

Obsah

PŘEDMLUVA	9
ÚVOD	11
1 DIDAKTICKÁ MATEMATICKÁ PROSTŘEDÍ	13
1.1 Sémantická prostředí Krokování a Schody	14
1.1.1 Prostředí Tajná chodba	14
1.1.2 Prostředí Panáček	15
1.1.3 Prostředí Krokování a prostředí Schody	16
1.1.4 Didaktická implementace prostředí Krokování	16
1.2 Desémantizace prostředí Krokování a Schody	18
1.3 Další tři sémantická prostředí	20
1.3.1 Autobus	20
1.3.2 Děda Lesoň	21
1.3.3 Rodina	23
1.4 Pět strukturálních prostředí	24
1.4.1 Algebrogramy	24
1.4.2 Násobilkové čtverce	25
1.4.3 Součtové trojúhelníky	26
1.4.4 Sousedé	27
1.4.5 Šípkové grafy	28
2 TEORIE GENERICKÉHO MODELU	31
2.1 Proces a koncept	31
2.1.1 Koncept jako produkt procesu	32
2.1.2 Koncept jako výzva k procesu	32
2.1.3 Teorie reifikace Anny Sfard	33
2.1.4 Teorie proceptu Davida Talla a Edieho Graye	34
2.1.5 Reifikace, procept a amalgám	35
2.1.6 Geometrický koncept: pohled Petra Vopěnky	37
2.1.7 Amalgám v geometrii	38
2.2 Teorie generického modelu	39
2.2.1 Paměť versus porozumění	39
2.2.2 Pět etap poznávacího procesu	40
2.2.3 Ilustrace	41
2.3 Motivace	42
2.3.1 Motivace v prostředí rodiny	43
2.3.2 Nástroje školní motivace	44
2.3.3 Individualizace výuky - příběh Adéla	45
2.3.4 Pokračování příběhu Adéla	46
2.3.5 Proč dospělí nerozumí motivaci dětí	46
2.4 Izolovaný model	47
2.4.1 První a druhá podetapa izolovaných modelů	48
2.4.2 Spontánní přechod do třetí a čtvrté podetapy	49
2.4.3 Asistovaný přechod do třetí a čtvrté podetapy	50

2.5	Generický model.....	51
2.5.1	Od procesuálního generického modelu ke konceptuálnímu	52
2.5.2	Od izolovaných modelů přímo ke konceptuálnímu generickému modelu	53
2.5.3	Ne každý poznatek je znalost	54
2.5.4	Diagnóza formalizmu - indikátory izolovanosti.....	55
2.5.5	Diagnostikování formalizmu	57
2.6	Abstraktní poznatek a krystalizace.....	58
2.6.1	Čtyři základní síly jazyka písmen	59
2.6.2	Síla kódovací.....	60
2.6.3	Síla uchopovací a vyjadřovací	61
2.6.4	Síla uchopovací - příběh Danka, část první.....	62
2.6.5	Analýza první části příběhu Danka	64
2.6.6	Druhá část příběhu Danka - hledáme úlohu, kterou nelze řešit bez x.....	65
2.6.7	Analýza druhé části příběhu Danka	66
2.6.8	Třetí část příběhu Danka - úloha, kterou nelze řešit pomocí x.....	67
2.6.9	Analýza příběhu Danka - řešení otázky, jak rozvíjet sílu uchopovací	68
2.6.10	Argumentační síla jazyka písmen	69
2.6.11	Objevitelská síla jazyka písmen.....	71
2.6.12	Krystalizace.....	73
2.7	Matematický orgán.....	74
2.7.1	Konstrukt „duševní orgán“	74
2.7.2	Matematický duševní orgán dítěte.....	75
2.7.3	Učení se čtení a psaní je založeno na asociaci	77
2.7.4	Učení se počtům je založeno na odhalování kauzálních vazeb.....	78
3	VYUČOVÁNÍ ORIENTOVANÉ NA BUDOVÁNÍ MENTÁLNÍCH SCHÉMAT	81
3.1	Schéma.....	82
3.1.1	Schéma interní a externí	82
3.1.2	Pojem schéma v teorii proceptu.....	83
3.1.3	Pojem schéma v teorii APOS	84
3.1.4	Pojem schéma v naší interpretaci	86
3.1.5	Porovnání pojmu schéma v APOS teorii a v našem pojetí.....	87
3.1.6	Proto-schéma	88
3.2	Schéma jako mentální nástroj	89
3.2.1	Schéma jako nástroj orientace v životě - ilustrace	89
3.2.2	Základní teze o schématu.....	90
3.2.3	Projekce tezí do procesu učení se matematice.....	92
3.2.4	Aritmetická schémata žáků často trpí nedostatkem konceptů	94
3.2.5	Aditivní triáda - výchozí schéma aritmetiky	95
3.2.6	Experimenty s prostředím Sousedé bez použití jazyka písmen	97
3.2.7	Experimenty s prostředím Sousedé, v nichž byl použit jazyk písmen	99
3.2.8	Analýzy příběhů	101
3.2.9	Poznatky získané z experimentů a jejich aplikace	102
3.2.10	Objevy v prostředí Sousedé - příběh	104
3.3	Struktura.....	106
3.3.1	Indikátory nástupu procesu strukturace - příběhy.....	106

3.3.2	Komentáře k příběhům	108
3.3.3	Od schématu k protostruktuře	109
3.3.4	Protostruktura jako prostor k propojování schémat	110
3.3.5	Od protostruktury ke struktuře	111
3.4	Edukační styl	112
3.4.1	Dva přístupy k zavedení kritéria dělitelnosti devíti	113
3.4.2	Transmisivní edukační styl	114
3.4.3	Instruktivní edukační styl - příběh	115
3.4.4	Komentář k matematické hladině příběhu	117
3.4.5	Komentář k interakci učitelka - žák Matěj	117
3.4.6	Komentář k interakci učitelka - třída	118
3.4.7	Komentář k přesvědčení učitelky	119
3.5	Konstruktivistický edukační styl	120
3.5.1	Cíle vyučování matematice	120
3.5.2	Konstruktivistický edukační styl - příběh	121
3.5.3	Komentář k příběhům	125
3.5.4	Role učitele	127
3.5.5	Práce s chybou - příběh	128
3.5.6	Komentáře k příběhu	129
3.5.7	Práce s chybou - edukační technologie	130
3.5.8	Narušení konvence není matematická chyba	131
3.5.9	Narušení standardního postupu není matematická chyba	132
4	ČÍSLO	135
4.1	Prvky mentálního schématu Číslo	135
4.1.1	Číselné obory	135
4.1.2	Binární relace	136
4.1.3	Operace	137
4.2	Vstupní etapa tvorby mentálního protoschématu Číslo	138
4.2.1	Partikulární svět číslovek	138
4.2.2	Vstup dospělého do budování protoschématu Číslo: říkanka	139
4.2.3	Vnímání čísla	141
4.2.4	Potřeba dítěte evidovat počet nebo pořadí	142
4.2.5	Schopnost dítěte používat čísla	144
4.3	První třída	145
4.3.1	Číslo jako počet objektů	146
4.3.2	Heterogenní soubor - krystalizace názorů	147
4.3.3	Velká čísla - prostor pro špičkové žáky	148
4.3.4	Propedeutika zlomku	149
4.3.5	Propedeutika záporného čísla	150
4.3.6	Izomorfismus	151
4.3.7	Tři základní kategorie sémantického ukotvení čísla	152
4.4	Číslo jako kvantita	153
4.4.1	Stav - od počtu k veličině	154
4.4.2	Veličina - změna jednotky	155
4.4.3	Velká čísla - prostor pro experiment	157

4.4.4	Operátor.....	158
4.4.5	Příčiny náročnosti operátora.....	158
4.4.6	Frekvence (četnost)	160
4.5	Číslo jako identifikátor	162
4.5.1	Jméno versus adresa.....	163
4.5.2	Lineární adresování, číselná osa a stupnice	165
4.5.3	Věžák jako stupnice.....	166
4.5.4	Prostředí Krokování a Schody	167
4.5.5	Cyklické adresování, ciferník a úhel	167
4.6	Práce s číslem	169
4.6.1	Porozumění operaci.....	169
4.6.2	Porozumění relaci	170
4.7	Sčítání	170
4.7.1	Žák rozumí smyslu operace	171
4.7.2	Typy 06 a 07	171
4.7.3	Typy 08 až 11	173
4.7.4	Žák umí sčítat.....	175
4.7.5	Nácvik spojů	176
4.7.6	Písemné sčítání	177
4.7.7	Žák rozumí algoritmu (písemného) sčítání.....	178
4.8	Odčítání.....	179
4.8.1	Žák rozumí smyslu odčítání.....	179
4.8.2	Příčiny náročnosti odčítání.....	180
4.8.3	Rozdíl čísel	181
4.8.4	Žák umí odčítat mentálně i písemně.....	182
4.8.5	Aditivní struktura	182
4.9	Záporné číslo	184
4.9.1	Příběh.....	184
4.9.2	Pohled do historie	185
4.9.3	Příčiny náročnosti záporných čísel	185
4.9.4	Sémantické modely záporných čísel	187
4.9.5	Strukturální modely záporných čísel	188
4.10	Násobení	188
4.10.1	Žák rozumí násobení $A \cdot B^*$ (skalár • objekt)	191
4.10.2	Žák rozumí násobení $A^* \cdot B^*$ (objekt • objekt)	19!
4.10.3	Žák rozumí násobení $A \cdot B$ (skalár • skalár)	192
4.10.4	Násobení více čísel. Propedeutika mocniny	193
4.10.5	Žák umí násobit mentálně	195
4.10.6	Písemné násobení	196
4.11	Dělení	197
4.11.1	Dělení se zbytkem - porozumění operaci	197
4.11.2	Porozumění zápisu 4(1)	199
4.11.3	Žák umí dělit mentálně i písemně	201
4.11.4	Porozumění desetinným číslům	202
4.11.5	Multiplikativní struktura a aditivní struktura	204
4.12	Zlomky	205

4.12.1	Životní vs. školní znalosti o zlomcích - příběh	205
4.12.2	Poučení převzaté z historie	207
4.12.3	Příčinou neúspěchu výuky zlomků je absence představy kmenových zlomků	208
4.12.4	Sémantické modely zlomků	209
4.12.5	Závěr	211
POUŽITÁ LITERATURA.....		213
VĚCNÝ REJSTŘÍK.....		217
JMENNÝ REJSTŘÍK		229

Předmluva

Publikace pojednává o procesech, které se odehrávají v hlavě dítěte a žáka prvního stupně, když vstupuje do světa čísel a buduje si aritmetické představy. Přirozeně se v knize mluví i o sociálním prostředí, ve kterém žák do matematiky vstupuje, tedy o rodině a škole, o rodičích, prarodičích, ale zejména o učitelích.

Mnohaleté životní zkušenosti, které jsem získal jako dítě, žák, student i učitel, mne přesvědčily, že ke kvalitnímu matematickému poznání se žák dopracuje samostatným řešením vhodných úloh a následnou diskusí se spolužáky. Toto přesvědčení je výchozí platformou našich úvah, které jsou zaměřené na aritmetiku a organicky doplněné myšlenkami kombinatoriky a logiky. Geometrie se objeví jen sporadicky. Této oblasti byla věnována monografie D. Jirotkové (2010), která je psána ve stejném didaktickém přesvědčení jako tato kniha.

V knize je použito mnoho myšlenek a příběhů, které se zrodily ve výzkumném týmu v Bratislavě v sedmdesátých a osmdesátých letech. Ještě více je těch, které vznikly v posledních 20 letech ve výzkumném týmu v Praze. Jsou společně se svými autory uvedeny v textu. Všem těmto kolegům za jejich vklad děkuji.

Děkuji recenzentkám, doc. Kataríne Bachraté a doc. Nadě Vondrové, které mnoha cennými radami a připomínkami výrazně přispely ke kvalitě textu. Ideovým východiskem této knihy je kinetická psychologie Vítá Hejného (2012). RNDr. Hynek Bachratý, který je skvělým znalcem této teorie, pomohl odstranit z původního textu nejasnosti a nepřesnosti. Za tuto pomoc mu děkuji. Moje veliké poděkování náleží kolegyni doc. Darině Jirotkové nejen za permanentní připomínkování rodícího se textu, pomoc při tvorbě obrázků, ale i za masivní pomoc s finálním zpracováním celé publikace. Veronice Matějové děkuji za grafickou úpravu textu.

Nakonec musím poděkovat manželce Evě Hejně, která byla stálou a pevnou oporou jak pro moje tělo, tak i pro někdy přetíženou mysl.

Praha, březen 2014

Autor

Úvod

V době druhé světové války a krátce po ní, Vít Hejný (1904–1977), profesor na obchodní akademii, začal hledat příčiny nízké efektivity vyučování matematice a možné cesty zlepšení. Zjistil, že příčina tkví ve způsobu vyučování, kde žák je pouze konzumentem matematických poznatků prezentovaných učitelem a zapsaných v učebnici. Zjistil, že výrazně efektivnější je vyučování založené na autonomním řešení úloh žáky. Zjistil, že s tímto edukačním stylem nutno začínat co nejdříve, protože starší žáci, kteří jsou naučeni na konzumní způsob učení vyžadující od žáka jen reprodukci a imitaci, jen zřídka vítají vyučování, jež od nich vyžaduje tvorivost. Nabyl přesvědčení, že ke skutečnému poznání matematiky žák dospěje pouze vlastním úsilím, řešením vhodně volených úloh.

Autor této publikace, syn Víta Hejněho, byl první žák, jenž byl touto metodou, kterou dnes řadíme ke konstruktivistickým metodám, veden. Pamatuji se, že úlohy, které mi tátá dával, mne velice bavily, ale školní matematika mne nebaivila vůbec. Známky z matematiky jsem měl spíše horší než lepší, ale tátá mi tvrdil, že jsem v matematice dobrý. Na ta slova došlo, když v šestém ročníku přišly zlomky, záporná čísla a geometrické konstrukce. Věci, které se mi zdaly samozřejmé, dělaly mým spolužákům potíže. Nakonec jsem se stal nejlepším matikářem třídy a dokonce i školy. Vyhrál jsem krajské kolo matematické olympiády a rozhodl jsem se matematiku studovat.

Moje vlastní zkušenost mne zcela přesvědčila o účinnosti edukačního stylu taty, a tak když můj syn po matematických neúspěších ve 4. ročníku měl jít na střední školu, rozhodl jsem se tuto třídu učit. Bylo to v Bratislavě v roce 1975, kdy společně s V. Repášem, Ľ. Hrdinou, J. Vantuchem a několika dalšími kolegy jsme začali metodiku vyučování matematiky koncipovanou mým otcem dále rozpracovávat. V letech 1975–1979 jsem učil jednu třídu od 5. do 8. ročníku. Výsledky svých zkušeností jsme zpracovávali 10 let a publikovali v publikaci Hejný a kol. (1990). Mezitím jsem v letech 1984–1989 vyučoval další třídu, tentokrát od 3. do začátku 8. ročníku. Něžná revoluce mi však nedovolila dovést žáky do konce 8. ročníku a musel jsem jít dělat úředníka na MŠMT.

Po rozpadu republiky jsem v práci pokračoval na Pedagogické fakultě v Praze společně s Darinou Jirotkovou a Janou Slezákovou-Kratochvílovou. V roce 2004 nás osloвило nakladatelství Fraus s nabídkou napsat učebnice matematiky pro 1. stupeň ZŠ. Naše trojice výzvu přijala, i když na začátku jsem velice pochyboval, že se najdou učitelé, kterým by se tato učebnice zamhouvala. Od začátku jsme upozorňovali, že učebnice vyžadují od pedagoga zcela nový edukační styl. Měli jsme veliké štěstí, když se objevila učitelka, která plně pochopila, jak nutno učebnici používat. Jitka Michnová skvělým způsobem učebnici pilotovala a přesvědčila nás, že naše práce není zbytečná. Sama se později stala spoluautorkou a členkou týmu. Po třech letech se k nám přidala i Eva Bomerová. Úspěchy, kterých obě učitelky dosáhly, nás utvrzují v přesvědčení, že učebnice lze úspěšně zavést do praxe tehdy, když učitel je s novým edukačním stylem ztotožněn. Za nejcennější výsledek práce kolegyně Michnové a Bomerové nepovažujeme silně nadprůměrné znalosti matematiky jejich žáků, ale to, že matematiku mají rádi nejen „jedničkáři“, ale skoro všichni žáci. V současnosti novým edukačním stylem úspěšně pracují nejen desítky učitelů, ale i celé školy, jako Cyrilometodějská ZŠ v Brně nebo ZŠ v Huslenkách.

Cílem této publikace je popsat didaktickou i edukační teorii, která je východiskem našich učebnic. V textu je citujeme kódem typu M2/3/16, což značí učebnici pro 2. ročník, 3. díl, strana 16.

První kapitola knihy popisuje hlavní didaktický nástroj našeho přístupu - didaktické matematické prostředí. V druhé kapitole je osvětlen poznávací proces žáka a ve třetí kapitole pak edukační metoda VOBS, tj. vyučování orientované na budování schémat. Konečně poslední kapitola je věnována didaktickému zpracování aritmetiky prvního stupně s příležitostními výhledy na předškolní věk a na 2. stupeň.