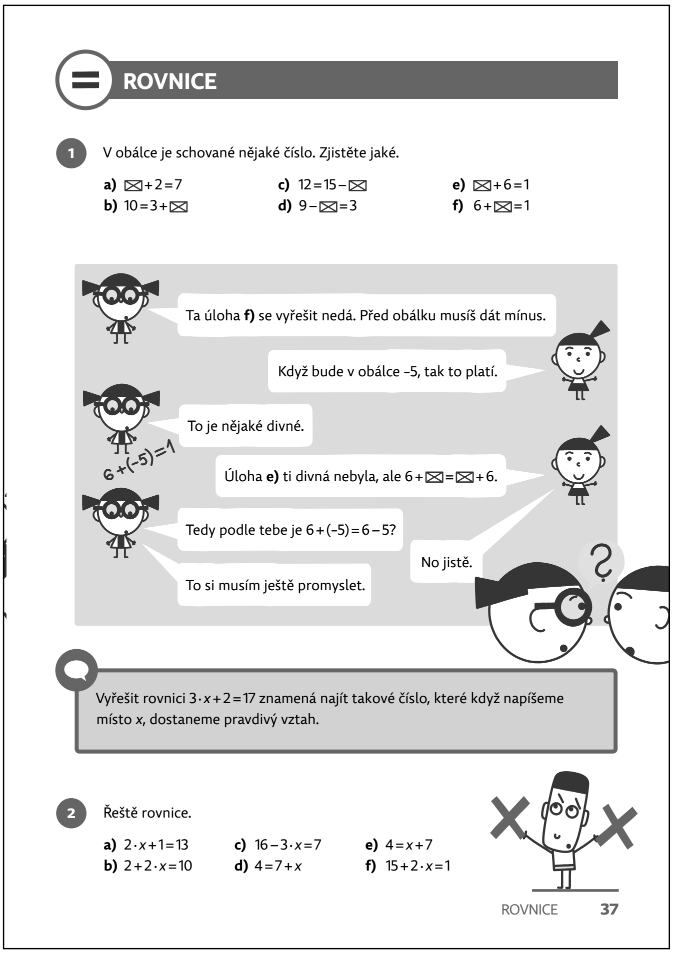
Zavádíme neznámou *x*, která v první úloze byla zastoupena obálkou. Dvojice úloh **d)**, **e)** opakuje to, co u úlohy 1 představovala dvojice **c)**, **f)**. Úloha **f)** je náročnější. Úlohy většina žáků řeší metodou pokus – omyl. Někteří žáci mohou používat i jiné strategie řešení. Např. u úlohy **a)** od třináctky odečtou 1 a výsledek vydělí 2. Můžeme tyto žáky vyzvat, ať ukážou svůj postup ostatním. Nicméně učitel žádné postupy řešení nenabízí (kromě povbuzení pro ty, kdo si vůbec nevědí rady: zkoušej dávat za *x* různá čísla). Někteří žáci budou potřebovat vyřešit spoustu rovnic pracným zkoušením metodou pokus – omyl, než budou připraveni na použití účinnějších strategií.

3 Výsledky: **a)** 3 – 2 = 7 + *x*, *x* = –6, **b)** –4 + *x* + 7 = 3 – 1, *x* = –1.

V případě, že některý žák zápis a) přepíše v duchu diskuze mezi Arianou a Kirou, tj. 3 + (–2) = 7 + *x*, pak je to zápis korektní. Korektní je přepis 3 – 2 = 7 + *x* i přepis 3 – 2 = 7 – *x* (pak je výsledek *x* = 6).

4 Výsledky:

a) |→→→→→|←←| | = |→→→→→→→|, výsledek |→→→|, *x* = 3.


ROVNICE

1 V obálce je schované nějaké číslo. Zjistěte jaké.

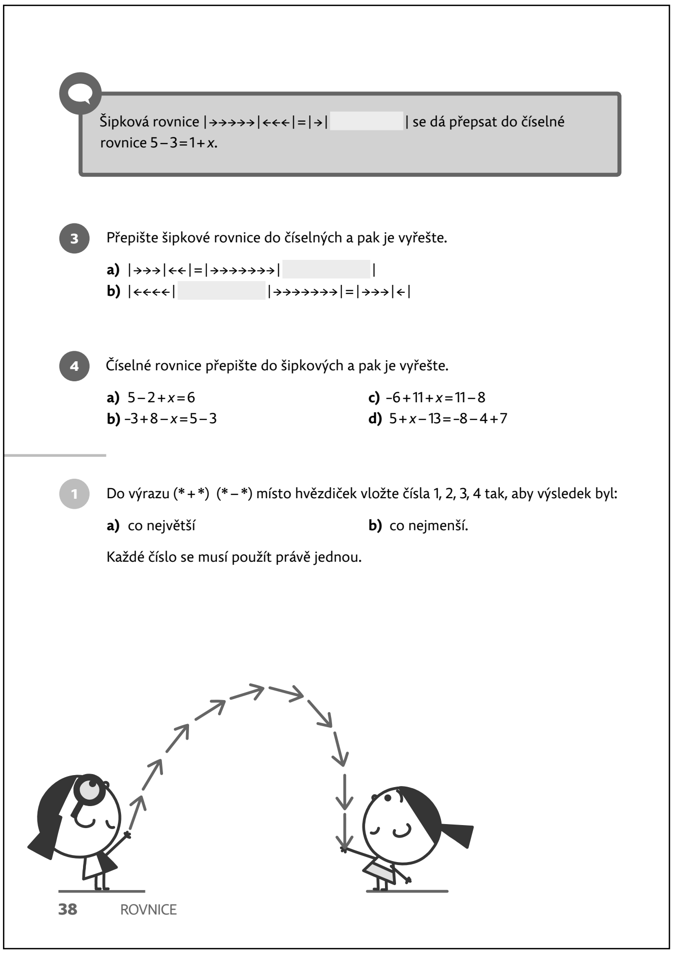
a) ⊠+2=7 **b)** 10=3+⊠ **c)** 12=15–⊠ **d)** 9–⊠=3 **e)** ⊠+6=1 **f)** 6+⊠=1

Vyřešit rovnici 3·*x*+2=17 znamená najít takové číslo, které když napíšeme místo *x*, dostaneme pravdivý vztah.

2 Řeště rovnice.

a) 2·*x*+1=13 **b)** 2+2·*x*=10 **c)** 16–3·*x*=7 **d)** 4=7+*x* **e)** 4=*x*+7 **f)** 15+2·*x*=1

ROVNICE 37


Šipková rovnice |→→→→→|←←←|=|→| | se dá přepsat do číselné rovnice 5–3=1+*x*.

3 Přepište šipkové rovnice do číselných a pak je vyřešte.

a) |→→→|←←|=|→→→→→→→| |
b) |←←←←| |→→→→→→→|=|→→→|←|

4 Číselné rovnice přepište do šipkových a pak je vyřešte.

a) 5–2+*x*=6 **b)** -3+8–*x*=5–3 **c)** -6+11+*x*=11–8 **d)** 5+*x*–13=-8–4+7

1 Do výrazu (*+*) (*–*) místo hvězdiček vložte čísla 1, 2, 3, 4 tak, aby výsledek byl:

a) co největší **b)** co nejmenší.

Každé číslo se musí použít právě jednou.

38 ROVNICE

b) ‖←←←|→→→→→→→→|____|‡‖→→→→→|←←←|,|výsledek ‖←←←|,|$x = 3$.
c) ‖←←←←←←|→→→→→→→→→→→‖____|‡|
|→→→→→→→→→→→|←←←←←←←←|,|výsledek ‖←←|,|$x = -2$.
Někteří žáci mohou tvrdit, že úloha nemá řešení, protože „před *x* je špatné znaménko“. V takovém případě je možné vrátit se k dvojici rovnic $x + 6 = 1$ a $6 + x = 1$ z úlohy 1 a řešit tyto rovnice v prostředí krokování.
d) ‖→→→→→|____|←←←←←←←←←←←←←|‡‖←←←←←←←←|
←←←←|→→→→→→→|, výsledek ‖→→→|,|$x = 3$.

Cílem úlohy je převod z jednoho jazyka do druhého. Choulostivým prvkem tohoto přepisu je vztah typu $-4 = + (-4)$. K němu se později vrátíme v prostředí schody.

U úlohy **b)** jsou řešením šipkové rovnice tři šipky doleva, ale v číselné rovnici je x kladné číslo, protože je před ním v rovnici mínus.
Pokud nějaký žák nechce přepisovat číselné rovnice do šipek, protože má dobrý vhled do číselných rovnic a přijde mu to jako zbytečná práce, nenutíme ho, jen ověříme, že převodu rozumí. K šipkám se může vrátit u jiných úloh, pokud to bude sám potřebovat.

1 Výsledky: **a)** $(2 + 3) \cdot (4 - 1) = 15$,
b) $(2 + 3) \cdot (1 - 4) = -15$.

V úloze **b)** pravděpodobně některé žáky nenapadne vytvořit záporné číslo.
Pro ně bude řešením $(1 + 2) \cdot (4 - 3) = 3$.

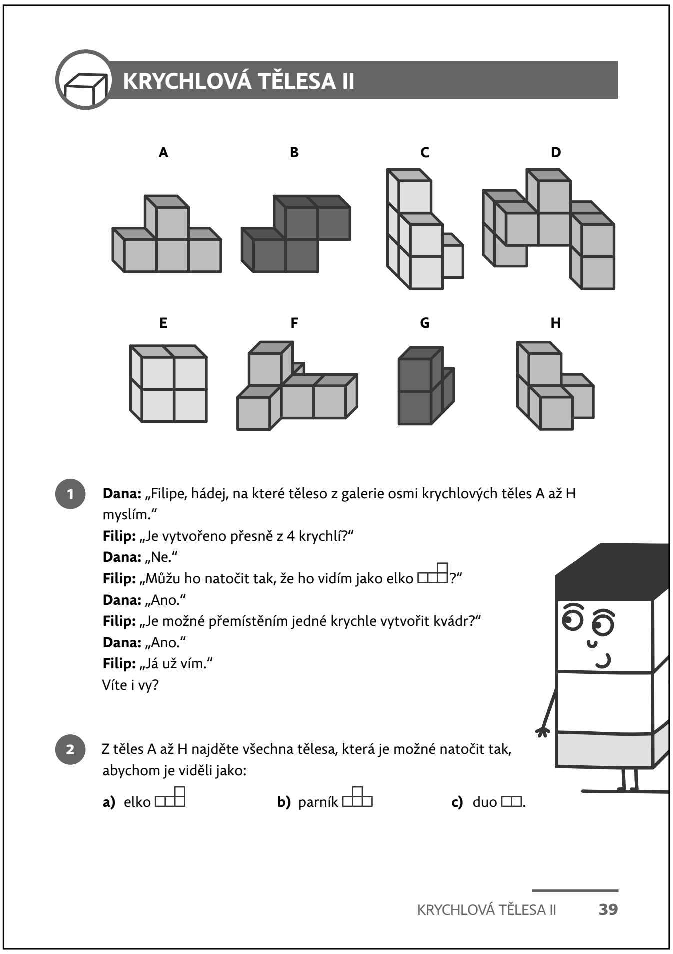
Krychlová tělesa

1 Úloha vede žáky k tomu, aby si všímali vlastností krychlových těles. První otázka je o počtu krychlí tělesa, což je příprava na objem tělesa. Po odpovědi na první otázku zůstávají ve hře tělesa C, D, F, G. Druhá otázka směřuje k zavedení nové látky, a sice zobrazení krychlového tělesa pomocí pravoúhlých průmětů – pro žáky raději pohledu zepředu, shora a z boku. Po odpovědi na druhou otázku zůstávají ve hře dvě tělesa – C a F. Třetí otázka využívá pojem kvádr. Z odpovědi vyplývá, že Dana myslela na těleso C.

Učitel se může vrátit k druhé a třetí otázce a žádat po žácích, aby určili všechna tělesa z nabídky, která mají danou vlastnost. O tom je pak další úloha. Hru mohou žáci sehrát sami.

Výsledek: C.

2 Výsledky: **a)** C, F, **b)** A, F, **c)** A, B, E, G.


KRYCHLOVÁ TĚLESA II

A B C D E F G H

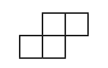
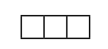
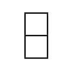
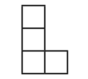
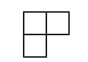
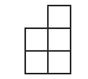
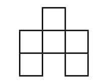
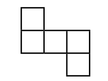
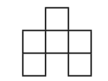
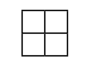
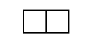
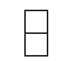
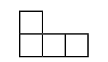
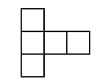
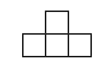
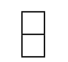
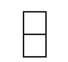
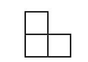
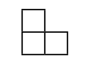
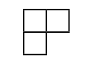
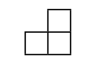
1 **Dana:** „Filipe, hádej, na které těleso z galerie osmi krychlových těles A až H myslím."
Filip: „Je vytvořeno přesně z 4 krychlí?"
Dana: „Ne."
Filip: „Můžu ho natočit tak, že ho vidím jako elko?"
Dana: „Ano."
Filip: „Je možné přemístěním jedné krychle vytvořit kvádr?"
Dana: „Ano."
Filip: „Já už vím."
Víte i vy?

2 Z těles A až H najděte všechna tělesa, která je možné natočit tak, abychom je viděli jako:
a) elko **b)** parník **c)** duo.

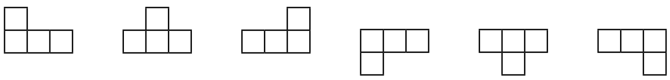
KRYCHLOVÁ TĚLESA II 39

3 Úloha jen procvičuje kreslení pravoúhlých pohledů a zavedené pojmy. Učitel uváží, jestli chce používat kratší pojmy nárys, půdorys, bokorys, nebo dá přednost delším pojmům – pohled zepředu, shora a z boku. Když bude používat oboje, nic se nestane, nedorozumění nehrozí. Po žácích však např. v testech znalost terminologie nevyžadujeme. Pro některé děti může úloha být obtížná.

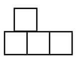
Výsledky:

	nárys	půdorys	bokorys (zprava)
B			
C			
D			
E			
F			
G			
H			

4 Horní krychli je možno přemístit více způsoby.



Může se stát, že žáci přijdou i s tímto řešením:



V takovém případě učitel nápad pochválí a zeptá se, jak by vypadal podlažní plán. Pokud návrh nevzejde od žáků, vyjasní učitel pro další úlohy, co se rozumí krychlovým tělesem – nemůže dojít k tomu, aby se stěna jedné krychle jen částečně překrývala se stěnou jiné krychle.

Je možné najít například tato řešení:

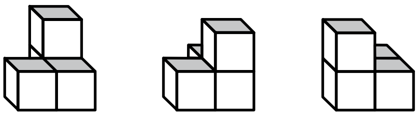
1, 2	1	2	1, 2	2	2	1
1	1	2	2	1, 2	1, 2	1, 2
1	1, 2	1, 2	2	2	1	2

Výzva hledat všechna řešení může vést k diskuzi o počtu řešení, která je zde náročná. Někteří žáci považují první čtyři plány za jedno řešení, protože jde o totéž těleso. Jiní žáci je považují za různá řešení, protože se krychle přemístila jiným způsobem. Třída se může názorově rozdělit, čehož může učitel využít a přirovnat takovou situaci k mnoha situacím z běžného života, ve kterých se též lidé názorově rozchází.

Úlohu může učitel využít i k diagnostice žáků. Ten, kdo řekne, že první čtyři plány dávají jen jedno řešení, vnímá až konečný produkt. Ten, kdo řekne, že první čtyři plány dávají čtyři různá řešení, protože krychle byla přesunuta jiným způsobem, vnímá proces, který vedl ke vzniku. Když si učitel uvědomí, jaké žáky má ve třídě, může mu to pomoci je lépe pochopit a vést.

Podle schopností žáků ve třídě je možné úlohu zjednodušit. Místo výzvy, aby žáci naši všechna řešení, budeme požadovat, aby hledali více řešení.

5 Experimentováním s krychlemi žáci postaví tato tři tělesa:



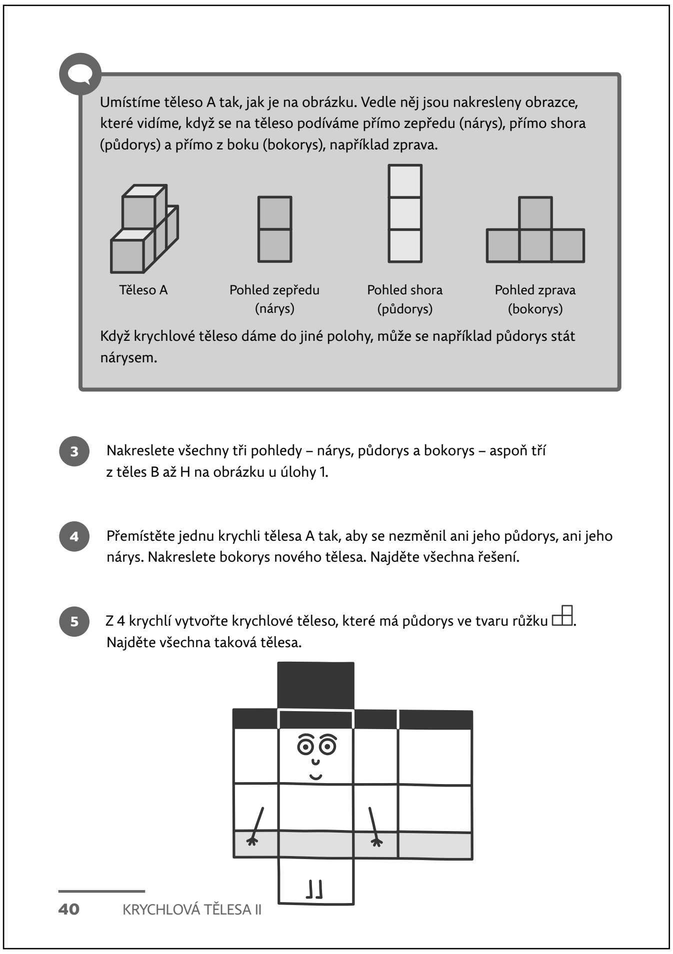
Vznikne diskuze, zda první a třetí těleso jsou stejná nebo různá. Lze očekávat různé názory. Zastánci toho, že jsou různá, mnohdy přijdou s argumentem, že pravá a levá bota jsou různé, byť jsou zrcadlově stejné. Pokud se tento argument ve třídě neobjeví, řekne ho učitel. Je možné, že i k prostřednímu z uvedených těles pak žáci vytvoří zrcadlově souměrné těleso. To se ale natočením ukáže být stejné jako původní těleso. V jedné třídě žáci vymysleli přirovnání, že je to jako levá a pravá ponožka. V té třídě se slova bota a ponožka stala synonymy nepřímé a přímé shodnosti.

Někteří žáci pojmou úlohu kombinatoricky a najdou všech 8 plánů (případně ještě plány zrcadlově souměrné).

Modelováním se ukáže, že každé z takto popsaných těles je jedním ze tří výše uvedených.

6 Úloha má překvapivě mnoho řešení.

Prvních 6 těles se najde poměrně snadno. Dále uvádíme sadu několika plánů, abychom naznačili, jak bohatý je soubor těles. Například první a třetí plán zobrazují



Umístíme těleso A tak, jak je na obrázku. Vedle něj jsou nakresleny obrazce, které vidíme, když se na těleso podíváme přímo zepředu (nárys), přímo shora (půdorys) a přímo z boku (bokorys), například zprava.

Těleso A | Pohled zepředu (nárys) | Pohled shora (půdorys) | Pohled zprava (bokorys)

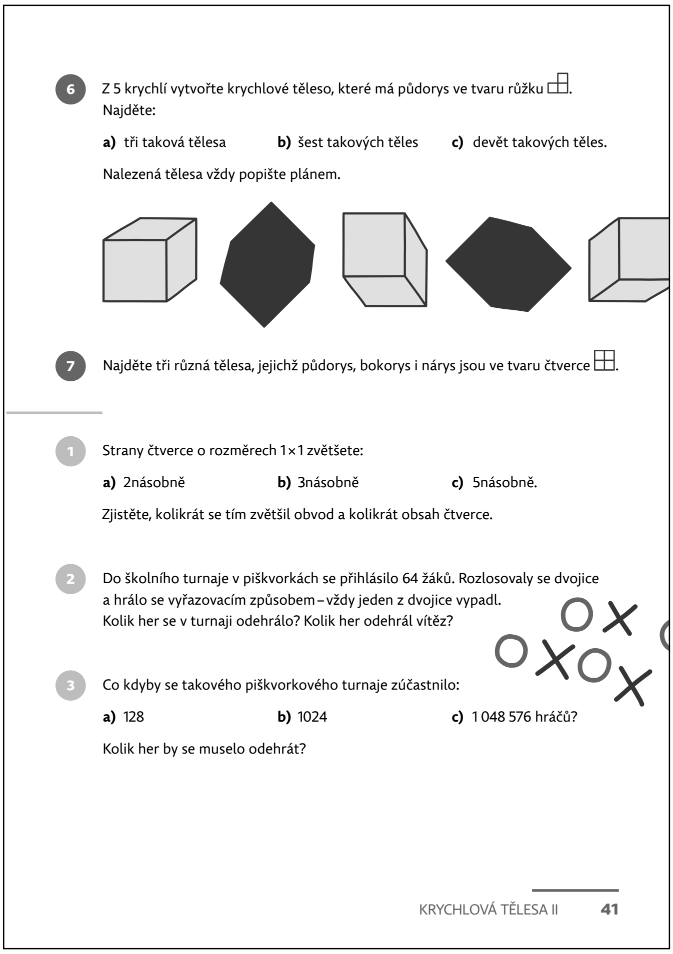
Když krychlové těleso dáme do jiné polohy, může se například půdorys stát nárysem.

3 Nakreslete všechny tři pohledy – nárys, půdorys a bokorys – aspoň tří z těles B až H na obrázku u úlohy 1.

4 Přemístěte jednu krychli tělesa A tak, aby se nezměnil ani jeho půdorys, ani jeho nárys. Nakreslete bokorys nového tělesa. Najděte všechna řešení.

5 Z 4 krychlí vytvořte krychlové těleso, které má půdorys ve tvaru růžku. Najděte všechna taková tělesa.

40 KRYCHLOVÁ TĚLESA II



6 Z 5 krychlí vytvořte krychlové těleso, které má půdorys ve tvaru růžku. Najděte:

a) tři taková tělesa b) šest takových těles c) devět takových těles.

Nalezená tělesa vždy popište plánem.

7 Najděte tři různá tělesa, jejichž půdorys, bokorys i nárys jsou ve tvaru čtverce.

1 Strany čtverce o rozměrech 1×1 zvětšete:

a) 2násobně b) 3násobně c) 5násobně.

Zjistěte, kolikrát se tím zvětšil obvod a kolikrát obsah čtverce.

2 Do školního turnaje v piškvorkách se přihlásilo 64 žáků. Rozlosovaly se dvojice a hrálo se vyřazovacím způsobem – vždy jeden z dvojice vypadl. Kolik her se v turnaji odehrálo? Kolik her odehrál vítěz?

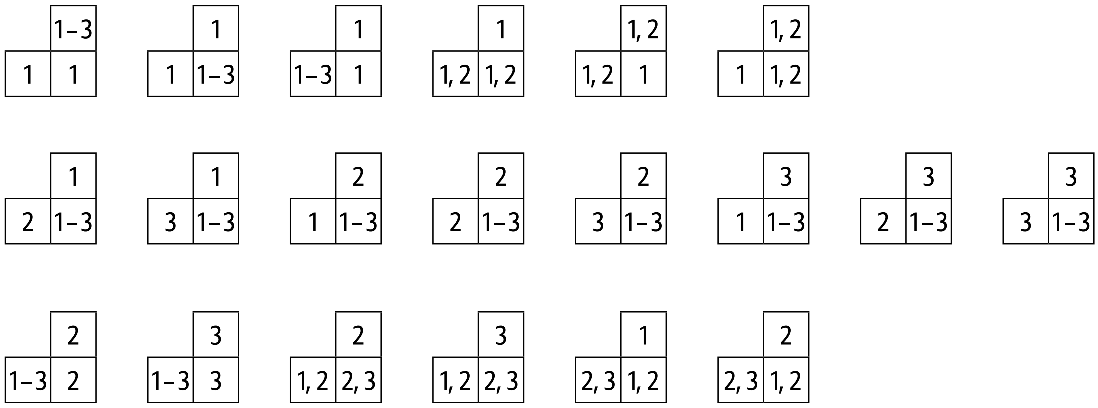
3 Co kdyby se takového piškvorkového turnaje zúčastnilo:

a) 128 b) 1024 c) 1 048 576 hráčů?

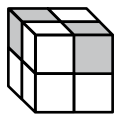
Kolik her by se muselo odehrát?

KRYCHLOVÁ TĚLESA II 41

dvě tělesa typu levá a pravá bota, druhé těleso v prvním řádku a poslední těleso ve druhém řádku jsou stejná.



7 Zadání splňuje krychle 2 × 2 × 2. Z ní lze odebrat jednu nebo obě barevné krychle. Jiné vyhovující těleso vznikne z krychle 2 × 2 × 2 odebráním jedné barevné krychle a druhé krychle „z opačného rohu".



Alternativní náročnější úloha: Najděte tři různá tělesa složená ze stejného počtu krychlí, jejichž půdorysy jsou stejné, bokorysy jsou stejné i nárysy jsou stejné.

Můžeme doporučit ještě tvořivou aktivitu, kterou najdete v kapitole Když zbyde čas. Spočívá v tom, že každý žák dostane nějaký počet krychlí, například 10. Jeden žák postaví těleso, které ten druhý nevidí, a nakreslí všechny tři pohledy (půdorys, nárys, bokorys). Druhý žák dostane pouze nákresy a jeho úkolem je postavit totéž těleso. Pro žáky bývá motivační, že mohou stavět podle své fantazie. Záhy přitom zjistí, že některá jejich zadání nejsou jednoznačná.

1 Výsledky: Obvod se zvětší **a)** 2násobně, **b)** 3násobně, **c)** 5násobně. Obsah se zvětší **a)** 4násobně, **b)** 9násobně, **c)** 25násobně.

2 Výsledky: Odehrálo se 63 her. Vítěz odehrál 6 her.

3 Výsledky: **a)** 127, **b)** 1023, **c)** 1 048 575.